

УДК 531.8

© 1998 г. В. И. ГУЛЯЕВ, Т. В. ЗАВРАЖИНА

## ДИНАМИКА УПРАВЛЯЕМЫХ ДВИЖЕНИЙ УПРУГОГО РОБОТА-МАНИПУЛЯТОРА

Учет упругой податливости звеньев роботов-манипуляторов при исследовании динамики программного управляемого движения позволяет повысить точность их позиционирования и улучшить их динамические характеристики за счет возможности регулирования их полей упругих перемещений и напряжений.

В [1–4] рассмотрены задачи об исследовании однозвенных упругих манипуляторов путем приведения их механических моделей к системам с конечным числом степеней свободы путем разложения искомым функций упругих перемещений в конечный ряд по собственным формам или другим системам функций. Конечномерные модели многозвенных упругих роботов изучаются в работах [5–8]. Они базируются на специальных предположениях об инерционных и жесткостных характеристиках их звеньев и формах их упругого деформирования.

Задачи моделирования динамики упругих роботов в значительной мере осложнены тем, что элементы составляющих кинематическую цепь упругих звеньев одновременно принимают участие в нескольких видах движения, а гироскопическое взаимодействие между вращательными и линейными компонентами этих движений затрудняет их разделение и рассмотрение в отдельности. При изменении конфигурации манипулятора происходит также изменение его инерционных характеристик, сопровождаемой эволюцией спектра частот и форм его собственных колебаний и возможностью самонастройки системы на резонансные взаимодействия между парциальными формами движений и внешними воздействиями на отдельных участках траектории движения. В связи с этим для исследования отмеченных явлений следует применять также методы их прямого математического моделирования.

В данной работе предложена математическая модель динамики упругих многозвенных управляемых манипуляторов как систем с распределенными параметрами, испытывающих действие сил тяжести и сил инерции относительных колебаний, построена относящаяся к гибриднему типу система нелинейных дифференциальных уравнений с обыкновенными и частными производными относительно искомым переменных, разработан шаговый алгоритм построения решений этих уравнений, позволяющий на каждом шаге вычислительной процедуры разделить нелинейную часть задачи определения углов относительных поворотов в шарнирах смежных звеньев и линейную многоточечную краевую задачу определения относительных упругих перемещений звеньев всей стержневой цепи.

**1. Механическая модель и уравнения движения.** Поставим задачу о динамике пространственного управляемого движения многозвенного манипулятора, состоящего из  $N$  прямолинейных упругих стержней длиной  $l_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ), соединенных между собой идеальными цилиндрическими шарнирами. Пронумеруем звенья в порядке их присоединения друг к другу, считая что первое звено шарнирно соединено с неподвижным основанием. Введем инерциальную систему координат  $OXYZ$  и свяжем с каждым  $n$ -м звеном местную систему координат  $O_n x_n y_n z_n$  с осями  $\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n, \mathbf{k}_n$  так, чтобы точка  $O_n$

совпадала с началом  $n$ -го стержня, ось  $O_n x_n$  совпадала с его осевой линией, а соответствующие оси  $O_k y_k$  и  $O_k z_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ) всех звеньев были параллельны, когда вся кинематическая цепочка манипулятора вытянута в одну прямую линию и оси  $O_k x_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ) направлены вдоль одной прямой. Примем, что каждая из осей соединяющих звенья цилиндрических шарниров совпадает с одной из осей местной системы координат. Угол поворота последующего  $n$ -го звена по отношению к предыдущему вокруг одной из осей  $O_n x_n$ ,  $O_n y_n$  или  $O_n z_n$  обозначим  $\varphi_n$ ,  $\psi_n$  или  $\vartheta_n$  соответственно. Он считается положительным, если с конца соответствующей оси вращения поворот виден происходящим против хода часовой стрелки. В шарнирах к звеньям приложены управляющие моменты  $M_k^e$ , которые считаются положительными, если стремятся повернуть звенья в положительных направлениях.

Выделим условно  $n$ -е звено манипулятора (фиг. 1) и, пользуясь принципом Даламбера и опуская в соответствующих местах индекс  $n$ , выпишем уравнения его динамического равновесия

$$\begin{aligned} EF \partial^2 u / \partial x^2 - \rho F a_x + q_x &= 0 \\ EJ_z \partial^4 v / \partial x^4 - \frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \rho F a_y - q_y &= 0 \\ EJ_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \rho F a_z - q_z &= 0 \\ GJ_p \partial^2 \gamma / \partial x^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – функции упругих перемещений стержня вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  соответственно;  $\gamma$  – угол закручивания;  $EF$ ,  $EJ_z$ ,  $EJ_y$ ,  $GJ_p$  – жесткости при растяжении, изгибе и кручении;  $N(x)$  – внутренняя продольная сила;  $\rho$  – плотность материала;  $F$  – площадь поперечного сечения;  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  – компоненты вектора абсолютного ускорения элемента стержня;  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$  – компоненты вектора интенсивности внешней нагрузки вдоль соответствующих осей.

