МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1998

УДК 539.3

© 1998 г. А. С. ГРИШИН, А. Р. ЛОШИЦКИЙ

ЭНЕРГИЯ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Исследуются плоские волны в анизотропных средах. Показано, что для сред с кристаллической структурой, тензор упругости которых строго эллиптичен, волна с наибольшей энергией распространения является продольной.

1. Введение. Уравнение для определения скоростей распространения упругих волн в кристаллах с произвольной анизотропией получено в [1]. В дальнейшем будут рассматриваться плоские волны.

В 60-х годах в [2] было описано поведение продольных и поперечных волн в аналитическом плане с обобщением работ [1]. Далее основной упор в исследованиях этой области был сделан на изучение распространения волн на границе различных сред. Особое внимание уделялось изучению волн Релея, возникающих на границе твердого тела и газа, волн Лэмба, возникающих на границе двух упругих сред.

В дальнейшем в работе предполагается, что среда является линейно-упругой, в процессе распространения ударных волн не происходит диссипации энергии.

Современная концепция изучения распространения плоских упругих волн в анизотропных средах строится на разложении потока энергии по направлениям, ортогональным друг к другу, вдоль которых необходимо определить максимальные потоки энергии.

Для анизотропных упругих сред с симметричным и строго эллиптичным тензором упругости известно [1, 2], что существуют определенные направления, по которым происходит распространение продольных и поперечных волн.

2. Основные операторы. Рассмотрим однородную анизотропную упругую среду, уравнение распространения упругих волн в которой имеет вид

$$-\operatorname{div}\overset{4}{\mathbf{C}} \cdot\cdot \nabla\mathbf{u} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \quad \text{или} \quad A(\partial_x)\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = 0 \tag{2.1}$$

где $\overset{4}{\mathbf{C}}$ – четырехвалентный тензор упругости, $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, ρ – плотность среды.

Предполагается, что в среде распространяются плоские прогрессирующие волны вида [3]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m}\psi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct) \tag{2.2}$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – перемещения частиц на фронте ударной волны, $\mathbf{m}$ – вектор единичной длины, называемый амплитудой плоской волны и характеризующий направление смещения частиц на этой волне ($\mathbf{m} \in \mathbf{R}^3$), $\mathbf{n}$ – вектор единичной длины нормальный к фронту волны и показывающий ее распространение ($\mathbf{n} \in \mathbf{R}^3$), c – скорость распространения волны, ψ – любая функция, удовлетворяющая требованиям: $\psi \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R})$, $\psi'' \neq 0$.

Для дальнейшего потребуется символ дифференциального оператора уравнений равновесия. Преобразуем по Фурье дифференциальный оператор уравнений равновесия Ляме (2.1), тогда получим следующее выражение для символа A^V:

$$A^V(\mathbf{x}) = (2\pi)^2\mathbf{x}\cdot\overset{4}{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{x} \tag{2.3}$$

Подставляя выражение (2.2) в (2.1), получим

$$A(\partial_x)\mathbf{u} = -\mathbf{C}_{ijpq}\cdot\mathbf{u}_{p,q,j} = \mathbf{n}\cdot\overset{4}{\mathbf{C}}\cdot\cdot\,\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}\cdot\psi_S'' = \mathbf{C}_{ijpq}\cdot\mathbf{m}_p\cdot\mathbf{n}_q\cdot\mathbf{n}_j\cdot\psi_S'' = \mathbf{m}\cdot c^2\cdot\psi_S'' \tag{2.4}$$

$$\nabla\mathbf{u} = \mathbf{m}\cdot\frac{d\psi}{dS}\nabla S = \mathbf{m}\otimes\mathbf{n}\cdot\psi_S', \quad \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{m}\psi_S''\frac{dS}{dt}\frac{dS}{dt} = \mathbf{m}c^2\psi_S''$$

Сократим (2.4) на ψ_S'', так как последняя величина не равна нулю, получим уравнение распространения упругих волн в анизотропных средах

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{m} = \rho c^2\mathbf{m} \tag{2.5}$$

С учетом формулы (2.3), выражение (2.5) может быть переписано иначе

$$\frac{1}{(2\pi)^2}A^V(\mathbf{n})\cdot\mathbf{m} = \rho c^2\mathbf{m} \tag{2.6}$$

