

УДК 539.3

© 1998 г. И. П. ШАЦКИЙ

ЗАДАЧА О РАЗРЕЗЕ С КОНТАКТИРУЮЩИМИ КРОМКАМИ В ИЗГИБАЕМОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКЕ

К настоящему времени принято считать, что вопросы определения напряженно-деформированного состояния и предельного равновесия тонких оболочек с разрезами (трещинами) в основном решены. обстоятельные обзоры достижений в этой области линейной механики разрушения содержатся в [1–3]. Следует, однако, обратить внимание еще на один аспект проблемы. При воздействии на оболочку с разрезом изгибающей нагрузки, берега разреза могут вступать в контакт на части толщи оболочки. Поэтому использование решений задач изгиба, не учитывающих закрытие трещин, правомерно только в суперпозиции с решениями задач растяжения при уровне растягивающих нагрузок, достаточном для предотвращения контакта берегов. В литературе в лучших случаях [2, 4] обсуждаются лишь условия корректности таких суперпозиций.

Строгое описание закрытия трещин в изгибаемых оболочках с позиций трехмерной теории упругости сталкивается со значительными вычислительными трудностями. Поэтому весьма привлекательным представляется приближенный анализ контактного взаимодействия, не выходящий за рамки традиционных двумерных теорий оболочек. Для изгибаемых пластин попытки такого моделирования предприняты в [5–13].

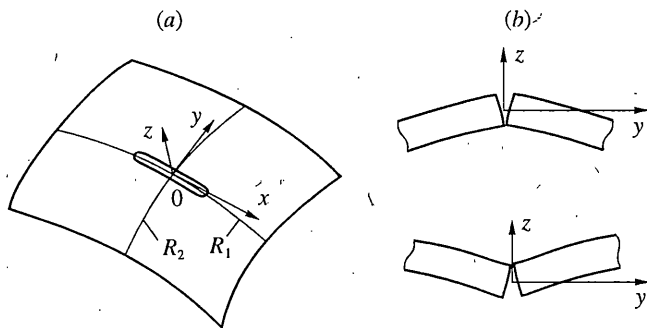
В данной статье исследуется упругое и предельное равновесие пологой оболочки двойкой кривизны, содержащей разрез, кромки которого контактируют при воздействии изгибающей нагрузки. Используется простейшая аналитическая модель контакта [7], позволяющая сформулировать задачу в двумерной постановке. Решение интегрального уравнения рассматриваемой задачи построено асимптотическим методом. Полученные результаты не содержат кинематических противоречий, связанных с частичным перехлестом берегов трещины.

1. Рассмотрим изотропную упругую оболочку, ослабленную прямолинейным в плане сквозным разрезом, расположенным вдоль линии главной кривизны срединной поверхности. На берегах разреза действует равномерно распределенная самоуравновешенная изгибающая нагрузка; лицевые поверхности оболочки свободны от напряжений. В рамках теории Кирхгофа–Лява исследуем влияние контакта берегов разреза, вызванного изгибом, на напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочки.

Считая оболочку в окрестности разреза пологой, выберем систему декартовых координат $Oxuz$ (фиг. 1, а). Упругое равновесие оболочки вне разреза опишем уравнениями теории пологих оболочек [14]:

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{R}\Delta_k w = 0, \quad \Delta\Delta w + \frac{1}{DR}\Delta_k\varphi = 0, \quad (x, y) \in R^2 \setminus L \quad (1.1)$$

Здесь φ – функция напряжений, w – прогиб оболочки, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $\Delta_k = \beta_2\partial^2/\partial x^2 + \beta_1\partial^2/\partial y^2$, $\beta_1 = R/R_1$, $\beta_2 = R/R_2$, $R = \min(|R_1|, |R_2|)$, R_1, R_2 – главные радиусы кривизны



Фиг. 1

нормальных сечений базисной поверхности, $B = 2Eh$, $D = 2Eh^3/(3(1 - \nu^2))$, E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки, h – ее полутолщина, L – отрезок оси абсцисс, вдоль которого расположен разрез длиной $2L$.

