МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1998

УДК 539.3

 А. Л. ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ДВУМЕРНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ХАРАКТЕРА РАБОТЫ КОНСТРУКЦИИ

В [1] выведены частные оценки погрешностей двумерной классической теории оболочек. А именно, получены оценки $\varepsilon^{(p)}$, $\varepsilon^{(m)}$, $\varepsilon^{(p.m)}$ и $\varepsilon^{(b)}$, соответственно, для интегралов частного (part), безмоментного ((membrane), чисто моментного (pure moment) и простого краевого эффекта (boundary).

В публикуемой статье рассматривается вопрос о том, как из этих оценок составляется оценка общей погрешности ε, возникающей при расчете конкретной конструкции, а именно оболочки типа купола с определенным образом закрепленными краями.

Сохраняются все ограничения, принятые в [1], т.е. считается, что речь идет только о линейной статической задаче и что срединная поверхность оболочки может быть совершенно произвольной (конечно, при соблюдении необходимых условий гладкости), но ее кривизна должна быть всюду положительной. Дополнительно считается, что показатель изменяемости γ искомого напряженно-деформированного состояния (НДС) меньше 1/2 т.е. что расчет оболочки может быть выполнен на базе метода расчленения. Под последним подразумевается использование следующей схемы: строится частный интеграл, не учитывающий граничных условий на крае купола; невязки, порождаемые частным интегралом на крае, снимаются при помощи безмоментного НДС и простого краевого эффекта.

Усложняющий аспект поставленного вопроса заключается в том, что относительные асимптотические веса безмоментного НДС и простого краевого эффекта в составе полного НДС могут оказаться совершенно различными при разных входных данных задачи.

Эта характерная особенность работы оболочек, как представляется автору, не нашла достаточно широкого освещения в литературе. Поэтому в статье много места отведено описанию методов качественного анализа НДС оболочки в зависимости от характера закрепления ее краев. Соответствующие приемы достаточно общи, но конкретно применяются лишь для шарнирно опертого и жестко заделанного куполов.

Конечные цели реальных расчетов весьма разнообразны. Интерес могут представлять внутренние или краевые зоны оболочки, ее напряженное состояние или испытываемые ею деформации. В связи с этим, в заключительном разделе статьи показывается, что предлагаемый здесь подход позволяет оценивать погрешности в рамках любой из перечисленных здесь постановок вопроса.

1. Рассмотрим двумерную краевую задачу классической теории тонких оболочек для купола, который имеет всюду положительную гауссову кривизну; ограничен одним замкнутым краем; загружен поверхностной нагрузкой не слишком большой изменяемости (допускающей применение метода расчленения); удовлетворяет на крае однородным граничным условиям, отражающим характер его закрепления.

Таблица

n	T_1	S	N_1	G_1	u_1	u_2	w	γ_1
λ	0	0	4	4	0	0	0	0
μ	2	2	2	2	−2	−2	−2	−2
ν	1	1	1	2	1	1	0	−1
β	0	0	4	4	0	0	0	0

Для конкретности примем, что срединная поверхность отнесена к ортогональной квазигеографической системе координат (α_1, α_2), в которой линии α_1 и α_2 являются аналогами меридианов и параллелей, и что на срединной поверхности купола расположен один (и только один) полюс координатной системы, а край купола совмещен с квазипараллелью $\alpha_1 = 0$.

Принимается, что двумерная краевая задача расчета купола решается методом расчленения, схема которого заключается в следующем.

Пусть K представляет собой символ любой из величин (усилия, момента, перемещения, угла поворота и т.д.) определяющих некоторое НДС оболочки, а под $\chi^\lambda K^{(m)}$, $\chi^\mu K^{(p.m)}$, $\chi^\nu K^{(b)}$ и $\chi^\beta K^{(p)}$ ($\chi = \sqrt{h/l}$; h – полутолщина, l – характерный размер срединной поверхности) подразумеваются соответственно такие же величины, относящиеся к безмоментному НДС (m), чисто моментному НДС ($p.m$), простому краевому эффекту (b) и НДС, составляющему частный интеграл (p).

В методе расчленения считается, что величина K, определяющая искомое решение задается равенством

$$K = \chi^{-a+\lambda}K^{(m)} + \chi^{-b+\mu}K^{(p.m)} + \chi^{-c+\nu}K^{(b)} + \chi^{\beta}K^{(p)} \qquad (1.1)$$

в котором под λ, μ, ν, β подразумеваются целые числа (показатели внутренней асимптотики). Значения λ, μ, ν, β зависят от смысла, придаваемого символу $K^{(\cdot)}$. Они вытекают из общего асимптотического анализа НДС тонкой упругой оболочки и приведены в таблице, в которой использованы результаты и обозначения из [2].