Если учитывать действие сил тяжести, то

$$q_x = -\rho F g \cos(Z, x), \quad q_y = -\rho F g \cos(Z, y), \quad q_z = -\rho F g \cos(Z, z) \quad (1.2)$$

Будем считать, что каждый элемент стержня находится в состоянии сложного движения, тогда его абсолютное ускорение  $\mathbf{a}(x)$  можно представить в виде [9, 10]:

$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{a}^e(x) + \mathbf{a}^c(x) + \mathbf{a}^r(x) \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{a}^e(x)$ ,  $\mathbf{a}^c(x)$ ,  $\mathbf{a}^r(x)$  – соответственно векторы переносного, кориолисового и относительного ускорений.

Ускорение  $\mathbf{a}^e(x)$  вычисляется по формуле

$$\mathbf{a}^e(x) = \mathbf{a}(0) + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{x}i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}i) \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{a}(0)$  – абсолютное ускорение точки  $O_n$ ;  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – соответственно векторы угловой скорости и углового ускорения подвижной системы координат  $O_n x_n y_n z_n$  относительно системы  $OXYZ$ . При вычислении  $\mathbf{a}^e(x)$  использовано принимаемое в геометрически линейной теории стержней предположение о малости упругих перемещений стержней по сравнению с их геометрическими размерами, позволяющее пренебрегать указанными перемещениями при вычислении радиуса-вектора элемента стержня, соответствующего координате  $x$ .

Представим ускорение  $\mathbf{a}^c(x)$  в виде

$$\mathbf{a}^c(x) = 2\boldsymbol{\omega} \times \left( \frac{\partial u}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial t} \mathbf{k} \right) \quad (1.5)$$

Отметим, что при реальных значениях угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  и малых упругих смещениях  $u, v, w$  им можно пренебречь.

В выражении для относительного ускорения

$$\mathbf{a}^r(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \mathbf{k} \quad (1.6)$$

первое слагаемое связано с продольными колебаниями стержней, которые оказываются более высокочастотными по сравнению с поперечными и происходят с малыми амплитудами. Поэтому для рассматриваемых динамических явлений процесс распространения продольных возмущений в стержне можно считать мгновенным, ускорением  $\partial^2 u / \partial t^2$  пренебречь и продольную силу  $N(x)$  подсчитывать из первого уравнения системы (1.1), которое при принятых предположениях принимает квазистатическую форму. Такими же соображениями определяется и вид четвертого уравнения системы (1.1), в котором не учитываются силы инерции крутильных колебаний элементов стержня.

С учетом (1.3)–(1.6) абсолютное ускорение произвольного элемента  $n$ -го упругого стержня выразим в форме

$$\mathbf{a}(x) = [a_x(0) - (\omega_y^2 + \omega_z^2)x] \mathbf{i} + \left[ a_y(0) + \varepsilon_z x + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] \mathbf{j} + \left[ a_z(0) - \varepsilon_y x + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \mathbf{k} \quad (1.7)$$

Подставив (1.2), (1.7) в (1.1), получим окончательные выражения для системы разрешающих уравнений

$$\begin{aligned} EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \rho F [a_x(0) - (\omega_y^2 + \omega_z^2)x] + \rho F g \cos(Z, x) \\ EJ_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right] &= -\rho F \left[ a_y(0) + \varepsilon_z x + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] - \rho F g \cos(Z, y) \\ EJ_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] &= -\rho F \left[ a_z(0) - \varepsilon_y x + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] - \rho F g \cos(Z, z) \\ GJ_p \partial^2 \gamma / \partial x^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Уравнения (1.8) кроме неизвестных полевых переменных  $u(x, t), v(x, t), w(x, t), \gamma(x, t)$  содержат также неизвестные функции времени  $a_x(0), a_y(0), a_z(0), \varepsilon_y, \varepsilon_z$ , характеризующие ускорение начала подвижной системы координат  $O_n x_n y_n z_n$  и ее угловое ускорение. Это обстоятельство должно быть учтено при постановке граничных условий.

Поскольку система  $O_n x_n y_n z_n$  жестко связана с началом  $n$ -го стержня, при  $x_n = 0$  имеем

$$u_n(0) = v_n(0) = w_n(0) = 0, \quad v_n'(0) = w_n'(0) = 0, \quad \gamma_n(0) = 0 \quad (1.9)$$

Здесь рассматриваемые переменные помечены индексом  $n$ , штрихом обозначено дифференцирование по  $x_n$ .