Мембранные усилия и изгибающие моменты на бесконечности принимаются нулевыми

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0, \quad M_x = M_{xy} = M_y = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

Следуя гипотезе жесткой нормали, неполный по высоте контакт берегов разреза в произвольном сечении $x = \text{const} \in (-l, l)$ интерпретируем как смыкание его острых кромок в одной из лицевых поверхностей оболочки $z = -h$ либо $z = h$ (фиг. 1, b). При таком подходе реальная двумерная область контакта вырождается в линию. Приняв во внимание симметрию задачи относительно оси x , запишем краевые условия на разрезе [7]:

$$[\nu] = h[\vartheta_y] > 0 \quad (1.3)$$

$$M_y = -m + hN_y \text{sgn}[\vartheta_y] \quad (1.4)$$

$$N_y \leq 0, \quad y = 0, \quad x \in (-l, l) \quad (1.5)$$

Здесь $[\nu]$ – раскрытие разреза в срединной поверхности оболочки, $[\vartheta_y]$ – скачок угла поворота нормали на разрезе ($\vartheta_y = \partial w / \partial y$), $-m$ – заданная нагрузка.

Отметим, что условие (1.3) выражает непрерывность перемещений на сомкнутых берегах разреза, а выражение (1.4) определяет изгибающий момент на разрезе как сумму заданной нагрузки и реактивного момента, вызванного параллельным переносом неизвестной контактной реакции в базисную поверхность оболочки. Неравенство (1.5) – признак односторонней связи.

2. Для решения краевой задачи (1.1)–(1.5) воспользуемся методом сингулярных интегральных уравнений. Запишем интегральные представления усилий и моментов на линии $y = 0$ через производные от функции скачка:

$$N_y(x, 0) = \frac{B}{4\pi} \int_L \{K_{11}(\xi - x)[\nu]'(\xi) - K_{13}(\xi - x)a[\vartheta_y]'(\xi)\} d\xi \quad (2.1)$$

$$M_y(x, 0) = \frac{Ba}{4\pi} \int_L \{K_{31}(\xi - x)[\nu]'(\xi) - K_{33}(\xi - x)a[\vartheta_y]'(\xi)\} d\xi$$

Ядра этих представлений выражаются через интегралы Фурье [1, 15]:

$$K_{jk}(z) = [\delta_{jk}\text{Re} + (1 - \delta_{jk})\text{Im}] \int_0^{\infty} g_{jk} \left(\gamma \frac{\sqrt{-i}}{s} \right) \sin z s ds \quad (j, k = 1, 3)$$

$$g_{11}(\rho) = r(\rho)/\omega(\rho), \quad g_{13}(\rho) = g_{31}(\rho) = -r(\rho)[1 + \nu/\omega(\rho)]$$

$$g_{33}(\rho) = r(\rho)[2 - 2\nu + \beta_1 \rho^2 + \omega(\rho) - \nu^2/\omega(\rho)]$$

$$r(\rho) = 2[2 + \beta_1 \rho^2 + 2\omega(\rho)]^{-1/2}, \quad \omega(\rho) = (1 + \beta_2 \rho^2)^{1/2}$$

$$\rho = \gamma \sqrt{-i}/s, \quad \gamma = 1/\sqrt{Ra}, \quad a = h/\sqrt{3(1 - \nu^2)}, \quad z = \xi - x$$

где δ_{jk} – символ Кронекера.

Подставляя выражения (2.1) в краевые условия (1.4) и исключая при помощи (1.3) функцию $[\nu]$, приходим к нелинейному интегродифференциальному уравнению относительно скачка угла поворота

