

УДК 531.36

© 1998 г. А. В. КАРАПЕТЯН, И. С. ЛАГУТИНА

О ВЛИЯНИИ ДИССИПАТИВНОГО И ПОСТОЯННОГО МОМЕНТОВ НА ВИД И УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА

Известно, (см., напр., [1]), что в задаче о движении волчка Лагранжа существуют два типа стационарных движений: равномерные вращения вокруг вертикально расположенной оси динамической симметрии и регулярные прецессии. Вращения статически устойчивого волчка и регулярные прецессии всегда устойчивы, а вращения спящего волчка устойчивы при выполнении условия Маиевского.

В предлагаемой работе обсуждается влияние диссипативного момента, моделирующего сопротивление, и постоянного момента, приложенного к внешней рамке карданова подвеса, для простоты предполагаемого безынерционным.

1. Рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого динамически симметричного тела с неподвижной точкой, находящегося под действием (помимо сил тяжести) диссипативного момента $M_d = -fD\omega$ ($D = \text{diag}(D_1, D_1, D_3)$) и постоянного момента $M_p = fP\gamma$. Здесь ω – угловая скорость волчка, γ – единичный вектор вертикали, f – положительный параметр, D_1, D_3 и P – постоянные.

Уравнения движения тела, отнесенные к системе координат, жестко связанной с телом имеют вид

$$J\dot{\omega} + \omega \times (J\omega) = \gamma \times \partial V / \partial \gamma + fP\gamma - fD\omega \quad (1.1)$$

$$\gamma + \omega \times \gamma = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $J = \text{diag}(J_1, J_1, J_3)$ – тензор инерции волчка относительно неподвижной точки, $V = mg(c \cdot \gamma)$ – потенциальная энергия (m – масса волчка, c – радиус-вектор центра масс, g – ускорение свободного падения). Уравнение (1.1) выражает теорему об изменении кинетического момента тела, а уравнение (1.2) – условие постоянства вектора γ в инерциальной системе отсчета. При условии, что центр масс волчка лежит на оси динамической симметрии, проекции вектора c на главные оси инерции тела имеют вид $0, 0, c$ (для определенности будем считать, что $c > 0$). В проекциях на эти оси уравнения (1.1) и (1.2) принимают, соответственно, вид

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1) \omega_2 \omega_3 = mgc\gamma_2 + fP\gamma_1 - fD_1 \omega_1 \quad (1.3)$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 = -mgc\gamma_1 + fP\gamma_2 - fD_1 \omega_2, \quad J_3 \dot{\omega}_3 = fP\gamma_3 - fD_3 \omega_3$$

$$\dot{\gamma}_1 + \omega_2 \gamma_3 - \omega_3 \gamma_2 = 0, \quad \dot{\gamma}_2 + \omega_3 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_3 = 0, \quad \dot{\gamma}_3 + \omega_1 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_1 = 0 \quad (1.4)$$

Здесь $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – проекции векторов ω и γ на главные оси инерции тела для неподвижной точки.

Очевидно, уравнения (1.3), (1.4) допускают решения

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega = P/D_3. \quad (1.5)$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = -1, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega = -P/D_3 \quad (1.6)$$

отвечающие равномерным вращениям волчка с угловой скоростью ω вокруг вертикально расположенной оси динамической симметрии. При этом решению (1.5) соответствует случай спящего волчка (центр масс находится выше неподвижной точки), а решению (1.6) – случай статически устойчивого волчка (центр масс находится ниже неподвижной точки).

2. Исследуем устойчивость решения (1.5). Полагая в возмущенном движении $\gamma_3 = 1 + \delta$, $\omega_3 = \omega + \sigma$ и оставляя для остальных переменных их прежние обозначения, выпишем линеаризованные уравнения возмущенного движения

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1) \omega \omega_3 = mgc\gamma_2 + fD_3 \omega \gamma_1 - fD_1 \omega_1 \quad (2.1)$$

$$J_1 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega \omega_2 = -mgc\gamma_1 + fD_3 \omega \gamma_2 - fD_1 \omega_2 \quad (2.2)$$