Из условий шарнирного соединения конца  $(n - 1)$ -го стержня с началом  $n$ -го стержня следуют

условие равенства векторов реакций

$$\mathbf{R}_{n-1}(l_{n-1}) = -\mathbf{R}_n(0) \quad (1.10)$$

условие равенства векторов моментов

$$\mathbf{M}_{n-1}(l_{n-1}) = -\mathbf{M}_n(0) \quad (1.11)$$

условие равенства векторов абсолютных ускорений

$$\mathbf{a}_{n-1}(l_{n-1}) = \mathbf{a}_n(0) \quad (1.12)$$

и условие, вытекающее из соотношения между угловыми ускорениями систем координат  $O_{n-1}x_{n-1}y_{n-1}z_{n-1}$  и  $O_nx_ny_nz_n$ , которое для представленного на фиг. 1 способа соединения стержней может быть записано в виде

$$\epsilon_n = D[\epsilon_{n-1}, \dot{\gamma}_{n-1}(l_{n-1})\mathbf{i}_{n-1}, \dot{w}_{n-1}(l_{n-1})\mathbf{j}_{n-1}, \dot{v}_{n-1}(l_{n-1})\mathbf{k}_{n-1}, \ddot{\psi}_n\mathbf{j}_n] \quad (1.13)$$

где  $D$  – некоторый линейный оператор, форма которого будет получена ниже, точками обозначено дифференцирование по времени  $t$ .

Для представления равенства (1.10) в скалярном виде спроектируем обе его части на оси системы  $O_nx_ny_nz_n$ :

$$\begin{vmatrix} -N_{x,n}(0) \\ Q_{y,n}(0) \\ Q_{z,n}(0) \end{vmatrix} - B_{n-1,n} \begin{vmatrix} -N_{x,n-1}(l_{n-1}) \\ Q_{y,n-1}(l_{n-1}) \\ Q_{z,n-1}(l_{n-1}) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.14)$$

Здесь  $B_{n-1,n} = A_n^T A_{n-1}$  – матрица перехода от базиса  $\mathbf{i}_{n-1}, \mathbf{j}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}$  к базису  $\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n, \mathbf{k}_n$ :

$$A_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^n & \alpha_{12}^n & \alpha_{13}^n \\ \alpha_{21}^n & \alpha_{22}^n & \alpha_{23}^n \\ \alpha_{31}^n & \alpha_{32}^n & \alpha_{33}^n \end{vmatrix}$$

где  $A_n$  – матрица направляющих косинусов  $\alpha_{11}^n = \cos(X, x_n)$ ,  $\alpha_{12}^n = \cos(X, y_n)$ , ...,  $\alpha_{33}^n = \cos(Z, z_n)$ .

Аналогично преобразуется равенство (1.11):

$$\begin{vmatrix} -M_{x,n}(0) \\ M_{y,n}(0) \\ -M_{z,n}(0) \end{vmatrix} - B_{n-1,n} \begin{vmatrix} -M_{x,n-1}(l_{n-1}) \\ M_{y,n-1}(l_{n-1}) \\ -M_{z,n-1}(l_{n-1}) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.15)$$

Структура матрицы  $B_{n-1,n}$  такова, что для представленной на фиг. 1 ориентации оси цилиндрического шарнира второе равенство системы (1.15) приводится к двум равенствам:

$$M_{y,n-1}(l_{n-1}) = M_n^e, \quad M_{y,n}(0) = M_n^e \quad (1.16)$$

где  $M_n^e$  – внешний управляющий момент в  $n$ -м шарнире.

Равенство (1.2) после соответствующего проектирования дает

$$\begin{vmatrix} a_{x,n}(0) \\ a_{y,n}(0) \\ a_{z,n}(0) \end{vmatrix} - B_{n-1,n} \begin{vmatrix} a_{x,n-1}(l_{n-1}) \\ a_{y,n-1}(l_{n-1}) \\ a_{z,n-1}(l_{n-1}) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.17)$$

Воспользовавшись соотношением (1.7), преобразуем систему (1.17) к виду

$$\begin{vmatrix} a_{x,n}(0) \\ a_{y,n}(0) \\ a_{z,n}(0) \end{vmatrix} - B_{n-1,n} \begin{vmatrix} a_{x,n-1}(0) - (\omega_y^2 + \omega_z^2)_{n-1} l_{n-1} \\ a_{y,n-1}(0) + \varepsilon_{z,n-1} l_{n-1} + \dot{v}_{n-1}(l_{n-1}) \\ a_{z,n-1}(0) - \varepsilon_{z,n-1} l_{n-1} + \dot{w}_{n-1}(l_{n-1}) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.18)$$

