

УДК 539.3

© 1998 Г. С. В. ЗАХАРОВА, В. М. ШИХМАН

**ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПОЛОСЫ,
СЦЕПЛЕННОЙ ТОРЦОМ С УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ**

Рассматривается упругая полуплоскость $|x| < \infty, y \leq 0$ с постоянными Ляме λ_1, μ_1 и плотностью ρ_1 . В области $y = 0, |x| \leq 1$ с ней жестко сцеплена торцом упругая полуполоса $(\lambda_2, \mu_2, \rho_2) |x| \leq 1, y \geq 0$. Граница полуплоскости вне области контакта и продольные грани полуполосы свободны от напряжений. В полуплоскости задана волна Рэлея с компонентами перемещений $u_R(x, y), v_R(x, y)$ набегающая из $-\infty$ на область контакта с полуполосой (фигура).

Разбиваем решение на симметричную и антисимметричную части относительно оси y . Ниже приводится решение для симметричных колебаний. Для антисимметричных колебаний ход решения аналогичен. Полное решение является суммой симметричной и антисимметричной частей.

Используя интегральное преобразование Фурье по x , с учетом принципа предельного поглощения [1], строим решение для полуплоскости с заданной в области контакта нагрузкой

$$\frac{1}{\mu_1} \sigma_y(x, 0) = \rho(x) \exp(-i\omega t), \quad \frac{1}{\mu_1} \tau(x, 0) = g(x) \exp(-i\omega t), \quad |x| \leq 1 \quad (1)$$

где $\sigma_y(x, y), \tau(x, y)$ – компоненты тензора напряжений. Гармонический множитель $\exp(-i\omega t)$ далее для упрощения записи опускаем. Компоненты построенного решения обозначим $u(x, y), v(x, y)$. Указанное решение приведено в [2].

Полное поле перемещений на границе полупространства с заданной волной Рэлея и нагрузкой в области $y = 0, |x| \leq 1$ имеет вид

$$u^{(1)}(x, y) = u(x, y) + u_R(x, y), \quad v^{(1)}(x, y) = v(x, y) + v_R(x, y) \quad (2)$$

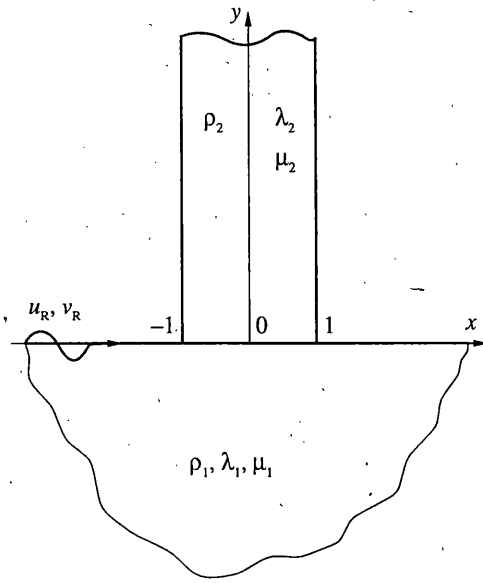
Перемещения в полуполосе представим в виде рядов по однородным решениям для бесконечной полосы со свободными границами

$$u^{(2)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x) \exp(i\beta_n y), \quad v^{(2)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x) \exp(i\beta_n y) \quad (3)$$

где c_n – комплексные постоянные, β_n – корни дисперсионного уравнения Рэлея–Лэмба.

Представлению (3) соответствуют напряжения

$$\frac{1}{\mu_2} \sigma_y^{(2)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sigma_{yn}(x) \exp(i\beta_n y), \quad \frac{1}{\mu_2} \tau^{(2)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \tau_n(x) \exp(i\beta_n y) \quad (4)$$



Фиг. 1

В [3] показано, что представление напряжения в виде (4) справедливо лишь при $y > 0$, а на торце при $y = 0$ ряды (4) расходятся в конечной области вблизи угловых точек. Проведенный в [4] анализ показал, что напряжения на торце имеют вид

$$\frac{1}{\mu_2} \sigma_y^{(2)}(x) = \frac{B_0}{(1-x^2)^\gamma} + \sigma_{y0}^{(2)}(x), \quad \frac{1}{\mu_2} \tau^{(2)}(x) = \frac{D_0 x}{(1-x^2)^\gamma} + \tau_0^{(2)}(x) \quad (5)$$

