

УДК 531.8

Н.Н. БОЛОТНИК, Г.В. КОСТИН, Ф.Л. ЧЕРНОУСЬКО

## ДВИЖЕНИЕ ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА В ТОРОИДАЛЬНОЙ ТРУБЕ

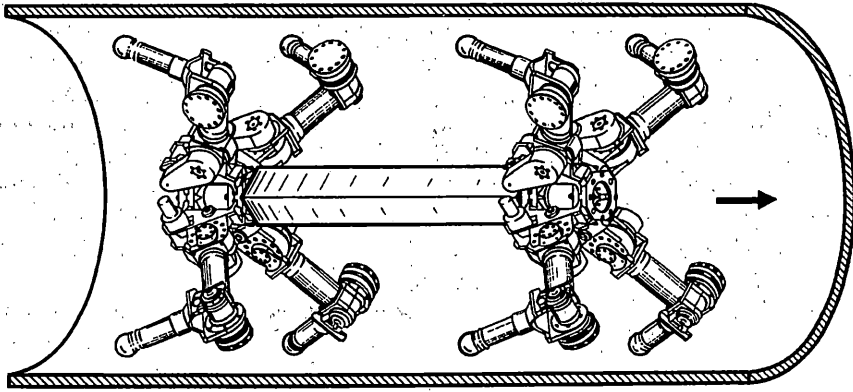
Исследуется кинематика движений восьминогго шагающего робота внутри тороидальной трубы. Робот предназначен для инспекции и ремонта трубопроводов. Важность изучения движения в тороидальной трубе связана с прохождением роботом поворотов трубопроводных магистралей. Построены регулярные движения робота, при которых за каждый шаг центр масс корпуса робота перемещается на одно и то же расстояние, в начале и в конце шага центр масс корпуса лежит на оси трубы, а ось робота касается оси трубы. Каждый шаг состоит из двух полушагов, на которых опорными являются различные четверки ног. Рассчитаны углы поворота корпуса робота и перемещения его центра масс на каждом полушаге. Исследовано, как изменяется угол наклона корпуса робота по отношению к экваториальной плоскости тороидальной трубы от шага к шагу. Обсуждаются вопросы практического планирования движения робота. Приводятся некоторые результаты моделирования.

Данная статья продолжает работы [1–3], в которых исследована кинематика, статика и динамика регулярных движений робота в прямолинейной цилиндрической трубе.

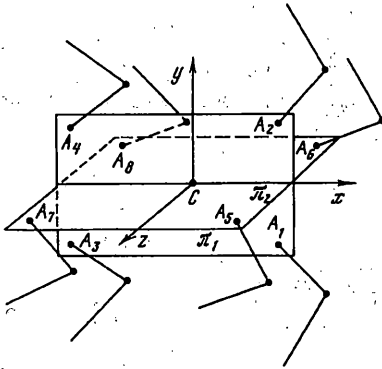
**1. Конструктивная схема робота и геометрические соотношения.** Рассматриваемый в данной статье шагающий робот для перемещения в трубах создан в Институте механики Мюнхенского технического университета под руководством проф. Ф. Пфайффера. На фиг. 1 изображен общий вид робота, а на фиг. 2 – его кинематическая схема. Аппарат состоит из корпуса и восьми одинаковых двузвенных ног, которые соединены с корпусом цилиндрическими шарнирами  $A_1, \dots, A_8$ . Оси шарниров  $A_1 - A_4$  перпендикулярны плоскости  $\pi_1$ , а оси шарниров  $A_5 - A_8$  – перпендикулярны плоскости  $\pi_2$ , которая ортогональна плоскости  $\pi_1$ . Линия пересечения плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$  проходит через центр масс корпуса шагающего аппарата. Назовем эту прямую осью робота. Точки пересечения  $A'_1 - A'_4$  осей шарниров  $A_1 - A_4$  с плоскостью  $\pi_1$  образуют совокупность вершин прямоугольника  $A'_1A'_2A'_4A'_3$ . Аналогично, точки  $A'_5 - A'_8$  пересечения осей шарниров  $A_5 - A_8$  с плоскостью  $\pi_2$  образуют совокупность вершин прямоугольника  $A'_5A'_6A'_8A'_7$ . Ось робота является общей осью симметрии указанных прямоугольников; прямоугольники  $A'_1A'_2A'_4A'_3$  и  $A'_5A'_6A'_8A'_7$  переходят друг в друга при повороте корпуса робота вокруг его оси на угол  $\pi/2$ . Стороны  $A'_1A'_3$ ,  $A'_2A'_4$ ,  $A'_5A'_7$  и  $A'_6A'_8$  равны друг другу и параллельны оси робота. В дальнейшем будем отождествлять точки  $A'_i$  с соответствующими шарнирами  $A_i$ , опуская штрихи.