Из (2.6) нетрудно получить формулу для скоростей распространения волн. Умножим обе части равенства (2.6) на вектор $\mathbf{m}$ слева, получим (с учетом того, что $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$):

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\mathbf{m}\cdot A^V(\mathbf{n})\cdot\mathbf{m} = \rho c^2\mathbf{m}\cdot\mathbf{m};\Rightarrow c = \sqrt{\frac{\mathbf{m}\cdot A^V(\mathbf{n})\cdot\mathbf{m}}{(2\pi)^2\rho}} \tag{2.7}$$

3. Энергия упругой волны. Выражение для энергии записывается как полная свертка тензора деформаций и тензора напряжений

$$W = \frac{1}{2}\overset{2}{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\cdot\,\overset{2}{\boldsymbol{\sigma}} \tag{3.1}$$

Из обобщенного закона Гука имеем

$$\overset{2}{\boldsymbol{\sigma}} = \overset{4}{\mathbf{C}}\cdot\cdot\,\overset{2}{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{3.2}$$

С учетом (3.2) выражение (3.1) может быть записано следующим образом

$$W = \frac{1}{2}\overset{2}{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\cdot\,\overset{4}{\mathbf{C}}\cdot\cdot\,\overset{2}{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{3.3}$$

Из соотношений Коши можно записать

$$\overset{2}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T) \tag{3.4}$$

С учетом (2.2) выражение (3.4) будет иметь вид

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{sym}(\mathbf{m}\otimes\mathbf{n})\cdot\psi' \tag{3.5}$$

Подставляя (3.5) в (3.3) получим

$$W = \frac{1}{2}(\mathbf{m}\otimes\mathbf{n})\cdot\cdot\,\overset{4}{\mathbf{C}}\cdot\cdot\,(\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}) \tag{3.6}$$

Таблица

Наименование материала	C_{1111}	C_{1122}	C_{1133}	C_{2222}	C_{2233}	C_{3333}	C_{1212}	C_{2323}	C_{1313}	E_{max}	E_{min}	γ_{max}	γ_{min}
Гексагональные кристаллы													
Mg	5.970	2.690	2.170	5.970	2.170	6.170	1.680	1.640	1.640	5.747	1.173	0.020	90.000
SiO_2	11.660	4.448	3.280	11.660	3.280	11.040	4.995	3.606	3.606	6.167	1.803	0.079	89.998
H_2O (кристал.)	1.384	0.746	0.581	1.384	0.581	1.499	0.339	0.319	0.319	0.750	0.160	0.000	90.000
Co	30.700	15.640	10.300	30.700	10.300	35.810	7.100	7.530	7.530	17.905	3.550	0.000	90.000
Cd	11.000	7.880	3.830	11.000	3.830	4.690	3.480	1.560	1.560	8.654	2.459	0.000	90.000
Zn	16.100	8.440	5.010	16.100	5.010	6.100	6.340	3.830	3.830	8.146	1.135	0.077	71.933
Кубические кристаллы													
Al	10.820	6.130	6.130	10.820	6.130	10.820	2.850	2.850	2.850	5.747	1.173	0.020	90.000
Mo	46.000	17.600	17.600	46.000	17.600	46.000	11.000	11.000	11.000	23.000	5.500	0.000	90.000
Pb	4.660	3.920	3.920	4.660	3.920	4.660	1.440	1.440	1.440	3.043	0.185	0.685	90.000
Ni	24.650	14.730	14.730	24.650	14.730	24.650	12.470	12.470	12.470	17.331	2.480	0.969	90.000
Тетрагональные кристаллы													
Sn	7.350	2.340	2.800	7.350	2.800	8.700	2.270	2.200	2.200	4.350	1.100	0.000	90.000
In	4.450	3.950	4.050	4.450	4.050	4.440	1.220	0.660	0.660	2.733	0.099	0.034	89.970
$BaTiO_3$	27.500	17.900	15.100	27.500	15.100	16.500	11.300	5.430	5.430	15.407	1.521	0.131	81.536
$ZrSiO_4$	7.350	0.900	−0.540	7.350	−0.540	4.600	1.600	1.380	1.380	3.675	0.690	0.000	90.000
Некоторые породы дерева													
Дуб	1.718	−0.550	−0.863	4.576	−2.929	10.152	7.772	24.812	12.500	13.066	0.728	0.206	56.023
Бук	0.714	−0.321	−0.379	4.376	−3.282	8.620	5.072	21.412	10.504	11.283	0.340	0.592	34.010
Клен	0.980	−0.451	−0.427	6.452	−5.291	11.236	8.636	34.844	8.832	18.266	0.469	0.374	33.986
Береза	0.600	−0.294	−0.286	8.881	−6.927	15.898	9.132	52.084	9.588	27.197	0.295	0.376	21.996
Ясень	0.621	−0.286	−0.342	6.506	−4.619	12.225	7.612	35.212	10.012	18.458	0.302	0.507	26.001
Пихта	0.769	−0.346	−0.408	10.638	−6.383	20.408	10.528	66.668	13.156	34.722	0.376	0.212	22.005
Сосна	0.602	−0.253	−0.258	8.897	−6.050	17.182	8.476	14.924	14.492	10.270	0.294	0.407	22.016
Ель	0.616	−0.271	−0.325	14.265	−5.991	25.000	15.504	28.820	24.040	16.726	0.304	0.485	17.998
Грецкий орех	0.877	−0.430	−0.560	8.264	−5.950	15.552	10.204	42.552	13.984	22.354	0.426	0.609	26.008