В таблице выписаны только те усилия, моменты, перемещения и углы поворота, которые будут нужны для формулировки граничных условий на квазипараллели $\alpha_1 = 0$, кроме того для упрощения формул здесь и ниже во всех НДС, кроме краевого эффекта, показатель изменяемости считается равным нулю (обобщения не связаны с дополнительными трудностями).

В первых трех строках таблицы приведены числа, относящиеся к решениям однородных линейных дифференциальных уравнений, поэтому помещенные там числа λ, μ, ν определены лишь с точностью до некоторого общего для всей строки слагаемого. Строка β характеризует асимптотические свойства некоторого частного решения неоднородных дифференциальных уравнений. Предполагается, что для этих уравнений частный интеграл построен по безмоментной теории. В соответствии с его асимптотическими свойствами и выписаны числа β (они считаются однозначно определенными).

Конкретные числа, проставленные в таблице, соответствуют некоторой фиксированной асимптотике внешних сил.

Множители χ^{-a}, χ^{-b}, χ^{-c} в формуле (1.1) являются факторами пропорциональности. В них a, b, c – целые пока произвольные числа. Они могут различаться друг от друга, но для всех величин, объединенных единым символом $K^{(\cdot)}$, имеют единое значение. Таким образом, если, например, выбрано $b = 2$, то это значит, что в искомое НДС, задаваемое формулой (1.1), чисто моментное НДС входит с асимптотическим множителем $\chi^{-2} = l/h$. Рассуждения, позволяющие определить a, b, c (весовые показатели) в зависимости от характера закрепления края купола, будут описаны ниже. Пока отметим, что эти значения, конечно, зависят и от того, как именно была устранена упомянутая выше неопределенность значений λ, μ, ν – показателей внутренней асимптотики. Последние в таблице выбирались с таким расчетом, чтобы формулы

$$a = b = c = 0 \tag{1.2}$$

соответствовали асимптотической эквивалентности по напряжениям и перемещениям безмоментного НДС простому краевому эффекту и НДС частного интеграла, а формулы

$$a = c = b - 2 \tag{1.3}$$

соответствовали асимптотической эквивалентности по перемещениям безмоментного НДС и простого краевого эффекта с одной стороны и чисто моментного НДС – с другой.

2. Величины $K^{(\cdot)}$ строятся следующим образом. Запишем однородные уравнения полной (моментной) теории оболочек, предполагая, что срединная поверхность отнесена к линиям кривизны (на последующие рассуждения это предположение не влияет).

Силовые уравнения равновесия

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}(A_jT_i) - \frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}S - \frac{\partial}{\partial\alpha_j}(A_iS) - \frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}T_j = A_iA_j\frac{N_i}{R_i}\\ \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = -\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2N_1) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1N_2)\right]\end{gathered} \tag{2.1}$$

Силовые уравнения состояния

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2Eh}(T_i - \nu T_j), \quad \omega = \frac{1+\nu}{Eh}S \tag{2.2}$$

Формулы перемещения – тангенциальные деформации

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j - \frac{w}{R_i} = \varepsilon_i \quad \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{u_1}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right) = \omega \tag{2.3}$$

Формулы углы поворота – перемещения

$$\begin{gathered}\gamma_i = -\left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_j} + \frac{u_i}{R_i}\right), \quad \omega_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i\\ \delta = \frac{1}{2}\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1u_1) - \frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2u_2)\right]\end{gathered} \tag{2.4}$$

Формулы изгибные деформации – углы поворота

$$\kappa_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial\gamma_i}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\gamma_j \quad \tau = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial\gamma_j}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\gamma_i + \frac{\omega_j}{2R_i} \tag{2.5}$$

Моментные уравнения состояния

$$G_i = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(\kappa_i + \nu\kappa_j), \quad H = \frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}\tau \tag{2.6}$$

Моментные уравнения равновесия

$$A_iA_jN_i = \frac{\partial}{\partial\alpha_i}(A_jG_i) - \frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}H - \frac{\partial}{\partial\alpha_j}(A_iH) - \frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}G_j \tag{2.7}$$

Здесь всюду использованы обозначения из [2]. Считается для простоты, что $-S_{12} = S_{21} = S$, $-H_{12} = H_{21} = H$, и принимается, что $i \neq j = 1, 2$.