$$J_3 \dot{\sigma} = fD_3 \omega \delta - fD_3 \sigma \quad (2.3)$$

$$\dot{\gamma}_1 + \omega_2 - \omega \gamma_2 = 0 \quad (2.4)$$

$$\dot{\gamma}_2 + \omega \gamma_1 - \omega_1 = 0 \quad (2.5)$$

$$\dot{\delta} = 0 \quad (2.6)$$

Очевидно, характеристическое уравнение, отвечающее системе (2.1)–(2.6), всегда имеет один нулевой корень, обусловленный наличием геометрического интеграла $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ (см. (2.6)), и один действительный отрицательный корень, равный $-fD_3/J_3$ (см. (2.3) с учетом (2.6)). Кроме того, уравнения (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) отделяются от остальных уравнений системы (2.1)–(2.6). Поэтому решение (1.5) асимптотически устойчиво (неустойчиво), если все корни характеристического уравнения, отвечающего подсистеме (2.1), (2.2), (2.4), (2.5), имеют отрицательные вещественные части (хотя бы один корень имеет положительную вещественную часть). Асимптотическая устойчивость по переменной γ_3 следует из асимптотической устойчивости по переменным γ_1 , γ_2 и соотношения $\gamma_3^2 = 1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2$. Непосредственное составление и исследование характеристического уравнения подсистемы (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) можно существенно упростить, если из уравнений (2.4) и (2.5) выразить ω_1 и ω_2 :

$$\omega_1 = \dot{\gamma}_2 + \omega \gamma_1, \quad \omega_2 = -\dot{\gamma}_1 + \omega \gamma_2 \quad (2.7)$$

Дифференцируя соотношения (2.7) по времени

$$\dot{\omega}_1 = \ddot{\gamma}_2 + \omega \dot{\gamma}_1, \quad \dot{\omega}_2 = -\ddot{\gamma}_1 + \omega \dot{\gamma}_2 \quad (2.8)$$

и подставляя выражения (2.7) и (2.8) в уравнения (2.1) и (2.2), получим

$$J_1 \ddot{\gamma}_1 + fD_1 \dot{\gamma}_1 + [(J_3 - J_1) \omega^2 - mgc] \gamma_1 + (J_3 - 2J_1) \omega \dot{\gamma}_2 + f(D_3 - D_1) \omega \gamma_2 = 0 \quad (2.9)$$

$$J_1 \ddot{\gamma}_2 + fD_1 \dot{\gamma}_2 + [(J_3 - J_1) \omega^2 - mgc] \gamma_2 - (J_3 - 2J_1) \omega \dot{\gamma}_1 - f(D_3 - D_1) \omega \gamma_1 = 0 \quad (2.10)$$

Отметим, что уравнения (2.9), (2.10) описывают движение линейной механической системы с двумя степенями свободы, находящейся под действием сил произвольной структуры: диссипативных, потенциальных, гироскопических и циркуляционных. Последние также называют силами радиальной коррекции или непотенциальными позиционными силами (см., напр., [2]).

Умножая уравнение (2.10) на $i = \sqrt{-1}$, складывая полученное соотношение с уравнением (2.9) и вводя комплексную переменную $\rho = \gamma_1 + i\gamma_2$, имеем

$$J_1 \dot{\rho}_1 + f D_1 \dot{\rho} + [(J_3 - J_1)\omega^2 - mgc]\rho - i(J_3 - 2J_1)\omega \dot{\rho} - if(D_3 - D_1)\omega \rho = 0 \quad (2.11)$$

Характеристическое уравнение для уравнения (2.11) имеет вид

$$J_1 \lambda^2 + f D_1 \lambda + [(J_3 - J_1)\omega^2 - mgc] - i(J_3 - 2J_1)\omega \lambda - if(D_3 - D_1)\omega = 0 \quad (2.12)$$

Очевидно, если уравнение (2.12) имеет все корни с отрицательной (хотя бы один корень с положительной) вещественной частью, то тем же свойством обладают и корни характеристического уравнения, отвечающего системе (2.9), (2.10).

Условие отрицательности вещественных частей корней уравнения (2.12) определяет область устойчивости решения (1.5). На границе области устойчивости это уравнение имеет чисто мнимый корень $i\Omega$. При этом (см. (2.12)):

$$-J_1 \Omega^2 + (J_3 - 2J_1)\omega \Omega + [(J_3 - J_1)\omega^2 - mgc] + if[D_1 \Omega - (D_3 - D_1)\omega] = 0 \quad (2.13)$$

откуда следует, что $\Omega = \omega(D_3 - D_1)/D_1$ (см. мнимую часть соотношения (2.13)). Таким образом, граница области устойчивости решения (1.5) определяется соотношением

$$\omega^2 (J_3 D_1 - J_1 D_3) D_3 / D_1^2 - mgc = 0 \quad (2.14)$$

(см. действительную часть соотношения (2.13)).