$$\begin{aligned} & \frac{D}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ 3(1 - \nu^2) K_{11}(\xi - x) \text{sgn}[\vartheta_y](\xi) \text{sgn}[\vartheta_y](x) - \right. \\ & \left. - \sqrt{3(1 - \nu^2)} \{ K_{13}(\xi - x) \text{sgn}[\vartheta_y](\xi) + K_{31}(\xi - x) \text{sgn}[\vartheta_y](x) \} + K_{33}(\xi - x) \right\} \times \\ & \times [\vartheta_y]'(\xi) d\xi = m, \quad x \in (-l, l) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Условия (1.3)–(1.5) выполняются на всем разрезе по предположению. Из неравенства (1.3) следует, что $[\vartheta_y]$ – знакопостоянна на интервале $(-l, l)$, причем для случая пластины [7] $\text{sgn}[\vartheta_y] = -\text{sgn} m$. С учетом сказанного уравнение (2.3) линеаризуется и в безразмерных координатах $t = x/l$, $\tau = \xi/l$ представляется в виде

$$\frac{D}{4\pi} \int_{-1}^1 K(\tau - t) [\vartheta_y]'(\tau) d\tau = m, \quad t \in (-1, 1) \quad (2.4)$$

$$K(\zeta) = 3(1 - \nu^2) K_{11}(\zeta) + 2\sqrt{3(1 - \nu^2)} \text{sgn} m K_{13}(\zeta) + K_{33}(\zeta)$$

$$K_{jk}(\zeta) = l K_{kk}(l\zeta) \quad (j, k = 1, 3) \quad \zeta = \tau - t$$

Кроме того, искомый скачок должен удовлетворять дополнительному условию

$$[\vartheta_y](\pm 1) = 0 \quad (2.5)$$

3. Решение задачи (2.4), (2.5) получено методом малого параметра в первом оболочечном приближении.

Известно [1], что ядра (2.2) допускают разложение по малому параметру $\lambda = l\gamma = (l/\sqrt{Rh})(3(1 - \nu^2))^{1/4}$:

$$K_{jk}(\zeta) = \frac{a_{jk0}}{\zeta} + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} (a_{jkp} + b_{jkp} \ln \lambda |\zeta|) (\lambda \zeta)^p$$

Нулевые и первые коэффициенты разложения вычисляются по формулам

$$a_{110} = 1, \quad a_{130} = a_{310} = 0, \quad a_{330} = 3 - 2\nu - \nu^2$$

$$a_{111} = -\frac{\beta_1 + 5\beta_2}{32} \pi B - \frac{\sqrt{-\beta_1 \beta_2} 3\beta_1^2 - 22\beta_1 \beta_2 + 15\beta_2^2}{24 (\beta_1 - \beta_2)^2} \eta(-\beta_1 \beta_2)$$

$$a_{331} = \frac{(5 + 2\nu + \nu^2)\beta_1 + (1 + 2\nu + 5\nu^2)\beta_2}{32} \pi B + \frac{\sqrt{-\beta_1\beta_2}}{24} \times$$

$$\times \frac{3(5 + 2\nu + \nu^2)\beta_1^2 - 2(11 + 2\nu + 11\nu^2)\beta_1\beta_2 + 3(1 + 2\nu + 5\nu^2)\beta_2^2}{(\beta_1 - \beta_2)^2} \eta(-\beta_1\beta_2)$$

$$a_{131} = a_{311} = \left[\frac{3(1 + \nu)\beta_1^2 + 4(1 + 11\nu)\sqrt{\beta_1\beta_2^3} + (5 + 37\nu)\beta_2^2}{48(\sqrt{\beta_1} - \sqrt{\beta_2})^2} + \right.$$

$$+ b_{131} \left(\ln \frac{\gamma_0(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})}{4} - 1 \right) \left. \right] \eta(\beta_1\beta_2) + \left[\frac{(1 + \nu)(\beta_1 + 3\beta_2)}{16} + \right.$$

$$+ \frac{\beta_2^2 3(1 - 3\nu)\beta_1 - (1 - 7\nu)\beta_2}{12(\beta_1 - \beta_2)^2} + b_{131} \left(\ln \frac{\gamma_0\sqrt{|\beta_1 - \beta_2|}}{4} - 1 \right) \left. \right] \eta(-\beta_1\beta_2)$$

$$b_{111} = b_{331} = 0, \quad b_{131} = b_{311} = \frac{(1 + \nu)\beta_1 + (1 + 5\nu)\beta_2}{8}$$

$$B = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{-\beta_1\beta_2}}{\beta_1 + \beta_2} \eta(-\beta_1\beta_2)$$