Под безмоментным ($K^{(m)}$) подразумевается такое НДС, в котором тангенциальные усилия $T_1^{(m)}$, $S^{(m)}$, $T_2^{(m)}$ определяются в исходном приближении силовыми уравнениями равновесия (2.1), взятыми при $N_1 = N_2 \equiv 0$. Дальнейшее построение величин $K^{(m)}$ выполняется по следующей схеме. Из силовых уравнений состояния (2.2) находятся $\varepsilon_1^{(m)}$, $\omega^{(m)}$, $\varepsilon_2^{(m)}$; из формул перемещения – тангенциальные деформации (2.3) находятся $u_1^{(m)}$, $u_2^{(m)}$, $w^{(m)}$. Далее очевидным образом последовательно строятся ($\gamma_1^{(m)}$, $\gamma_2^{(m)}$, $\omega_1^{(m)}$, $\omega_2^{(m)}$, $\delta^{(m)}$), ($\kappa_1^{(m)}$, $\tau^{(m)}$, $\kappa_2^{(m)}$), ($G_1^{(m)}$, $H^{(m)}$, $G_2^{(m)}$), ($N_1^{(m)}$, $N_2^{(m)}$). Здесь и всюду в дальнейшем считается, что слагаемые, перенесенные в правую часть равенства, уже известны в результате выполнения предыдущих этапов описываемой процедуры. Она заканчивается в данном случае определением из моментных уравнений равновесия перерезывающих усилий N_1, N_2, считавшихся ранее равными нулю. Это значит, что определенное таким образом безмоментное НДС можно рассматривать, как исходное приближение некоторого итерационного процесса.

Подобным же образом определяется чисто моментное НДС, т.е. величины $K^{(p.m)}$. В этом случае перемещения ($u_1^{(p.m)}$, $u_2^{(p.m)}$, $w^{(p.m)}$) определяются решением замкнутой системы, получаемой из формул перемещения – тангенциальные деформации при $\varepsilon_1^{(p.m)} = \omega^{(p.m)} = \varepsilon_2^{(p.m)} \equiv 0$. Считая заданными эти перемещения, можно определить и остальные компоненты $K^{(p.m)}$, вводя в рассмотрение соотношения, следующие за формулами перемещения – тангенциальные деформации в принятом здесь порядке. После того как будут описанным образом определены соответствующие величины, включая $N_1^{(p.m)}$, $N_2^{(p.m)}$, надо последовательно вводить в рассмотрение силовые уравнения равновесия и силовые уравнения состояния и с их помощью закончить построение всех величин $K^{(p.m)}$. В их числе будут определены и $\varepsilon_1^{(p.m)}$, $\omega^{(p.m)}$, $\varepsilon_2^{(p.m)}$, ранее приравненные нулю. Это значит, что и $K^{(p.m)}$ также составляет исходное приближение некоторого итерационного процесса.

Отметим, что процедуры построения $K^{(m)}$ и $K^{(p.m)}$ предусматривают выполнение не только прямых действий, но и интегрирование дифференциальных уравнений. Для построения каждой из совокупности величин $K^{(m)}$ и $K^{(p.m)}$ надо дважды обращаться к одной и той же паре систем дифференциальных уравнений (к силовым уравнениям равновесия и к формулам перемещения – тангенциальные деформации). В связи с этим условимся, что при построении $K^{(m)}$ будут сохраняться лишь произволы интегрирования силовых уравнений равновесия (2.1), а при построении $K^{(p.m)}$ – лишь произволы интегрирования, связанные с формулами перемещения – тангенциальные деформации (2.3). Это значит, что, например, под величинами $u_1^{(m)}$, $u_2^{(m)}$, $w^{(m)}$ надо подразумевать некоторым образом доопределенный частный интеграл системы уравнений (2.3).

Силовые уравнения равновесия (2.1), взятые при $N_1 = N_2 \equiv 0$, называются статическими уравнениями безмоментной теории, а формулы перемещения – тангенциальные деформации (2.3), рассматриваемые как уравнения, определяющие u_1, u_2, w при известных ε_1, ω, ε_2 – геометрическими уравнениями безмоментной теории. И те и другие представляют собой замкнутые системы соответственно относительно тангенциальных усилий (T_1, S, T_2) и относительно компонентов перемещения (u_1, u_2, w). Для купола (при $R_1R_2 > 0$) обе системы – эллиптические. Геометрические уравнения безмоментной теории имеют очевидный смысл: в однородном случае, т.е. при $\varepsilon_1 = \omega = \varepsilon_2 \equiv 0$, они представляют собой дифференциальные уравнения бесконечно малых изгибаний.