Свяжем с корпусом робота правую прямоугольную систему координат  $S_{xyz}$ , начало которой совпадает с центром масс робота, ось  $x$  ориентирована вдоль оси робота по направлению к прямой  $A_1A_2$ , ось  $y$  лежит в плоскости  $\pi_1$  и направлена к прямой  $A_2A_4$ , а ось  $z$  расположена в плоскости  $\pi_2$  и направлена к прямой  $A_5A_7$ .

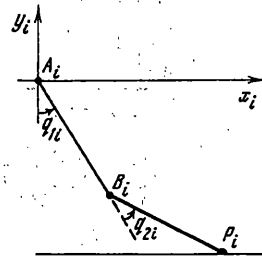
Кроме того, введем системы координат  $A_ix_jz_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ), начала которых лежат в точках  $A_i$ , оси  $x_i$  коллинеарны оси  $x$ , оси  $y_i$  лежат в плоскости  $\pi_1$  (для  $i = 1, \dots, 4$ ) или  $\pi_2$  (для  $i = 5, \dots, 8$ ) и направлены к оси робота, а оси  $z_i$  дополняют системы осей  $x_iy_i$  до



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

правых ортогональных троек. Системы  $A_i x_i y_i z_i$  понадобятся в дальнейшем для описания конфигураций ног и походки робота. Матрицы  $\Gamma^{(i)}$  перехода от системы координат  $Sxyz$  к системам координат  $A_i x_i y_i z_i$  имеют вид

$$\Gamma^{(1)} = \Gamma^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^{(2)} = \Gamma^{(4)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

$$\Gamma^{(5)} = \Gamma^{(7)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^{(6)} = \Gamma^{(8)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Обозначим через  $R_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) радиус-вектор шарнира  $A_i$  относительно точки  $C$ , через  $a$  и  $d$  —  $x$ - и  $y$ -координаты шарнира  $A_2$ , а через  $b$  —  $x$ -координату шарнира  $A_3$ . Векторы  $R_i$  представляются в системе координат  $Sxyz$  следующим образом:

$$R_1 = \begin{vmatrix} a \\ -d \\ 0 \end{vmatrix}, \quad R_2 = \begin{vmatrix} a \\ d \\ 0 \end{vmatrix}, \quad R_3 = \begin{vmatrix} b \\ -d \\ 0 \end{vmatrix}, \quad R_4 = \begin{vmatrix} b \\ d \\ 0 \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

$$R_5 = \begin{vmatrix} a \\ 0 \\ d \end{vmatrix}, \quad R_6 = \begin{vmatrix} a \\ 0 \\ -d \end{vmatrix}, \quad R_7 = \begin{vmatrix} b \\ 0 \\ d \end{vmatrix}, \quad R_8 = \begin{vmatrix} b \\ 0 \\ -d \end{vmatrix}$$

Ноги робота представляют собой шарнирные двузвенники (фиг. 3). Первое звено  $i$ -й ноги соединено с корпусом робота посредством шарнира  $A_i$ , а второе звено связано с первым при помощи цилиндрического шарнира (коленного сустава)  $B_i$ , ось которого параллельна оси шарнира  $A_i$ . На конце второго звена расположена стопа  $P_i$ . В дальнейшем звенья ног считаются абсолютно твердыми телами, а стопы – точечными телами, контактирующими с внутренней поверхностью трубы, когда соответствующая нога находится в опорной фазе. Предполагается, что стопы  $P_1 - P_4$  лежат в плоскости  $\pi_1$ , а стопы  $P_5 - P_8$  – в плоскости  $\pi_2$ . Обозначим через  $l_1$  длину первого звена ноги (расстояние между осями шарниров  $A_i$  и  $B_i$ ), а через  $l_2$  – длину второго звена (расстояние между осью шарнира  $B_i$  и стопой  $P_i$ ).