Для представления равенства (1.13) в явной форме выпишем вытекающие из теоремы о сложении угловых скоростей при сложном движении равенство [9]:

$$\omega_n(0) = \omega_{n-1}(l_{n-1}) + \psi_n \mathbf{j}_n \quad (1.19)$$

где  $\omega_n(0) = \omega_n$  – вектор угловой скорости базиса  $\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n, \mathbf{k}_n$ ;  $\omega_{n-1}(l_{n-1})$  – вектор угловой скорости трехгранника, жестко связанного с концом  $x_{n-1} = l_{n-1}$  ( $n-1$ )-го упругого стержня.

После подстановки

$$\omega_{n-1}(l_{n-1}) = \omega_{n-1} + \dot{\gamma}_{n-1}(l_{n-1}) \mathbf{i}_{n-1} - \dot{w}'_{n-1}(l_{n-1}) \mathbf{j}_{n-1} + \dot{v}'_{n-1}(l_{n-1}) \mathbf{k}_{n-1}$$

в (1.19) и проектирования на базис  $\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n, \mathbf{k}_n$  имеем

$$\begin{vmatrix} \omega_{x,n} \\ \omega_{y,n} - \psi_n \\ \omega_{z,n} \end{vmatrix} - B_{n-1,n} \begin{vmatrix} \omega_{x,n-1} + \dot{\gamma}_{n-1}(l_{n-1}) \\ \omega_{y,n-1} - \dot{w}'_{n-1}(l_{n-1}) \\ \omega_{z,n-1} + \dot{v}'_{n-1}(l_{n-1}) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.20)$$

Продифференцировав обе части равенства (1.20) по  $t$ , получим систему трех уравнений

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{x,n} \\ \varepsilon_{y,n} - \dot{\psi}_n \\ \varepsilon_{z,n} \end{vmatrix} - \dot{B}_{n-1,n} \begin{vmatrix} \omega_{x,n-1} + \dot{\gamma}_{n-1}(l_{n-1}) \\ \omega_{y,n-1} - \dot{w}'_{n-1}(l_{n-1}) \\ \omega_{z,n-1} + \dot{v}'_{n-1}(l_{n-1}) \end{vmatrix} - B_{n-1,n} \begin{vmatrix} \varepsilon_{x,n-1} + \dot{\gamma}_{n-1}(l_{n-1}) \\ \varepsilon_{y,n-1} - \dot{w}'_{n-1}(l_{n-1}) \\ \varepsilon_{z,n-1} + \dot{v}'_{n-1}(l_{n-1}) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.21)$$

Заметим, что первое уравнение этой системы непосредственно не используется для сопряжения искомых функций ( $n-1$ )-го и  $n$ -го звеньев, поскольку компонента  $\varepsilon_{x,n}$  крутильного ускорения  $n$ -го звена не входит ни в одно из соотношений (1.8), однако найденное с помощью (1.21) значение  $\varepsilon_{x,n}$  используется далее в соотношении типа (1.21) при сопряжении угловых ускорений  $n$ -го и  $(n+1)$ -го базисов.

Таким образом, система (1.8) для  $n$ -го стержня замыкается восемнадцатью граничными уравнениями (1.9), (1.14), (1.15), (1.16), (1.18), (1.21), в которые входит, однако, дополнительная неизвестная функция  $\dot{\psi}_n$ .

Для последнего звена, несущего на конце груз, который рассматривается как абсолютно твердое тело, в качестве граничных условий применяются уравнения его движения под действием сил инерции поступательного и вращательного движений и реакций связей.

**2. Методика построения решений уравнений движения.** Пусть известны начальная конфигурация рассматриваемой системы:  $\varphi_n(0) = \varphi_{n,0}$ ,  $\psi_n(0) = \psi_{n,0}$ ,  $\vartheta_n(0) = \vartheta_{n,0}$ ,  $u_n(x, 0) = u_{n,0}(x)$ ,  $v_n(x, 0) = v_{n,0}(x)$ ,  $w_n(x, 0) = w_{n,0}(x)$ ,  $\gamma_n(x, 0) = \gamma_{n,0}(x)$ ; начальные значения скоростей:  $\dot{\varphi}_n(0) = \dot{\varphi}_{n,0}$ ,  $\dot{\psi}_n(0) = \dot{\psi}_{n,0}$ ,  $\dot{\vartheta}_n(0) = \dot{\vartheta}_{n,0}$ ,  $\dot{u}_n(x, 0) = \dot{u}_{n,0}(x)$ ,  $\dot{v}_n(x, 0) = \dot{v}_{n,0}(x)$ ,  $\dot{w}_n(x, 0) = \dot{w}_{n,0}(x)$ ,  $\dot{\gamma}_n(x, 0) = \dot{\gamma}_{n,0}(x)$  и заданы управляющие моменты:  $M_n^e = M_n^e(t)$  ( $n = \overline{1, N}$ ).