Краевая задача интегрирования статических уравнений безмоментной теории при заданном в каждой точке края $\alpha_1 = 0$ тангенциальном усилии p называется статической задачей безмоментной теории.

Аналогично, в геометрической задаче безмоментной теории в каждой точке края считается заданным тангенциальное перемещение q.

Показано, что если направления тангенциального усилия p и тангенциального перемещения q взаимно ортогональны в каждой точке края, то статическая и геометрическая задачи безмоментной теории являются взаимно сопряженными и подчиняются (при $R_1R_2 > 0$) известным альтернативным теоремам [2].

Для построения величин $K^{(b)}$ существует известная приближенная теория простого краевого эффекта. В ней используется совершенно элементарный математический аппарат, который здесь напоминать не будем. Строки λ, μ в таблице заполнены на основании описанных здесь процедур построения $K^{(m)}$ и $K^{(p.m)}$. Строка ν заполнена на основании результатов, изложенных в [2].

Теоремы существования решений краевых задач, связанных с теорией простого краевого эффекта, предельно элементарны. Они будут формулироваться ниже без пояснений по мере необходимости.

3. Обратимся к куполам, на краях $\alpha_1 = 0$ которых выставлены определенные граничные условия, и начнем со случая жесткой заделки, когда при помощи (1.1) и с учетом таблицы (п. 1) граничные соотношения при $\alpha_1 = 0$ можно представить в виде (обозначения заимствованы из [2]):

$$\begin{aligned}
&\chi^{-a}u_1^{(m)} + \chi^{-b-2}u_1^{(p.m)} + \chi^{-c+1}u_1^{(b)} = -\chi^0 u_1^{(p)}\\
&\chi^{-a}u_2^{(m)} + \chi^{-b-2}u_2^{(p.m)} + \chi^{-c+1}u_2^{(b)} = -\chi^0 u_2^{(p)},\\
&\chi^{-a}w^{(m)} + \chi^{-b-2}w^{(p.m)} + \chi^{-c}w^{(b)} = -\chi^0 w^{(p)}\\
&\chi^{-a}\gamma_1^{(m)} + \chi^{-b-2}\gamma_1^{(p.m)} + \chi^{-c-1}\gamma_1^{(b)} = -\chi^0 \gamma_1^{(p)}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Метод определения весовых показателей a, b, c здесь и ниже заключается в том, что надо найти непротиворечивые значения этих чисел, а именно, такие значения, при которых в каждом, отдельно взятом, граничном равенстве вида (3.1) можно оставить только слагаемые с наименьшей степенью малого параметра χ, не приходя при этом к противоречию, т.е. к неразрешимым краевым задачам или к задачам, имеющим только тривиальное (нулевое) решение (последнее недопустимо в рассуждениях асимптотического характера).

Замечание. Прием введения неопределенных асимптотических множителей в теории оболочек применялся неоднократно. В сущности он адекватен методу многих масштабов в теории асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений.

Для рассматриваемой задачи непротиворечивые значения a, b, c задаются формулами

$$a = 0, \quad b = -2, \quad c = 0 \tag{3.2}$$

Им соответствуют такие предельные ($\chi \longrightarrow 0$) граничные условия:

$$\begin{aligned}
&u_1^{(m)} + u_1^{(p.m)} = -u_1^{(p)}, \quad u_2^{(m)} + u_2^{(p.m)} = -u_2^{(p)},\\
&w^{(b)} = -w^{(m)} - w^{(p.m)} - w^{(p)}, \quad \gamma_1^{(b)} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_1 = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Их непротиворечивость вытекает из следующих соображений. Первые два граничные соотношения (3.3) вместе с уравнениями (2.1)–(2.3), взятыми при $N_1 = N_2 \equiv 0$, определяют полную (предусматривающую построение как усилий так и перемещений) задачу безмоментной теории. При ее решении, кроме выполнения прямых действий надо интегрировать статические и геометрические безмоментные уравнения (п. 2). Каждая из этих систем для купола (при $R_1R_2 > 0$) эквивалента эллиптическому уравнению второго порядка. Это значит, что в данном случае число граничных условий и тип уравнений находятся в соответствии с постановкой задачи и можно показать, что эта задача имеет решение (единственное), которое определит в формуле (1.1) слагаемые $K^{(m)}$ и $K^{(p.m)}$. Будем считать, что существует и слагаемое $K^{(p)}$. Под ним можно, например, подразумевать НДС оболочки, имеющей форму полного овалоида, частью которого является рассматриваемый купол (конечно, при этом надо считать, что внешняя нагрузка продолжена на весь овалоид с соблюдением самоуравновешенности). Для построения $K^{(b)}$, останутся два последних граничных равенства (3.3). Величины $K^{(b)}$ должны экспоненциально затухать при удалении от опорного контура. Поэтому соответствующее НДС в рамках приближенной теории простого краевого эффекта зависит от двух произвольных функций f_1, f_2. Эта зависимость настолько проста, что здесь и ниже будет приниматься без пояснений, что f_1, f_2 в величинах $K^{(b)}$ можно определить (однозначно), если среди предельных граничных условий содержатся ровно два равенства, относящихся к $K^{(b)}$, и по крайней мере одно из них неоднородно. Видно, что все эти требования в данном случае выполняются. Следовательно, непротиворечивость принятых значений весовых показателей a, b, c проверена. В данном случае эта комбинация является единственной (на доказательстве не останавливаемся; оно несложно, но требует перебора многих вариантов).