Конфигурацию ноги можно описать, задавая углы  $q_{1i}$  и  $q_{2i}$ , введенные как показано на фиг. 3. Зная эти углы и длины звеньев  $l_1$  и  $l_2$ , можно вычислить координаты  $x_{P_i}$  и  $y_{P_i}$  стопы  $P_i$  в системе координат  $A_i x_i y_i z_i$  по формулам

$$x_{P_i} = l_1 \sin q_{1i} + l_2 \sin(q_{1i} + q_{2i}) \quad (1.3)$$

$$y_{P_i} = -l_1 \cos q_{1i} - l_2 \cos(q_{1i} + q_{2i})$$

Уравнение (1.3) можно разрешить относительно  $\sin q_{1i}$ ,  $\cos q_{1i}$ ,  $\sin q_{2i}$  и  $\cos q_{2i}$ , выразив тем самым тригонометрические функции углов в шарнирах ног через координаты стоп:

$$\sin q_{1i} = \frac{x_{P_i}(x_{P_i}^2 + y_{P_i}^2 + l_1^2 - l_2^2) - \gamma_i y_{P_i} A^i}{2l_1(x_{P_i}^2 + y_{P_i}^2)} \quad (1.4)$$

$$\cos q_{1i} = -\frac{y_{P_i}(x_{P_i}^2 + y_{P_i}^2 + l_1^2 - l_2^2) + \gamma_i x_{P_i} A^i}{2l_1(x_{P_i}^2 + y_{P_i}^2)}$$

$$\sin q_{2i} = -\gamma_i A^i / (2l_1 l_2)$$

$$\cos q_{2i} = (x_{P_i}^2 + y_{P_i}^2 - l_1^2 - l_2^2) / (2l_1 l_2)$$

Здесь

$$A^i = [2(l_1^2 + l_2^2)(x_{P_i}^2 + y_{P_i}^2) - (x_{P_i}^2 + y_{P_i}^2)^2 - (l_1^2 - l_2^2)^2]^{1/2}$$

а множитель  $\gamma_i = \pm 1$  отражает тот факт, что если нога не распрямлена, то каждому положению стопы  $P_i$  отвечают две конфигурации ноги, симметричные относительно прямой, соединяющей шарнир  $A_i$  и стопу  $P_i$ .

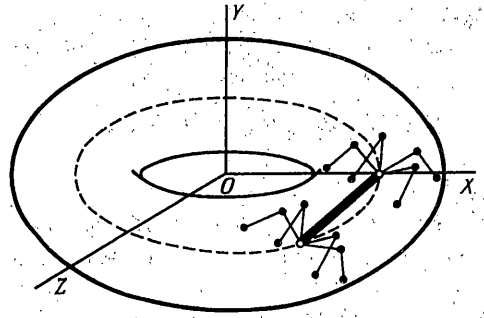
**2. Регулярное движение в тороидальной трубе.** Рассмотрим трубу (или участок трубы), имеющую форму тора. Криволинейные колена, соединяющие прямолинейные участки трубопроводов и таким образом обеспечивающие повороты трубопроводных магистралей, обычно имеют форму, близкую к тороидальной. Поэтому исследование возможности движения робота внутри тора – важный этап создания теории шагающих аппаратов для перемещения в трубах. Анализ походок, обеспечивающих такое движение, имеет большое практическое значение для планирования программных движений таких аппаратов.

Обозначим через  $R$  средний радиус экваториального сечения тора, а через  $\rho$  – радиус его меридиональной окружности. В дальнейшем величину  $R$  будем называть радиусом поворота трубы, а  $\rho$  – радиусом трубы; серединную окружность (радиуса  $R$ ) экваториального сечения тора назовем осью трубы. Введем неподвижную правую систему координат  $OXYZ$  полюс которой расположен в центре экваториального сечения тора, а координатная плоскость  $XZ$  совпадет с экваториальной плоскостью тора (фиг. 4).