Учитывая, что при $\omega = 0$ решение (1.5) заведомо неустойчиво (см. (2.12)), получаем, что условие его устойчивости имеет вид

$$\omega^2 (J_3 D_1 - J_1 D_3) D_3 / D_1^2 - mgc > 0 \quad (2.15)$$

Условие устойчивости решения (1.6) получается из предыдущего при замене c на $-c$ и следовательно имеет вид

$$\omega^2 (J_3 D_1 - J_1 D_3) D_3 / D_1^2 + mgc > 0 \quad (2.16)$$

При замене знака неравенства в соотношениях (2.15) и (2.16) на противоположный решения (1.5) и (1.6) соответственно неустойчивы.

3. Таким образом, если $J_3 D_1 - J_1 D_3 > 0$, то вращение статически устойчивого волчка по-прежнему всегда устойчиво (см. (2.16)), а вращение спящего волчка устойчиво при достаточно большой угловой скорости (см. (2.15)). Если же $J_3 D_1 - J_1 D_3 < 0$, то вращение спящего волчка всегда неустойчиво (см. (2.15)), а вращение статически устойчивого волчка устойчиво при достаточно малой угловой скорости (см. (2.16)). Следовательно, при $J_3 D_1 - J_1 D_3 < 0$ диссипативный и постоянный моменты рассмотренного вида оказывают существенно дестабилизирующее влияние на устойчивость вертикальных вращений волчка Лагранжа. При $J_3 D_1 - J_1 D_3 > 0$ эти моменты не оказывают никакого влияния на устойчивость вращения статически устойчивого волчка и изменяют критическое значение угловой скорости спящего волчка.

Действительно, критическое значение угловой скорости, вытекающее из условия Маиевского, равно $4J_1 mgc / J_3^2$, а критическое значение угловой скорости, вытекающее из условия (2.15), равно $D_1^2 mgc / (J_3 D_1 - J_1 D_3) D_3$. Заметим, что последнее больше или равно предыдущего, так как неравенство $D_1^2 mgc / (J_3 D_1 - J_1 D_3) D_3 \geq 4J_1 mgc / J_3^2$ эквивалентно (при $J_3 D_1 - J_1 D_3 > 0$ и $c > 0$) неравенству $(J_3 D_1 - 2J_1 D_3)^2 \geq 0$, которое всегда имеет место.

Таким образом, и при $J_3 D_1 - J_1 D_3 > 0$ рассматриваемые моменты оказывают некоторое дестабилизирующее (если $J_3 D_1 \neq 2J_1 D_3$) влияние на устойчивость вращений спящего волчка, поскольку сужают область их устойчивости.

При критическом значении угловой скорости, т.е. при критическом значении величины постоянного момента, а именно, при (см. (1.5), (1.6)):

$$P^2 = P_*^2 = \pm mgcD_1^2D_3/(J_3D_1 - J_1D_3) \quad (3.1)$$

(знак плюс отвечает случаю $J_3D_1 - J_1D_3 > 0$, а знак минус – случаю $J_3D_1 - J_1D_3 < 0$) происходит смена устойчивости тех или иных вертикальных вращений волчка (для знака плюс – вращений (1.5), для знака минус – вращений (1.6)). Следовательно, согласно теории Андронова–Хопфа (см., напр., [3]), от вертикальных вращений, для которых происходит смена устойчивости, ответвляются периодические движения волчка, соответствующие иным формам его стационарных движений, отличным от вертикальных вращений.

4. Будем искать периодические движения волчка в виде

$$\omega_1 = u\gamma_1, \quad \omega_2 = u\gamma_2, \quad \omega_3 = u\gamma_3 + v \quad (4.1)$$

где u и v – пока произвольные постоянные. Подставляя соотношения (4.1) в уравнения (1.4), получим, что

$$\dot{\gamma}_1 = v\gamma_2, \quad \dot{\gamma}_2 = -v\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = 0 \quad (4.2)$$

Таким образом, $\dot{\omega}_1 = uv\gamma_2$, $\dot{\omega}_2 = -uv\gamma_1$, $\dot{\omega}_3 = 0$ (см. (4.1)). При этом уравнения (1.3) принимают вид

$$[J_1uv + (J_3 - J_1)(u\gamma_3 + v)u - mgc]\gamma_2 = f(P - D_1u)\gamma_1 \quad (4.3)$$

$$[J_1uv + (J_3 - J_1)(u\gamma_3 + v)u - mgc]\gamma_1 = -f(P - D_1u)\gamma_2 \quad (4.4)$$

$$D_3(u\gamma_3 + v) = P\gamma_3 \quad (4.5)$$

Из уравнений (4.3)–(4.5) следует, что

$$u = \frac{P}{D_1}, \quad v = \frac{(D_1 - D_3)D_1mgc}{P(J_3D_1 - J_1D_3)}, \quad \gamma_3 = \gamma = \frac{D_1^2D_3mgc}{P^2(J_3D_1 - J_1D_3)} \quad (4.6)$$