Формулы (1.2), (1.3), (3.2) позволяют сделать следующие выводы.

1. Вдали от края полное НДС жестко заделанного купола является безмоментным, а его перемещения складываются из асимптотически соизмеримых безмоментного и чисто моментного слагаемых (геометрический смысл чисто моментных слагаемых в однородном случае заключается в том, что они приближенно соответствуют бесконечно малым изгибаниям срединной поверхности или, в частности, ее жесткому смещению).

2. На жестко заделанном контуре краевой эффект купола дает поправку к полному НДС, асимптотически соизмеримую безмоментному НДС как по напряжениям, так и по перемещениям.

3. Для расчета жестко заделанного купола вдали от края безмоментная теория безусловно применима (последний термин будет полезен для дальнейшего изложения; он означает, что исходное асимптотическое приближение внутреннего НДС можно строить по безмоментной теории, не вводя в рассуждение уравнения, описывающие простой краевой эффект).

4. Обратимся к шарнирно опертому куполу, т.е. будем рассматривать граничные условия

$$T_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad w = 0, \quad G_1 = 0 \quad (\alpha_1 = 0) \tag{4.1}$$

Они в развернутом виде, согласно формуле (1.1) и таблице (п. 1), записываются так

$$\begin{gathered}
\chi^{-a}T_1^{(m)} + \chi^{-b+2}T_1^{(p.m)} + \chi^{-c+1}T_1^{(b)} = -\chi^0 T_1^{(p)} \\
\chi^{-a}u_2^{(m)} + \chi^{-b-2}u_2^{(p.m)} + \chi^{-c+1}u_2^{(b)} = -\chi^0 u_2^{(p)} \\
\chi^{-a}w^{(m)} + \chi^{-b-2}w^{(p.m)} + \chi^{-c}w^{(b)} = -\chi^0 w^{(p)} \\
\chi^{-a+4}G_1^{(m)} + \chi^{-b+2}G_1^{(p.m)} + \chi^{-c+2}G_1^{(b)} = -\chi^4 G_1^{(p)}
\end{gathered}$$

Для этого случая можно указать два варианта непротиворечивых значений весовых показателей.

Вариант I

$$a = 0, \quad b = -1, \quad c = 1 \tag{4.2}$$

Ему соответствуют предельные граничные условия

$$u_2^{(p.m)} = 0 \tag{4.3}$$

$$w^{(b)} = -w^{(p.m)}, \quad G_1^{(b)} = 0 \tag{4.4}$$

$$T_1^{(m)} = -T_1^{(b)} - T_1^{(p)} \tag{4.5}$$

Вариант II

$$a = 0, \quad b = -2, \quad c = 0 \tag{4.6}$$

Этому варианту соответствуют предельные граничные условия

$$T_1^{(m)} = -T_1^{(p)} - \chi T_1^{(b)}, \quad u_2^{(p.m)} = -u_2^{(p)} - u_2^{(m)} \tag{4.7}$$

$$w^{(b)} = -w^{(m)} - w^{(p.m)} - w^{(p)}, \quad G_1^{(b)} = 0 \tag{4.8}$$

Считается, что недопустимо обращение в тождественный нуль исходного приближения каждой из совокупности величин $K^{(\cdot)}$. Поэтому необходимым условием непротиворечивости значений (4.2) является требование, чтобы однородная геометрическая задача безмоментной теории (п. 2) имела нетривиальное решение при первом граничном условии (4.3). Это значить, что должны существовать изгибания срединной поверхности купола (или ее жесткие смещения), согласованные с тангенциальным закреплением, выраженным вторым равенством (4.1). Такие изгибания назовем тангенциально возможными, так как при решении вопроса об их существовании не учитывается нетангенциальное закрепление, выраженное третьим равенством (4.1).