Для интегрирования по времени системы (1.8) воспользуемся неявной разностной схемой метода Хуболта, в соответствии с которой производные некоторой функции  $X$  по времени  $dX/dt$ ,  $d^2X/dt^2$  в момент  $t + \Delta t$  заменяются их конечноразностными аналогами

$$\begin{aligned} \dot{X}(t + \Delta t) &= \dot{X}_{t+1} = (11X_{t+1} - 18X_t + 9X_{t-1} - 2X_{t-2})/6\Delta t \\ \ddot{X}(t + \Delta t) &= \ddot{X}_{t+1} = (2X_{t+1} - 5X_t + 4X_{t-1} - X_{t-2})/(\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\Delta t$  — шаг интегрирования по времени,  $X_{t+1} = X(t + \Delta t)$ ,  $X_t = X(t)$ ,  $X_{t-1} = X(t - \Delta t)$ ,  $X_{t-2} = X(t - 2\Delta t)$ .

С учетом (2.1) в момент времени  $t + \Delta t$  заменим систему уравнений с частными производными (1.8) для  $n$ -го звена системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} EF \frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{t+1} &= \rho F a_x(0) \Big|_{t+1} + \rho F [ -(\omega_y^2 + \omega_z^2)x + g \cos(Z, x) ] \Big|_{t+1} \\ EJ_z \frac{d^4 v}{dx^4} \Big|_{t+1} - N_t \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{t+1} - \frac{dN}{dx} \Big|_{t+1} \frac{dv}{dx} \Big|_{t+1} + \frac{2\rho F}{\Delta t^2} v_{t+1} &= -\rho F a_y(0) \Big|_{t+1} - \\ &- \rho F x \varepsilon_z \Big|_{t+1} - \rho F \left[ -\frac{5v_t}{\Delta t^2} + \frac{4v_{t-1}}{\Delta t^2} - \frac{v_{t-2}}{\Delta t^2} + g \cos(Z, y) \Big|_{t+1} \right] \\ EJ_y \frac{d^4 w}{dx^4} \Big|_{t+1} - N_t \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{t+1} - \frac{dN}{dx} \Big|_{t+1} \frac{dw}{dx} \Big|_{t+1} + \frac{2\rho F}{\Delta t^2} w_{t+1} &= -\rho F a_z(0) \Big|_{t+1} + \\ &+ \rho F x \varepsilon_y \Big|_{t+1} - \rho F \left[ -\frac{5w_t}{\Delta t^2} + \frac{4w_{t-1}}{\Delta t^2} - \frac{w_{t-2}}{\Delta t^2} + g \cos(Z, z) \Big|_{t+1} \right] \\ GJ_p \frac{d^2 \gamma}{dx^2} \Big|_{t+1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Особенность этой системы заключается в том, что составляющие ее уравнения не связаны между собой явно и зависимость друг от друга входящих в них переменных осуществляется только через граничные условия.

Будем считать, что состояние манипулятора в моменты времени  $t$ ,  $t - \Delta t$ ,  $t - 2\Delta t$  известно, тогда в системе (2.2) неизвестными оказываются функции  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $w(x)$ ,  $\gamma(x)$  и значения переменных  $a_x(0)$ ,  $a_y(0)$ ,  $a_z(0)$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  в момент  $t + \Delta t$ . Для их определения воспользуемся методом начальных параметров. Введем обозначения для недостающих

начальных значений производных от искомым функций и неизвестных параметров в правых частях уравнений системы (2.2):

$$\begin{aligned} C_1 &= du(0)/dx, & C_2 &= a_x(0), & C_3 &= d^2v(0)/dx^2, & C_4 &= d^3v(0)/dx^3 \\ C_5 &= a_y(0), & C_6 &= \varepsilon_z, & C_7 &= d^2w(0)/dx^2, & C_8 &= d^3w(0)/dx^3 \\ C_9 &= a_z(0), & C_{10} &= \varepsilon_y, & C_{11} &= d\gamma(0)/dx \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь и далее опущены нижние индексы  $t + 1$  у искомым переменных.