Здесь $\eta(\cdot)$ – функция Хевисайда, $\ln \gamma_0 \doteq 0.5772\dots$ – постоянная Эйлера. Для соответствующих коэффициентов представления

$$K(\zeta) = \frac{a_0}{\zeta} + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} (a_p + b_p \ln \lambda |\zeta|) (\lambda \zeta)^p \quad (3.1)$$

получаем выражения

$$\bar{a}_0 = 3(1 - \nu^2)a_{110} + a_{330} = 2(3 - \nu - 2\nu^2), \quad a_1 = 3(1 - \nu^2)a_{111} +$$

$$+ 2\sqrt{3(1 - \nu^2)} \operatorname{sgn} m a_{131}, \quad b_1 = 2\sqrt{3(1 - \nu^2)} \operatorname{sgn} m b_{131}$$

Учитывая разложение (3.1), находим решение задачи в первом оболочечном приближении

$$[\vartheta_y](t) = -\frac{ml}{D} \Phi(\lambda, t), \quad [v](t) = \frac{3(1 - \nu^2)|m|l}{Bh} \Phi(\lambda, t) \quad (3.2)$$

$$\Phi(\lambda, t) = \frac{4\sqrt{(1 - t^2)}}{a_0} \left\{ 1 - \frac{\lambda^2}{2a_0} \left[a_1 + b_1 \left(\frac{2}{3} + \frac{t^2}{3} + \ln \frac{\lambda}{2} \right) \right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda) \right\}$$

Подставляя результат (3.2) в формулу (2.1), с той же степенью точности находим распределение контактной реакции на сомкнутых краях разреза

$$N_y(t, 0) = \frac{3|m|(1 + \nu)}{2h(3 + 2\nu)} \left\{ 1 + \frac{\lambda^2}{2a_0} \left[A_1 + B_1 \left(\frac{1}{2} + t^2 + \ln \frac{\lambda}{2} \right) \right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda) \right\}$$

$$A_1 = a_{330} a_{111} - \frac{2\nu\sqrt{3(1 - \nu^2)}}{3(1 + \nu)} \operatorname{sgn} m a_{131} - a_{331} \quad (3.3)$$

$$B_1 = -\frac{2\nu\sqrt{3(1 - \nu^2)}}{3(1 + \nu)} \operatorname{sgn} m b_{131}$$

При малых λ неравенство (1.5) не нарушается.

Вычислим значения коэффициентов интенсивности усилий K_1 и моментов K_3 [1] в окрестности концов разреза

$$\begin{aligned}
 K_1 &= -\frac{1}{4}Ba_{110}\sqrt{l}\lim_{t \rightarrow 1}\sqrt{(1-t^2)}[v]'(t) = \frac{3|m|\sqrt{l(1+v)}}{2h(3+2v)}F(\lambda) \\
 K_3 &= \frac{1}{4}Da_{330}\sqrt{l}\lim_{t \rightarrow 1}\sqrt{(1-t^2)}[\vartheta_y]'(t) = \frac{m\sqrt{l(3+v)}}{2(3+2v)}F(\lambda) \\
 F(\lambda) &= 1 - \frac{\lambda^2}{2a_0}\left[a_1 + b_1\left(1 + \ln\frac{\lambda}{2}\right)\right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

При $\lambda = 0$ из формул (3.2)–(3.4) получаем решение задачи для разреза с контактирующими кромками в изгибаемой пластине [7].