где B_0 и D_0 – неизвестные константы, γ находится из трансцендентного уравнения [5]. Следует отметить, что угловые особенности, выделенные в (5) являются интегрируемыми. Регулярные при $|x| \leq 1$ функции $\sigma_{y0}^{(2)}$ и $\tau_0^{(2)}$ строятся в виде сходящихся рядов по однородным решениям, что приводит к следующему виду напряжений на торце полуполосы:

$$\frac{1}{\mu_2} \sigma_y^{(2)}(x) = \frac{B_0}{(1-x^2)^\gamma} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sigma_{yk}(x)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \tau^{(2)}(x) = \frac{D_0 x}{(1-x^2)^\gamma} + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k + B_0 h_{1k} + D_0 h_{2k}) \tau_k(x) \quad (6)$$

$$h_{1k} = \frac{2}{w_{k0}} \int_0^1 \frac{v_k(t)}{(1-t^2)^\gamma} dt \quad h_{2k} = \frac{2}{w_{k0}} \int_0^1 \frac{t u_k(t)}{(1-t^2)^\gamma} dt$$

где w_k – коэффициенты, зависящие от β_k .

В [4] на основе соотношения обобщенной ортогональности [6] получена связь между константами $B_k = c_k^A - B_0 h_{1k}$, $D_k = c_k + D_0 h_{2k}$.

Рассмотрим совместные колебания полуполосы и полуплоскости. В области сечения выполняются условия непрерывности напряжений

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} p(x) = \frac{B_0}{(1-x^2)^\gamma} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sigma_{y_k}(x) \quad (7)$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} g(x) = \frac{D_0 x}{(1-x^2)^\gamma} + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k + B_0 h_{1k} + D_0 h_{2k}) \tau_k(x)$$

и перемещений

$$u^{(1)}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x), \quad v^{(1)}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x), \quad |x| \leq 1 \quad (8)$$

Построенное решение для полуплоскости при учете (7) на границе $y = 0$ примет вид

$$u^{(1)} = \frac{\mu_2}{\mu_1 \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ B_0 \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} f_1(\alpha, x) \sigma_{y_0}(\alpha) d\alpha + \sigma_{y_0}(0) \int_0^{\varepsilon} f_1(\alpha, x) d\alpha \right] + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^{\infty} f_1(\alpha, x) \sigma_{y_k}(\alpha) d\alpha \right\} + \\ + i \kappa_2^2 \left\{ D_0 \int_{\varepsilon}^{\infty} f_2(\alpha, x) \tau_0(\alpha) d\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \int_0^{\infty} f_2(\alpha, x) \tau_k(\alpha) d\alpha \right\} + u_R(x, 0)$$

$$v^{(1)} = \frac{\mu_2}{\mu_1 \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ -\kappa_2^2 \left[B_0 \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} f_3(\alpha, x) \sigma_{y_0}(\alpha) d\alpha + \sigma_{y_0}(0) \int_0^{\varepsilon} f_3(\alpha, x) d\alpha \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^{\infty} f_3(\alpha, x) \sigma_{y_k}(\alpha) d\alpha \right\} + \right. \\ \left. + i \left\{ D_0 \int_{\varepsilon}^{\infty} f_4(\alpha, x) \tau_0(\alpha) d\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \int_0^{\infty} f_4(\alpha, x) \tau_k(\alpha) d\alpha \right\} \right\} + v_R(x, 0)$$

$$f_1(\alpha, x) = (\alpha^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2) \frac{\alpha \sin \alpha x}{\Delta(\alpha)} \quad f_2(\alpha, x) = \frac{k_2 \sin \alpha x}{\Delta(\alpha)},$$

$$f_3(\alpha, x) = \frac{k_1 \cos \alpha x}{\Delta(\alpha)} \quad f_4(\alpha, x) = -(\alpha^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2) \frac{\alpha \cos \alpha x}{\Delta(\alpha)}$$

Здесь $\sigma_{y_k}(\alpha)$, $\tau_k(\alpha)$ трансформаты Фурье от компонент напряжений

$$\sigma_{y_0}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\alpha} \right)^{0.5-\gamma} \Gamma(1-\gamma) J_{0.5-\gamma}(\alpha),$$

$$\sigma_{y_0}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(0.5)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1.5-\gamma)} \quad \tau_0(\alpha) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\alpha} \right)^{0.5-\gamma} \Gamma(1-\gamma) J_{1.5-\gamma}(\alpha),$$

$$k_j^2 = \alpha^2 - \kappa_j^2 \quad (j = 1, 2) \quad \kappa_1^2 = \rho_1 \omega^2 / (\lambda_1 + 2\mu_1), \quad \kappa_2^2 = \rho_1 \omega^2 / \mu_1$$

где Γ – гамма-функция, J – функция Бесселя, $\Delta(\alpha) = (\alpha^2 + k_2^2)^2 - 4\alpha^2 k_1 k_2$ – знаменатель Рэлея, α – параметр преобразования Фурье, ϵ – некоторая малая постоянная выбираемая численно.