Шарнирно опертый купол такому требованию удовлетворяет. Число его тангенциально возможных линейно независимых изгибаний, удовлетворяющих первому условию (4.3), равно трем. Это вытекает из следующих соображений.

Когда речь идет об осесимметричном куполе вращения, обсуждаемые изгибания обнаруживаются элементарно. Они в этом случае вырождаются в жесткие смещения (поступательное смещение в направлении оси симметрии и два вращения вокруг осей, лежащих в плоскости опорной параллели). Этот результат допускает широкие обобщения, основанные на свойствах так называемых задач с индексом. В [3] показано, что применительно к геометрической задаче безмоментной теории с условием вида (4.3) обобщение заключается в том, что число ее решений остается всегда одинаковым (но, конечно, они не обязательно вырождаются в жесткие смещения). Достаточно требовать, чтобы кривизна срединной поверхности была положительной и чтобы направление нулевого краевого смещения всюду совпадало с направлением края.

Замечание. Из (4.1) видно, что край купола закреплен в каждой точке края $\alpha_1 = 0$ не только в тангенциальном направлении, но и в направлении нормали. Поэтому абсолютно возможных изгибаний (согласованных не только с тангенциальными, но и с нетангенциальными закреплениями) шарнирная опора, вообще говоря, не допускает. Об этом для осесимметричного купола вращения свидетельствуют элементарные кинематические соображения: такой купол, вообще говоря, не имеет жестких смещений, согласованных с условиями $u_2 = w = 0$, а исключением является лишь случай, когда срединная поверхность купола касается кругового цилиндра вдоль линии $\alpha_1 = 0$, как например, у полусферического купола, и становится возможным жесткое смещение вдоль оси цилиндра.

Непротиворечивость формул (4.2) для весовых показателей подтверждается следующей расчетной схемой для предельных граничных условий (4.3)–(4.5).

Геометрическая задача безмоментной теории с учетом граничного условия (4.3) по предположению имеет решение, выражающееся формулой вида

$$K^{(p.m)} = \sum_{i=1}^{3} C_i K_i^{(p.m)} \tag{4.9}$$

в которой C_i – неопределенные константы (этим решением задаются упомянутые выше три линейно независимые тангенциально возможные изгибания).

Далее строятся (элементарно) величины $K^{(b)}$ с учетом граничных условий (4.4). Они выражаются так

$$K^{(b)} = \sum_{i=1}^{3} C_i K_i^{(b)} \tag{4.10}$$

Для построения $K^{(m)}$ нужно решать статическую задачу безмоментной теории при граничном условии (4.5). Она сопряжена с геометрической задачей и, следовательно в данном случае имеет решение лишь при выполнении трех интегральных условий (требований обращения в нуль работы сил $T_1^{(b)} + T_1^{(p)}$ на перемещениях всех тангенциально возможных изгибаний). Из них определяются константы C_i, содержащиеся в $K^{(b)}$.

Построение исходного приближения завершается определением (единственным образом) величин $K^{(m)}$ ценой решения статической задачи безмоментной теории с учетом (4.5).

Для описанной расчетной схемы особым является только тот случай, когда $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Отсюда согласно (4.9), (4.10) будет следовать, что $K^{(p.m)} = K^{(b)} \equiv 0$, а это означает, что в формулах (4.2) значения весовых показателей были завышены. Естественно предположить, что в данном случае следует принять вариант II. Это ниже подтверждается.

Сравним асимптотики решений задач о куполах с шарнирно и жестко закрепленными краями. Из (3.2) и (4.2) вытекает, что при переходе от жесткой заделки к шарнирной опоре весовые показатели b, c увеличиваются на единицу, в то время как показатель a остается неизменным. Отсюда при учете (1.2), (1.3) заключаем, что вдали от опорного контура $\alpha_1 = \theta$ оба купола безмоментны, хотя относительный асимптотический вес моментных напряжений в шарнирно опертом куполе возрастает примерно в $\chi^{-1} = (l/h)^{1/2}$ раз.

Асимптотически наибольшие напряжения в шарнирно опертом куполе обусловлены простым краевым эффектом и в $1/\chi$ раз превышают и асимптотически наибольшие напряжения жестко заделанного купола (в последнем безмоментное НДС и краевой эффект по напряжениям асимптотически эквивалентны).