Наиболее важным для практики частным значениям параметров β_1, β_2 соответствуют следующие выражения функции $F(\lambda)$:

(a) для псевдосферической оболочки с разрезом вдоль линии кривизны ($\beta_1 = -\beta_2 = \pm 1$)

$$\begin{aligned}
 F(\lambda) &= 1 + \frac{\lambda^2}{3-v-2v^2}\left[\frac{5-v-10v^2}{64}\pi \pm \sqrt{3(1-v^2)}\operatorname{sgn} m\left(\frac{1+11v}{48} + \frac{v}{4}\ln\frac{\gamma_0\sqrt{2}\lambda}{8}\right)\right] + \\
 &+ O(\lambda^4 \ln^2 \lambda)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

(b) для цилиндрической оболочки с разрезом вдоль направляющей ($\beta_1 = 1, \beta_2 = 0$) [16]:

$$F(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{3-v-2v^2}\left[\frac{1+v+2v^2}{64}\pi + \sqrt{3(1-v^2)}\operatorname{sgn} m\left(\frac{1+v}{32} + \frac{1+v}{16}\ln\frac{\gamma_0\lambda}{8}\right)\right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda)$$

(c) для цилиндрической оболочки с разрезом вдоль образующей ($\beta_1 = 0, \beta_2 = 1$):

$$\begin{aligned}
 F(\lambda) &= 1 + \frac{\lambda^2}{3-v-2v^2}\left[\frac{7-v-10v^2}{64}\pi - \sqrt{3(1-v^2)}\operatorname{sgn} m\left(\frac{5+37v}{96} + \frac{1+5v}{16}\ln\frac{\gamma_0\lambda}{8}\right)\right] + \\
 &+ O(\lambda^4 \ln^2 \lambda)
 \end{aligned}$$

(d) для сферической оболочки с меридиональным разрезом ($\beta_1 = \beta_2 = 1$)

$$\begin{aligned}
 F(\lambda) &= 1 + \frac{\lambda^2}{3-v-2v^2}\left[\frac{3-v-6v^2}{32}\pi - \sqrt{3(1-v^2)}\operatorname{sgn} m\left(\frac{1+7v}{32} + \frac{1+3v}{16}\ln\frac{\gamma_0\lambda}{4}\right)\right] + \\
 &+ O(\lambda^4 \ln^2 \lambda)
 \end{aligned}$$

Предельное равновесие изгибаемой оболочки с трещиной оценим на основе энергетического критерия разрушения при комбинированном растяжении и изгибе [2, 17]:

$$G = 2\gamma_*, \quad G = \frac{\pi}{4h^2E}\left[K_1^2 + \frac{3(1+v)}{3+v}\left(\frac{K_3}{h}\right)^2\right] \tag{3.6}$$

где G – поток энергии в вершину трещины, γ_* – плотность эффективной поверхностной энергии материала.

Подставляя в критерий соотношения (3.4), определяем значение нагрузки, приводящей к распространению трещины

$$|m_*| = m^0 \sqrt{\frac{2(3+2\nu)}{3(1+\nu)}} \left\{ 1 + \frac{\lambda^2}{2a_0} \left[a_1 + b_1 \left(1 + \ln \frac{\lambda}{2} \right) \right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda) \right\} \quad (3.7)$$

$$m^0 = \sqrt{8h^4 E \gamma_* / (\pi l)}$$

4. Если в рассмотренной задаче не учитывать контакт берегов разреза, то после подстановки интегральных представлений (2.1) в краевые условия $N_y = 0$, $M_y = -m$, $x \in (-l, l)$ получим систему интегральных уравнений, решением которой будут функции [1]:

$$[\bar{\varphi}](t) = \frac{4ml\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{3(1-\nu^2)}\lambda^2}{Bh} \frac{1}{2a_{330}} \left[a_{131} + b_{131} \left(\frac{2}{3} + \frac{t^2}{3} \ln \frac{\lambda}{2} \right) \right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda) \quad (4.1)$$

$$[\bar{\varphi}_y](t) = \frac{4ml\sqrt{(1-t^2)}}{Da_{330}} \left[1 - \frac{a_{331}}{2a_{330}} \lambda^2 + O(\lambda^4 \ln \lambda) \right]$$

этим скачкам соответствуют коэффициенты интенсивности усилий и моментов

$$\bar{K}_1 = \frac{m\sqrt{l}\sqrt{3(1-\nu^2)}\lambda^2}{h} \frac{1}{2a_{330}} \left[a_{131} + b_{131} \left(1 + \ln \frac{\lambda}{2} \right) \right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda) \quad (4.2)$$

$$\bar{K}_3 = m\sqrt{l} \left[1 - \frac{a_{331}}{2a_{330}} \lambda^2 + O(\lambda^4 \ln \lambda) \right]$$