Рассмотрим класс движений шагающего робота в трубе, который будем называть

регулярными движениями. Для описания этого класса движений наложим ряд ограничений и введем некоторые определения.

*Ограничение 1.* В каждый момент времени все ноги, лежащие в одной из плоскостей  $\pi_1$  или  $\pi_2$ , являются опорными (т.е. их стопы расположены на поверхности трубы и неподвижны относительно нее), а ноги, лежащие в другой плоскости, находятся в фазе переноса. Стопы переносимых ног с поверхностью трубы не контактируют. Ноги, лежащие в разных плоскостях, чередуют фазу опоры с фазой переноса.



Фиг. 4

*Определение 1.* Назовем шагом робота движение на интервале времени от начала опорной фазы ног, лежащих в плоскости  $\pi_1$ , до конца следующей за ней опорной фазы ног, лежащих в плоскости  $\pi_2$ .

*Определение 2.* Часть шага, в течение которой опорными являются стопы ног, лежащих в плоскости  $\pi_1$  (соответственно  $\pi_2$ ) назовем первым (соответственно вторым) полшагом.

*Ограничение 2.* В начале и в конце каждого шага центр масс  $C$  корпуса робота лежит на оси трубы, а ось робота касательна к оси трубы.

*Определение 3.* Назовем длиной  $s$  шага длину участка оси трубы (дуги серединной окружности тора) между положениями центра масс корпуса робота в начале и в конце шага.

*Определение 4.* Назовем угловой длиной  $\phi$  шага угол между радиусами-векторами точки  $C$  относительно начала координат  $O$  в начале и в конце шага.

Очевидно, что длина шага связана с его угловой длиной соотношением

$$s = R\phi \quad (2.1)$$

*Определение 5.* Назовем регулярным движением такое движение, при котором выполняются ограничения 1 и 2 и, кроме того, все шаги имеют одинаковую длину и одинаковую продолжительность.

Поставим задачу планирования движения корпуса робота на одном шаге. Обозначим через  $R_C(t)$  текущее значение радиуса-вектора центра масс  $C$  корпуса робота относительно полюса  $O$  неподвижной системы координат,  $\Gamma(t)$  – текущее значение матрицы направляющих косинусов осей системы координат  $OXYZ$  в системе координат  $S_{xyz}$ ,  $t = 0$  – момент начала шага,  $t_1$  – момент окончания шага,  $\tau$  – момент окончания первого полшага. Введем элементарные матрицы поворота

$$\Gamma_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$\Gamma_3(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

описывающие повороты некоторой правой ортогональной системы координат  $x_1x_2x_3$  вокруг координатных осей  $x_1, x_2, x_3$  на углы  $\alpha, \beta, \gamma$  соответственно.

Будем без ограничения общности считать, что в момент  $t = 0$  центр масс  $C$  корпуса робота лежит на оси  $Z$  неподвижной системы координат. Этого всегда можно добиться поворотом неподвижной системы координат вокруг оси  $Y$  на соответствующий

угол. В таком случае, с учетом ограничения 2, начальное положение корпуса робота представляется следующим образом:

$$\{\mathbf{R}_C(0)\}_{XYZ} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{Bmatrix}, \quad \Gamma(0) = \Gamma_1(\alpha_0) \quad (2.3)$$

где  $\alpha_0$  – угол между плоскостью  $\pi_2$  (плоскостью  $xz$  связанной системы координат  $S_{xyz}$ ) и экваториальной плоскостью тороидальной трубы (плоскостью  $XZ$  неподвижной системы координат  $OXYZ$ ) в начале шага. Иными словами,  $\alpha_0$  – начальный угол поворота корпуса робота вокруг своей оси. Не нарушая общности, будем полагать, что  $\alpha_0 \in (-\pi, \pi]$ . В (2.3) и далее запись  $\{\mathbf{a}\}_{x_1x_2x_3}$  означает столбец компонент вектора  $\mathbf{a}$  в системе координат  $x_1x_2x_3$ .

Поскольку в конце шага центр масс  $C$  корпуса робота лежит на оси трубы в точке, смещенной на угол  $\varphi$  относительно начального положения, а ось  $x$  робота касательна к оси трубы (ограничение 2), справедливы соотношения

$$\{\mathbf{R}_C(t_1)\}_{XYZ} = \begin{Bmatrix} R \sin \varphi \\ 0 \\ R \cos \varphi \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\Gamma^T(t_1) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ 0 \\ -\sin \varphi \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Здесь и в дальнейшем верхний индекс  $T$  обозначает транспонирование матрицы.