Выражение для энергии можно переписать в терминах скоростей. Для этого рассмотрим выражение (2.7) и с учетом (3.6) получим выражение для энергии в терминах скоростей

$$W = \frac{1}{2}\rho c^2 \tag{3.7}$$

Запишем выражение (2.6) в виде

$$A^V(\mathbf{n})\mathbf{m} = \lambda\mathbf{m} \tag{3.8}$$

Умножим выражение (3.8) слева на вектор **m**, получим

$$\mathbf{m}\cdot A^V(\mathbf{n})\cdot\mathbf{m} = \lambda\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} \Rightarrow \lambda = \mathbf{m}\cdot A^V(\mathbf{n})\cdot\mathbf{m} \tag{3.9}$$

$$\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}\cdot\cdot\overset{4}{\mathbf{C}}\cdot\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{m} = \frac{1}{(2\pi)^2}m\cdot A^V(\mathbf{n})\cdot\mathbf{m} = \frac{\lambda}{(2\pi)^2} \tag{3.10}$$

таким образом имеем следующее выражение для энергии

$$W = \frac{1}{2}\lambda/(2\pi)^2 = \frac{1}{8}\lambda/\pi^2 \tag{3.11}$$

4. Результаты численных исследований. После проведения численных исследований различных однородных анизотропных сред были получены результаты, представленные в таблице на основании экспериментальных данных, приведенных в [1, 4].

Для всех сред, имеющих кристаллическую структуру, направление максимального потока энергии E_{max} совпадает с направлением распространения соответствующей плоской волны, вызвавшей этот поток, а направление потока минимальной энергии ортогонально фронту распространения волны. Единственное несоответствие, которое было получено, относится к кристаллу Zn, где угол γ_{min} между E_{min} и n составляет 72°. Возможно, что в этом случае не верно определены константы упругости Zn (γ_{max} – угол при E_{max}, γ_{min} – угол при E_{min}).

Вместе с тем, исследования, проведенные для сред органической природы, показали еще большее отклонение угла между направлениями E_{min} и n от 90°. Здесь вообще отсутствуют среды для которых поток минимальной энергии был бы ортогонален направлению распространения плоской волны. Так соответствующий угол для ели составляет 18°. Следует отметить, что указанный факт наблюдается для всех протестированных пород дерева. Также как и в предыдущем случае, это видимо может свидетельствовать об ошибках в определении упругих констант.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Федоров Ф.И.* К теории упругих волн в кристаллах // Вестн. МГУ. Сер. Физика, астрономия. 1964. № 6. С. 36–40.
2. *Truesdell C.* Existence of longitudinal waves // J. Acoust. Soc. Amer. 1966. V. 40. № 3. P. 729–730.
3. *Gurtin M.E.* The linear theory of elasticity // Handbuch der Physik. Berlin: Springer, 1972. Bd. 6a/2. P. 1–295.
4. *Ашкенази Е.К., Ганов Э.В.* Анизотропия конструкционных материалов. Справочник. Л.: Машиностроение, 1972. 216 с.

Москва

Поступила в редакцию 22.XI.1996