Представим решение системы (2.2) в виде

$$\begin{aligned} u(x) &= u^1(x)C_1 + u^2(x)C_2 + u^q(x) \\ v(x) &= v^3(x)C_3 + v^4(x)C_4 + v^5(x)C_5 + v^6(x)C_6 + v^q(x) \\ w(x) &= w^7(x)C_7 + w^8(x)C_8 + w^9(x)C_9 + w^{10}(x)C_{10} + w^q(x) \\ \gamma(x) &= \gamma^{11}(x)C_{11} \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $u^q(x)$ ,  $v^q(x)$ ,  $w^q(x)$  – решения задачи Коши для уравнений (2.2) при однородных начальных условиях и  $a_x(0) = a_y(0) = a_z(0) = 0$ ,  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$ ;  $u^1(x)$ , ...,  $\gamma^{11}(x)$  – решения задач Коши для уравнений (2.2), приведенных к такому виду и при таких начальных условиях, что для каждого  $i$ -го решения только одной из искомым переменных группы (2.3), соответствующей константе  $C_i$ , задано единичное значение, а всем остальным параметрам и правым частям уравнений (2.2) присвоены нулевые значения.

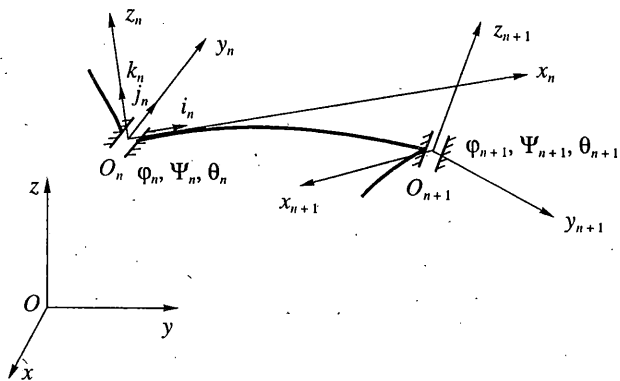
Располагая функциями  $u^1(x)$ , ...,  $w^q(x)$  для каждого из  $N$  упругих звеньев, можно используя по тринадцать условий сопряжения (1.14)–(1.16), (1.18), (1.21) каждых смежных звеньев; а также условия в начале  $x_1 = 0$  первого звена и условия на конце  $x_N = l_N$  последнего звена, подсчитать  $13N$  параметров, содержащих  $11N$  констант  $C_i$ ,  $N$  угловых ускорений вращений вокруг осей  $O_n x_n$  ( $n = \overline{1, N}$ ) и  $N$  угловых ускорений  $\ddot{\varphi}_i$ ,  $\ddot{\psi}_k$ ,

$\ddot{\vartheta}_l$  относительных поворотов примыкающих звеньев. Отметим, что поскольку при малых шагах  $\Delta t$  интегрирования по времени коэффициенты при некоторых слагаемых уравнений (2.2), содержащих в знаменателях  $\Delta t^2$ , становятся очень большими, система (2.2) может оказаться жесткой и среди своих частных решений содержать быстро возрастающие функции. Поэтому для численного интегрирования этой системы применяется метод Рунге – Кутты 4 порядка совместно с ортогонализацией [11].

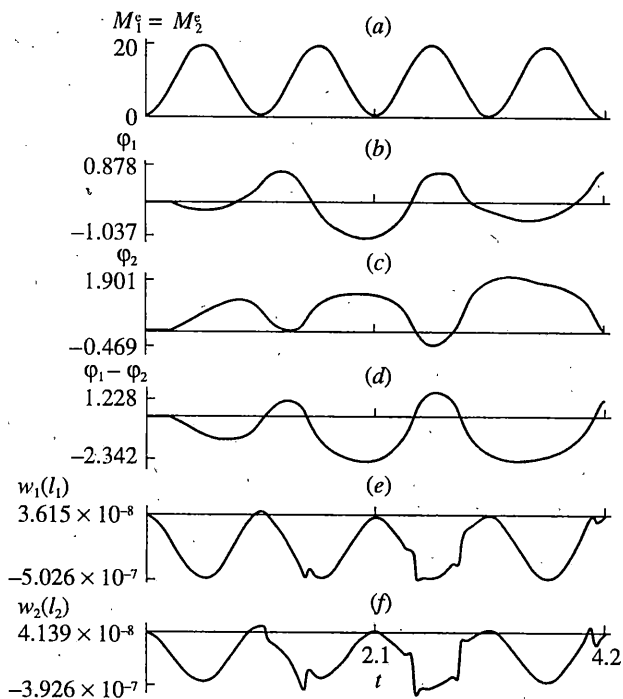
Определив состояние упругого манипулятора в момент времени  $t + \Delta t$ , можно переходить к следующему шагу вычислительного процесса и определять состояние системы в момент  $t + 2\Delta t$ . Для этого вначале с помощью метода предиктор-корректор Адамса – Башфорта [11] на основе найденных для каждого из узлов значений  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ , вычисленных в моменты времени  $t + \Delta t$ ,  $t$ ,  $t - \Delta t$ ,  $t - 2\Delta t$ , подсчитываются значения этих величин в момент времени  $t + 2\Delta t$ . Затем на этом же шаге вычисляются матрицы  $B_{n-1, n}$ ,  $\dot{B}_{n-1, n}$ . В зависимости от ориентации осевой линии цилиндрического шарнира выделим три случая подсчета этих матриц.