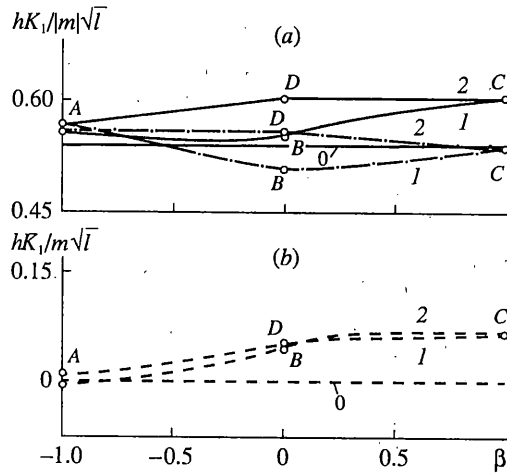
и значение критической нагрузки, вычисляемое с той же точностью по критерию (3.6)

$$|\bar{m}_*| = m^0 \sqrt{\frac{3+\nu}{3(1+\nu)}} \left[1 + \frac{a_{331}}{2a_{330}} \lambda^2 + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda) \right] \quad (4.3)$$

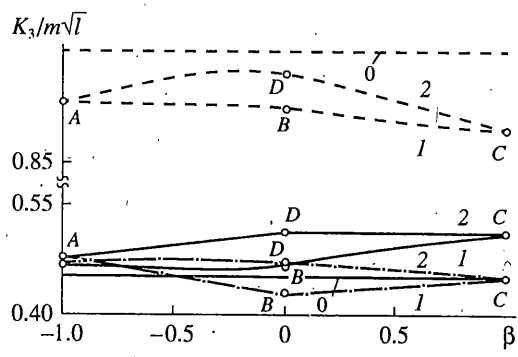
Из формул (4.1) видно, что игнорирование контакта берегов разреза приводит к кинематическому противоречию: $[\bar{\varphi}] < h[|\bar{\varphi}_y|]$.

5. Перейдем к обсуждению полученных результатов. На фиг. 2, 3 показаны графики, характеризующие влияние формы оболочки на величину коэффициентов интенсивности усилий и моментов при $\nu = 0.3$. Аналогичные зависимости для безразмерной критической нагрузки представлены на фиг. 4. Линии 3 соответствуют случаю изгибаемой пластины $\lambda = 0$ [7]. Кривые 1 характеризуют ориентацию трещины в оболочке вдоль линии наибольшей ($\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \beta$), а кривые 2 – вдоль линии наименьшей ($\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = 1$) кривизны при $\lambda = 0.8$. При этом точки A и C соответствуют псевдосферической и сферической оболочке, точки B и D – цилиндрической оболочке соответственно с поперечным и продольным разрезом. Выражения (3.4), (3.7), учитывающие смыкание берегов разреза, представлены сплошными ($m > 0$) и штрихпунктирными ($m < 0$) линиями. Для сравнения штриховыми линиями показаны результаты (4.2), (4.3), получаемые в классической постановке.

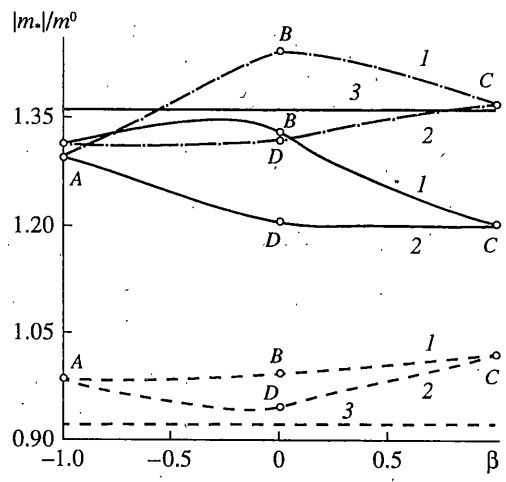
Как видно из представленных графиков, учет контакта берегов разреза приводит к существенному уменьшению коэффициента интенсивности моментов и к появлению немалого коэффициента интенсивности усилий. Если в классической постановке несущая способность изгибаемой оболочки с трещиной всегда выше таковой для пластины, то с учетом смыкания берегов разреза разрушающая нагрузка для оболочки может быть как больше, так и меньше аналогичного значения для пластины. Действительно, поправка на кривизну в формуле (4.3) в первом приближении зависит только от коэффициентов разложения ядра $K_{33}(\zeta)$ и является положительной при