Деформативность шарнирно опертого купола всюду в $1/\chi$ раз превышает деформативность жестко заделанного купола. Перемещения первого из них в исходном приближении определяют тангенциально возможные изгибания срединной поверхности (вернее, те из этих изгибаний, на перемещениях которых внешние силы совершают не нулевую работу).

Важная особенность шарнирно опертого купола заключается в том, что для его расчета безмоментная теория применима лишь условно. Под этим подразумевается тот факт, что, как следует из расчетной схемы варианта I, построение величин $K^{(m)}$ и $K^{(p.m)}$, вообще говоря, невозможно без привлечения в рассмотрение теории простого краевого эффекта. Исключение из этого правила представляет случай, когда в расчетной схеме варианта I $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, и надо использовать вариант II.

Физические причины описанных особенностей НДС шарнирно оперного купола заключаются в том, что его безмоментная расчетная схема сходна со схемой геометрически изменяемой стержневой системы. Выделенный в самостоятельное рассмотрение безмоментный шарнирно опертый купол может существовать только тогда, когда реализуется оговоренный выше особый случай. В общем случае расчет шарнирно опертого купола по общей (моментной) теории может быть осуществлен лишь потому, что у края купола возникает простой краевой эффект. Его относительный асимптотический вес в силу этого и возрастает (купол "держится" на краевом эффекте).

5. Назовем расчетную схему шарнирно опертого купола геометрически изменяемой, а если внешняя нагрузка, действующая на купол, удовлетворяет условию разрешимости статической задачи безмоментной теории, т.е. при $K^{(b)} \equiv 0$, то о соответствующей расчетной схеме будем говорить как о равновесной геометрически изменяемой. В последнем случае надо для a, b, c принять формулы (4.6) и соответствующие им предельные граничные условия (4.7), (4.8) варианта II. Из них вытекает описываемая ниже расчетная схема.

В первом граничном условии (4.7) пока отбрасывается (как асимптотически второстепенное) второе слагаемое правой части и получается статическая задача безмоментной теории. Она по предположению имеет решение (единственное), которое определяет величины $K^{(m)}$.

Для построения $K^{(p.m)}$ получается геометрическая задача безмоментной теории с граничным условием, выражаемым вторым равенством (4.7). Она сопряжена со статической задачей, имеющей в общем случае решение лишь при выполнении трех интегральных условий. Отсюда следует, что для величины $K^{(p.m)}$ можно построить решение вида

$$K^{(p.m)} = K_*^{(p.m)} + \sum_{i=1}^{3} C_i K_i^{(p.m)} \tag{5.1}$$

где C_i – произвольные константы.

Исходное приближение решения построено. Оно определено лишь с точностью до трех констант C_i и для завершения цикла надо вернуться к первому граничному условию (4.7), восстановив в нем отброшенное слагаемое $\chi T_1^{(b)}$. Получится статическая задача безмоментной теории, имеющая решение лишь при выполнении трех интегральных условий. Из них и определяются константы C_i. Непротиворечивость формул (4.6) проверена. Рассмотренный в этом разделе купол можно назвать оболочкой с геометрически изменяемой равновесной расчетной схемой. Для него весовые показатели a, b, c принимают такие же значения, как и для жестко заделанного купола. Это значит, что асимптотические свойства НДС обоих куполов одинаковы, но равновесный геометрически изменяемый купол имеет важную для дальнейших рассуждений особенность. Для него безмоментный расчет не является безусловно применим. Не выходя за рамки безмоментной теории, можно решить лишь статическую задачу, т.е. определить асимптотически главную часть напряжений вдали от края. При построении в той же области асимптотически главных частей перемещений равновесного геометрически изменяемого купола нельзя обойтись без учета уравнений краевого эффекта, так как иначе константы C_i в формуле (5.1) для величин $K^{(p.m)}$ останутся неопределенными, а чисто моментное НДС при обсуждаемых значениях a, b, c асимптотически соизмеримо по перемещениям с безмоментным НДС.

Если интерес представляет не только внутренняя, но и краевая зона шарнирно опертого купола, то, конечно, необходимо строить величины $K^{(b)}$, так как на крае их вклад соизмерим с вкладом $K^{(m)}$ как по напряжениям, так и по перемещениям.