Очевидно, указанные решения существуют только при $P^2 \geq P_*^2$, поскольку $|\gamma_3| \leq 1$ (см. (3.1)), причем при $P^2 = P_*^2$ они переходят в решения (1.5), (1.6) в зависимости от знака $J_3D_1 - J_1D_3$. С точностью до начальной фазы найденные решения имеют вид (см. (4.1), (4.2)):

$$\gamma_1 = \alpha \sin vt, \quad \gamma_2 = \alpha \cos vt, \quad \gamma_3 = \gamma \quad (\alpha = \sqrt{1 - \gamma^2}) \quad (4.7)$$

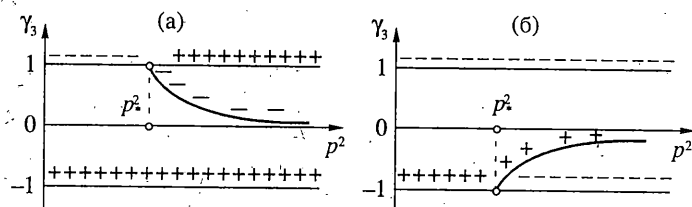
$$\omega_1 = u\alpha \sin vt, \quad \omega_2 = u\alpha \cos vt, \quad \omega_3 = u\gamma + v$$

где постоянные u , v и γ определяются соотношениями (4.6).

Эти решения описывают регулярные прецессии: волчок вращается с постоянной угловой скоростью v вокруг оси динамической симметрии, которая, в свою очередь, вращается с постоянной угловой скоростью u вокруг вертикали и составляет с последней постоянный угол, косинус которого равен γ .

Как уже отмечалось, регулярные прецессии (4.7) (см. также (4.6)) существуют лишь при значениях величины постоянного момента, больших критической.

Заметим, что регулярные прецессии классической (f = 0) волчка Лагранжа представляют собой двухпараметрические семейства (свободные параметры – постоянные интегралов проекций кинетического момента на вертикаль и на ось динамической симметрии). Другими словами, угловые скорости собственного вращения и прецессии классического волчка Лагранжа могут быть выбраны, в известной мере,



Фиг. 1

независимо одна от другой (лишь бы однозначно определяемый их значениями косинус угла нутации не превышал бы по модулю единицы). В данном случае это не так. Регулярные прецессии (4.7) с учетом (4.6) представляют собой однопараметрические семейства (свободный параметр – величина постоянного момента), а произведение угловых скоростей прецессии и собственного вращения постоянно и зависит только от параметров задачи (см. (4.6)) $uv = (D_1 - D_3)mgc / (J_3D_1 - J_1D_3)$.

5. Для исследования устойчивости регулярной прецессии волчка следует составить линеаризованные в окрестности решения (4.7) уравнения возмущенного движения и перейти во вращающуюся с угловой скоростью ν систему отсчета, чтобы привести эти уравнения, периодически зависящие от времени, к автономному виду. Затем следует составить характеристическое уравнение полученных автономных линейных уравнений. Анализ корней этого уравнения дает, что если $J_3D_1 - J_1D_3 > 0$ (при этом решение (4.7) отбрасывается от решения (1.5)), то регулярная прецессия всегда неустойчива, а если $J_3D_1 - J_1D_3 < 0$ (при этом решение (4.7) отбрасывается от решения (1.6)), то регулярная прецессия всегда устойчива.

Полученные результаты можно представить в виде бифуркационных диаграмм на плоскости (P^2, γ_3) (см. фигуру). Знаком плюс на фигуре помечены устойчивые, а знаком минус – неустойчивые движения.

В заключение отметим, что в случае изотропной диссипации ($D_1 = D_3$) в линеаризованной системе (2.9), (2.10) отсутствуют циркуляционные силы и условия устойчивости вертикальных вращений (1.5), (1.6) немедленно следуют из теорем Кельвина–Четаева: $(J_3 - J_1)\omega^2 - mgc > 0$; $(J_3 - J_1)\omega^2 + mgc > 0$ (см. также (2.15) и (2.16) при $D_1 = D_3$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 96-15-96051 и 98-01-00041а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
2. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
3. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.

Москва

Поступила в редакцию 15.VI.1997