Вариационная формулировка граничных условий для полуполосы (принцип Рейсснера) имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{-1}^1 u_n(x) \left[\frac{x}{(1-x^2)^\gamma} + \sum_{k=1}^{\infty} h_{2k} \tau_k(x) \right] dx &= \int_{-1}^1 u_n(x, 0) \left[\frac{x}{(1-x^2)^\gamma} + \sum_{k=1}^{\infty} h_{2k} \tau_k(x) \right] dx \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{-1}^1 \left[u_n(x) \sum_{k=1}^{\infty} h_{1k} \tau_k(x) + \frac{v_n(x)}{(1-x^2)^\gamma} \right] dx &= \int_{-1}^1 \left[u(x, 0) \sum_{k=1}^{\infty} h_{1k} \tau_k(x) + \frac{v(x, 0)}{(1-x^2)^\gamma} \right] dx \quad (9) \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{-1}^1 [u_n(x) \tau_m(x) + \sigma_{ym}(x) v_n(x)] dx &= \int_{-1}^1 [u(x, 0) \tau_m(x) + v(x, 0) \sigma_{ym}(x)] dx \\ &(m = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

При учете (8) и соотношения обобщенной ортогональности из [6] (9) приводится к бесконечной алгебраической системе относительно коэффициентов разложения.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} B_n d_{nm} + B_0 a_m + D_0 e_m &= r_m, \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n d_n + B_0 a_0 + D_0 e_0 = r_0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n d_n^{(1)} + B_0 a_0^{(1)} + D_0 e_0^{(1)} &= r_0^{(1)} \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь коэффициенты системы d_{nm} , a_m , e_m , a_0 , e_0 , $a_0^{(1)}$, $e_0^{(1)}$ выражаются через параметры полуполосы и полуплоскости и однородные решения для полуполосы. Входящие в коэффициенты несобственные интегралы от функций содержащих особенности вычисляются путем выхода в комплексную плоскость. Параметры заданной волны Рэлея входят в правые части системы r_m , r_0 , $r_0^{(1)}$.

Численный анализ проведен при $\mu_1 = \mu_2$, $\rho_1 = \rho_2$, $v_1 = v_2 = 0.29$. Для этого случая $\gamma = 0.54$. Исследовались две частоты набегающей волны Рэлея $\Omega = 0.5$ и $\Omega = 3.0$ ($\Omega = 2\omega/\pi c_2$), c_2 – скорость поперечных волн. При $\Omega = 0.5$ в полуполосе возбуждается одна бегущая волна Рэлея–Лэмба, при $\Omega = 3.0$ – три бегущие волны. Анализ показал хорошую сходимость решения при увеличении порядка системы. Для $\Omega = 0.5$ при увеличении порядка от $N = 15$ до $N = 19$ константы, определяющие волновые поля в системе практически не меняются. Для $\Omega = 3.0$ устойчивость решения достигается при $N = 27$. Для оценки погрешности вычислений использовались условия сопряжения перемещений в области контакта. Сопоставлялись при $y = 0$ перемещения для полуполосы, представленные рядами (3) и перемещения для полуплоскости, определяемые соотношениями (2). При $\Omega = 0.5$ погрешность около 1% достигается при порядке системы $N = 21$. При $\Omega = 3.0$ погрешность составляет менее 10% при $N = 33$. На низкой частоте $\Omega = 0.5$ при амплитуде заданной волны Рэлея $A_R = 1$ достаточно эффективно возбуждается первая распространяющаяся мода, амплитуда продольного перемещения в которой составляет $v_1 = 0.2$. При $\Omega = 0.5$ и $y > 1$ напряженно-деформированное состояние волновода хорошо описывается стержневой теорией. Однако в области контакта и вблизи торца продольные и поперечные составляющие перемещений и напряжений соизмеримы по величине и существенно нелинейны. Сложный характер поля напряжений вблизи торца при низких частотах определяется затухающими модами колебаний

и связан с наличием особенностей напряженного состояния в угловых точках области сцепления.

Аналогичный подход используется для решения задачи о стыковке бесконечной и полубесконечной полос.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 94-01-00220).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. *Пельц С.П., Шихман В.М.* Рассеяние волны Рэлея на упругой полуполосе, сцепленной на торце с упругой полуплоскостью // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292. № 2. С. 299–303.
3. *Пельц С.П., Шихман В.М.* О сходимости метода однородных решений в динамической смешанной задаче для полуполосы // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 4. С. 821–824.
4. *Захарова С.В., Шихман В.М.* Вынужденные изгибные колебания упругой полуполосы при смешанных граничных условиях // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 340–345.
5. *Аксентян О.К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 178–186.
6. *Зильберглейт А.С., Нуллер Б.М.* Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 2. С. 333–335.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию 20.III.1996