6. В [1] построены асимптотические оценки погрешностей, даваемых классической двумерной теорией оболочек, при построении каждого отдельно взятого слагаемого в формуле (1.1). Запишем эти оценки следующим образом

$$\begin{gathered} K^{(p)} \longrightarrow \varepsilon^{(p)} = O(\eta^{4-6\gamma}) \quad (K^{(m)}, K^{(p.m)}) \longrightarrow \varepsilon^{(m)} = O(\eta^{2-3\gamma}) \\ K^{(b)} \longrightarrow \varepsilon^{(b)} = O(\eta) \quad (\eta = \chi^2 = h/l) \end{gathered} \tag{6.1}$$

и покажем на конкретных примерах, как из них можно выводить оценки погрешностей классической теории при расчете различным образом закрепленных куполов.

В (6.1) под γ подразумевается показатель изменяемости искомого НДС. Ограничим его значения неравенством $\gamma < 1/2$, учитывая, что расчет купола по предположению производится методом расчленения (п. 1).

В простейшем случая, когда купол не имеет краев, т.е. когда его срединная поверхность составляет полный овалоид, поставленный вопрос решает первая из оценок (6.1).

Она свидетельствует о возможности достижения в рамках классической теории оболочек значительно более высокой точности, нежели это можно ожидать, опираясь на энергетическую оценку Койтера [4]

$$\varepsilon' = O(\eta') \tag{6.2}$$

С ней здесь будут постоянно сравниваться получаемые оценки.

Перейдем к защемленному куполу. Пусть цель расчета такого купола заключается в определении асимптотически главных внутренних (возникающих в достаточном удалении от линий искажения) напряжений и перемещений, а краевые упругие явления не представляют интереса. Тогда оценка погрешностей будет иметь вид

$$\varepsilon'' = O(\eta^{2-3\gamma}) \tag{6.3}$$

Она вытекает из того, что для поставленной задачи безусловно применима безмоментная теория (п. 3). Это значить, что в исходном приближении искомые величины можно построить без использования уравнений теории простого краевого эффекта и погрешности последних не повлияют на результат обсуждаемого расчета.

Полученная оценка при $\gamma < 1/3$ более благоприятна, чем можно было бы ожидать на основании соотношения (6.2), но делается менее благоприятной при $1/3 < \gamma < 1/2$.

На крае в формуле (1.1) к $K^{(m)}$ и $K^{(p.m)}$ надо присоединить слагаемое $K^{(b)}$. Его вклады, как в напряжения, так и в перемещения, асимптотически соизмеримы со вкладами $K^{(m)}$, $K^{(p.m)}$. Соответственно, погрешности $K^{(b)}$ должны быть присоединены к погрешностям $K^{(m)}$, $K^{(p.m)}$ и искомая оценка составится как объединение оценок (6.2), (6.3), т.е.

$$\varepsilon''' = O(\eta^{1} + \eta^{2-3\gamma}) \tag{6.4}$$

Если речь идет о такой геометрически изменяемой оболочки как шарнирно опертый купол, то при оценке погрешностей надо различать равновесную и неравновесную конструкции. В последнем случае для весовых показателей a, b, c надо принять формулы (4.2) варианта I. При этом для расчета любых характеристик НДС купола (внутренних или краевых, напряжений или перемещений) безмоментная теория не будет безусловно применимой (п. 3). Эти характеристики всегда можно строить лишь с использованием уравнений простого краевого эффекта. Соответственно, всегда будет справедлива оценка (6.2).

Если шарнирно опертый купол является равновесным (п. 5), то для весовых показателей a, b, c станут справедливы равенства (6.4) варианта II. Это значит, что формально асимптотические свойства НДС купола станут такими же, как в случае жесткой заделки. Однако в расчетной схеме (п. 5) для равновесного случая появляется своя специфика: безмоментная теория останется безусловно применимой лишь при построении внутренних напряжений, но для внутренних перемещений, согласно схеме (п. 5), нельзя обойтись без использования уравнений простого краевого эффекта. Соответственно, погрешности построения асимптотически главных перемещений определятся формулой (6.4).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (96-01-01098) и гранта поддержки ведущих научных школ (96-15-96037).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольденвейзер А.Л.* Об оценках погрешностей классической теории тонких упругих оболочек // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 4. С. 145–158.
2. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек // М.: Наука, 1976. 512 с.
3. *Гольденвейзер А.Л.* О применении решений задачи Римана–Гильберта к расчету безмоментных оболочек // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 2. С. 149–166.
4. *Koiter W.T.* A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells // Proc. symp. Theory of Thin Elastic Shells. Delft, 1959. Ahmsterdam: North-Holland, 1960. P. 12–33.

Москва

Поступила в редакцию 19.IX.1997