Случай 1:  $\varphi_n = \varphi_n(t + 2\Delta t)$ ,  $\dot{\varphi}_n = \dot{\varphi}_n(t + 2\Delta t)$ ,  $\psi_n = \vartheta_n = 0$ ,  $\dot{\psi}_n = \dot{\vartheta}_n = 0$ , тогда

$$B_{n-1, n} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}, \quad \dot{B}_{n-1, n} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi \cdot \dot{\varphi} & \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \\ 0 & -\cos \varphi \cdot \dot{\varphi} & -\sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \end{vmatrix}$$



Фиг. 1

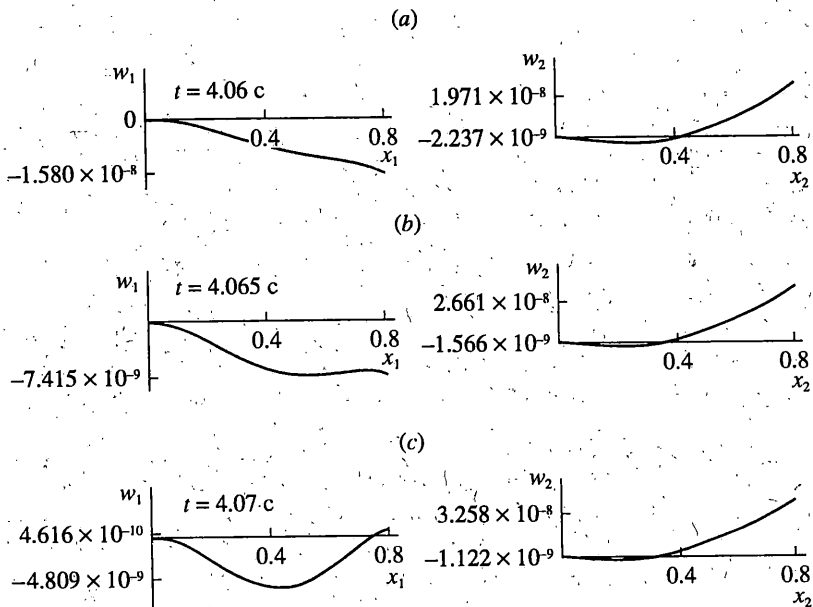


Фиг. 2

Случай 2:  $\psi_n = \psi_n(t + 2\Delta t)$ ,  $\dot{\psi}_n = \dot{\psi}_n(t + 2\Delta t)$ ,  $\phi_n = \dot{\phi}_n = 0$ ,  $\dot{\phi}_n = \dot{\phi}_n = 0$ , тогда

$$B_{n-1, n} = \begin{vmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{vmatrix}, \quad \dot{B}_{n-1, n} = \begin{vmatrix} -\sin \psi \cdot \dot{\psi} & 0 & -\cos \psi \cdot \dot{\psi} \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos \psi \cdot \dot{\psi} & 0 & -\sin \psi \cdot \dot{\psi} \end{vmatrix}$$





Фиг. 3

Случай 3:  $\vartheta_n = \vartheta_n(t + 2\Delta t)$ ,  $\dot{\vartheta}_n = \dot{\vartheta}_n(t + 2\Delta t)$ ,  $\varphi_n = \psi_n = 0$ ,  $\dot{\varphi}_n = \dot{\psi}_n = 0$ , тогда

$$B_{n-1,n} = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \dot{B}_{n-1,n} = \begin{vmatrix} -\sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta} & \cos \vartheta \cdot \dot{\vartheta} & 0 \\ -\cos \vartheta \cdot \dot{\vartheta} & -\sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

С помощью матриц  $B_{n-1,n}$  вычисляем матрицы

$$A_n = B_{0,1}^T B_{1,2}^T \dots B_{n-1,n}^T \quad (2.5)$$

После этого, располагая состояниями системы в моменты времени  $t - \Delta t$ ,  $t$ ,  $t + \Delta t$ , можно по описанной выше схеме определять ее состояние в момент  $t + 2\Delta t$  и так далее.