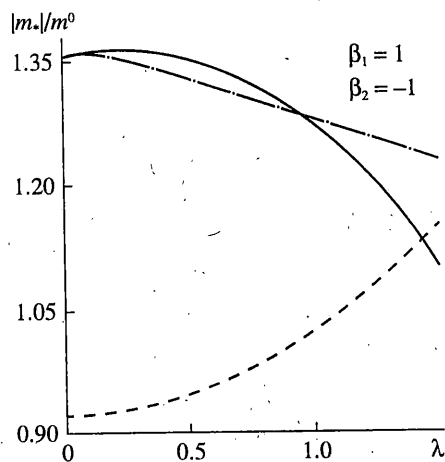
Фиг. 2



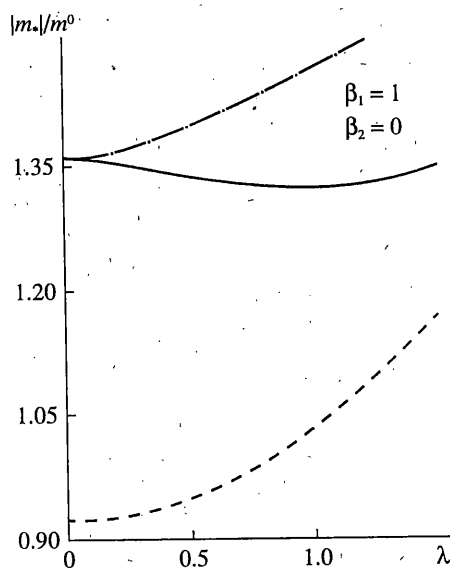
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

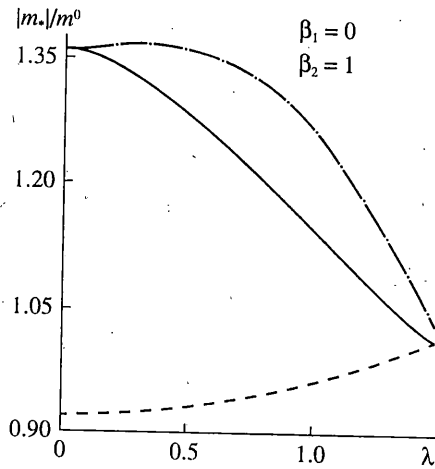


Фиг. 6

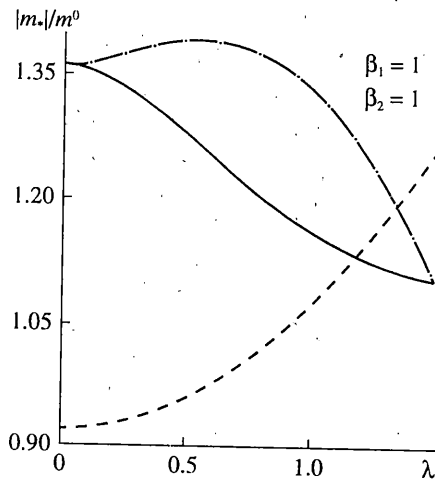
произвольных значениях параметров β_1, β_2 . Множитель $a_1 + b_1(1 + \ln(\lambda/2))$ в выражении (3.7), учитывающем смыкание берегов разреза, определяется коэффициентами разложения всех ядер $K_{jk}(\zeta)$ и, в зависимости от формы оболочки, знака изгибающей нагрузки и величины параметра λ , может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

На фиг. 5–8 представлены более подробные зависимости разрушающей нагрузки от параметра λ , полученные при $\nu = 0.3$ для оболочек простейшей геометрии: псевдосферической (фиг. 5), цилиндрической с поперечным (фиг. 6) и с продольным (фиг. 7) разрезами, сферической (фиг. 8).

Поскольку для псевдосферической оболочки смена ориентации трещины в первом приближении эквивалентна изменению знака нагрузки (см. формулу (3.5)), гра-



Фиг. 7



Фиг. 8

фики, соответствующие случаю ($\beta_1 = -1, \beta_2 = 1$) получаются перестановкой сплошной и штрихпунктирной кривых на фиг. 5.

Отметим, что для разреза с контактирующими кромками в изгибаемой оболочке характерна, вообще говоря, немонотонная зависимость предельной нагрузки от параметра λ . При увеличении кривизны оболочек наблюдается тенденция к сближению кривых, построенных с учетом смыкания берегов разреза, с штриховыми линиями, представляющими классические результаты. Причина этого – ослабление контактного взаимодействия кромок.

Влияние контакта берегов разреза на напряженное состояние и предельное равновесие оболочки при больших значениях параметра λ , равно как и пределы применимости полученных здесь асимптотических результатов, могут быть исследованы на основе численного решения интегрального уравнения (2.4) с использованием метода механических квадратур [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 444 с.
2. *Осадчук В.А.* Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. Киев: Наук. думка, 1985. 224 с.
3. *Осадчук В.А., Подстригач Я.С.* Напряженное состояние и предельное равновесие оболочек с трещинами // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Механика деформир. тверд. тела. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 18. С. 3–52.
4. *Довбня Е.Н.* О корректности постановки симметричных задач механики пологих оболочек с разрезами // Теоретическая и прикладная механика. Харьков: Вища шк., 1988. Вып. 19. С. 98–100.
5. *Jones D.P., Swedlow J.L.* The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate // Intern. J. Fract. 1975. V. 11. № 6. P. 897–914.
6. *Heming F.S.* Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate // Intern. J. Fract. 1980. V. 16. № 4. P. 289–304.
7. *Шацкий И.П.* Изгиб пластины, ослабленной разрезом с контактирующими кромками // Докл. АН УССР. Сер. А. 1988. № 7. С. 51–53.
8. *Шацкий И.П.* О контакте берегов разреза в пластине при комбинированном растяжении и изгибе // Физ.-хим. механика материалов. 1989. Т. 25. № 2. С. 45–50.
9. *Joseph P.F., Erdogan F.* Surface crack problems in plates // Intern. J. Fract. 1989. V. 41. № 2. P. 105–131.
10. *Kwon Y.W.* Finite element analysis of crack closure in plate bending // Comput. and Struct. 1989. V. 32. № 6. P. 1439–1445.
11. *Шацкий И.П.* Взаимодействие коллинеарных разрезов с контактирующими кромками в изгибаемой пластине // Физ.-хим. механика материалов. 1990. Т. 26. № 3. С. 70–75.
12. *Шацкий И.П.* Изгиб пластины, содержащей периодическую систему параллельных разрезов с контактирующими кромками // Прикл. механика. 1991. Т. 27. № 12. С. 56–61.
13. *Шацкий И.П., Перепичка В.В.* Згин напівнескінченної пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 1992. Т. 28. № 2. С. 54–58.
14. *Власов В.З.* Избранные труды. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 528 с.
15. *Хижняк В.К., Шевченко В.П.* Смешанные задачи теории пластин и оболочек. Донецк: Изд-во Донец. ун-та, 1980. 126 с.
16. *Шацкий И.П.* О контакте берегов разреза в изгибаемой цилиндрической оболочке // Тр. 15 Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. Т. 1. С. 98–103.
17. *Винн Р.Г., Смит С.М.* Экспериментальное исследование критерия разрушения при комбинированном растяжении и изгибе // Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. Сер. Д. 1969. № 4. С. 280–288.

Ивано-Франковск

Поступила в редакцию 16.IV.1996