В данной работе поставлена задача о моделировании динамики идеального упругого манипулятора с идеальными шарнирами, управляемого моментами в шарнирах. Очевидно, что предложенная методика может быть легко распространена и на случай кинематического управления неидеальным манипулятором.

**3. Результаты исследования.** В качестве примера, иллюстрирующего применение предложенного подхода, рассмотрим плоский упругий двузвеник, шарнирно присоединенный концом первого стержня к неподвижному основанию. Звенья соединены между собой цилиндрическим шарниром. К концу второго звена присоединено шарообразное однородное твердое тело радиуса  $R = 5 \times 10^{-2}$  м, массой  $M = 2$  кг. Выбраны следующие значения параметров стержней:  $E_1 F_1 = E_2 F_2 = 6.597 \times 10^6$  Н,  $E_1 J_1 = E_2 J_2 = 1.294 \times 10^6$  Н м<sup>2</sup>,  $\rho_1 = \rho_2 = 7.85 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $l_1 = l_2 = 0.8$  м. В шарнирах системы приложены управляющие моменты  $M_1^e(t) = M_2^e(t) = 10(1 - \cos 6t)$  Н м.

Состояние системы описывается углами  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  отклонения стержней от вертикали и функциями упругих прогибов стержней  $w_1(x_1, t)$ ,  $w_2(x_2, t)$ . Было принято, что

в исходном состоянии  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ ,  $w_1(x_1, 0) = 0$ ,  $w_2(x_2, 0) = 0$ ,  $\dot{w}_1(x_1, 0) = 0$ ,  $\dot{w}_2(x_2, 0) = 0$ .

Динамическое поведение системы анализировалось на отрезке времени  $0 \leq t \leq 4.2$  с. Интегрирование по времени осуществлялось с шагом  $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$  с, при построении частных решений уравнений упругого деформирования стержней их длина разбивалась на 100 участков интегрирования.

На фиг. 2 показаны функции изменения во времени управляющих моментов  $M_1^e(t)$ ,  $M_2^e(t)$ , углов поворотов  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ , их разности  $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$  и упругих перемещений  $w_1(l_1, t)$ ,  $w_2(l_2, t)$  концов стержней. Можно заметить, что эти функции имеют гладкий характер за исключением кривых  $w_1(l_1, t)$ ,  $w_2(l_2, t)$ , которые содержат участки быстрого изменения в окрестности состояния  $\varphi_1(t) \approx \varphi_2(t)$ , когда осевые линии стержней ориентированы вдоль одной прямой и общий момент инерции системы принимает максимальное значение.

На этих участках времени более сложный вид имеют и формы упругих линий звеньев, что особенно характерно для второго стержня. На фиг. 3 показаны функции  $w_1(x_1)$ ,  $w_2(x_2)$  соответственно в моменты времени  $t = 4.06$  с (а),  $t = 4.065$  с (б),  $t = 4.07$  с (с). Отметим, что в другие моменты времени (при  $\varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)$ ) эти кривые имеют простое очертание и могут быть описаны малым числом аппроксимирующих параметров.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акуленко Л.Д., Гукасян А.А. Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С. 33–41.
2. Wang W.-J., Lu S.-S., Hsu C.-F. Experiments on the position control of a one-link flexible robot arm // IEEE Trans. on Robot. and Automat. 1989. V. 5. № 3. P. 373–377.
3. Chapnik B.V., Heppler G.R., Aplevich J.D. Modeling impact on a one-link flexible robotic arm // IEEE Trans. on Robot. and Automat. 1991. V. 7. № 4. P. 479–488.
4. Chait Y., Miklavcic M., Maccluer C.R., Radcliffe C.J. A natural modal expansion for the flexible robot arm problem via a self-adjoint formulation // IEEE Trans. on Robot. and Automat. 1990. V. 6. № 5. P. 601–603.
5. Акуленко Л.Д., Михайлов С.А., Черноусько Ф.Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 3. С. 18–124.
6. Михайлов С.А., Черноусько Ф.Л. Исследование динамики манипулятора с упругими звеньями // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. С. 51–58.
7. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989. 363 с.
8. Kirk C.L., Oria A., Hammer F. Slewing dynamics and vibration control of flexible space shuttle remote manipulator // AAS /// AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Halifax, Canada, 1995. 19 p.
9. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
10. Гуляев В.И., Гайдайчук В.И., Кошкин В.Л. Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. Киев. Наук. думка, 1992. 344 с.
11. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 447 с.

Киев

Поступила в редакцию 28.III.1996