Существенной особенностью регулярного движения, вытекающей из кинематической схемы робота (п. 1, фиг. 2), является тот факт, что на каждом отдельном полушаге робот может совершать только плоскопараллельные движения, а именно, на первом (соответственно втором) полушаге центр масс  $C$  корпуса робота может двигаться только в плоскости  $\pi_1$  (соответственно  $\pi_2$ ), а вращение корпуса возможно только вокруг оси  $z$  (соответственно вокруг оси  $y$ ) системы координат  $S_{xyz}$ .

В соответствии с этим на вектор  $\mathbf{R}_C(t)$  и матрицу  $\Gamma(t)$  налагаются условия

$$\Delta \mathbf{R}_1(t) = \mathbf{R}_C(t) - \mathbf{R}_C(0) \in \pi_1, \quad t \in [0, \tau] \quad (2.6)$$

$$\Delta \mathbf{R}_2(t) = \mathbf{R}_C(t) - \mathbf{R}_C(\tau) \in \pi_2, \quad t \in [\tau, t_1]$$

$$\Gamma(t) = \Gamma_3(\varphi_1(t))\Gamma(0), \quad t \in [0, \tau] \quad (2.7)$$

$$\Gamma(t) = \Gamma_2(\varphi_2(t))\Gamma(\tau), \quad t \in [\tau, t_1]$$

Здесь  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  – функции, описывающие вращение корпуса робота вокруг соответствующих осей на первом и втором полушагах. В начальные моменты времени соответствующих полушагов углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  равны нулю:

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(\tau) = 0 \quad (2.8)$$

Задача планирования движения корпуса робота на одном шаге формулируется следующим образом.

*Задача 1.* Для заданной длины (линейной или угловой) шага найти дважды непрерывно дифференцируемую вектор-функцию  $\mathbf{R}_C(t)$  и дважды непрерывно дифференцируемую матрицу-функцию  $\Gamma(t)$ , которые определены на интервале времени  $[0, t_1]$  и удовлетворяют условиям (2.3)–(2.8).

Из (2.6) и (2.7) вытекает, что поставленная задача сводится к определению двух

вектор-функций  $\Delta \mathbf{R}_1(t)$  и  $\Delta \mathbf{R}_2(t)$ , определенных соответственно на интервалах  $[0, \tau]$  и  $[\tau, t_1]$ , и двух скалярных функций  $\varphi_1(t)$ ,  $t \in [0, \tau]$ , и  $\varphi_2(t)$ ,  $t \in [\tau, t_1]$ .

**3. Угловое движение корпуса робота на одном шаге.** Исследуем некоторые особенности изменения ориентации корпуса робота при регулярном движении. Найдем углы  $\varphi_1(\tau)$  и  $\varphi_2(t_1)$  и, в соответствии с (2.7), матрицы  $\Gamma(\tau)$  и  $\Gamma(t_1)$ , определяющие ориентацию корпуса робота относительно неподвижной системы координат  $OXYZ$  в моменты окончания первого и второго полушагов. В дальнейшем для краткости будем использовать обозначения  $\varphi_1^* = \varphi_1(\tau)$  и  $\varphi_2^* = \varphi_2(t_1)$ . Согласно (2.3) и (2.7) имеем

$$\Gamma(\tau) = \Gamma_3(\varphi_1^*)\Gamma_1(\alpha_0), \quad \Gamma(t_1) = \Gamma_2(\varphi_2^*)\Gamma_3(\varphi_1^*)\Gamma_1(\alpha_0) \quad (3.1)$$

Подстановка (3.1) в (2.5) дает

$$\cos \varphi_2^* \cos \varphi_1^* = \cos \varphi \quad (3.2)$$

$$\cos \alpha_0 \sin \varphi_1^* \cos \varphi_2^* + \sin \alpha_0 \sin \varphi_2^* = 0 \quad (3.3)$$

$$\sin \alpha_0 \sin \varphi_1^* \cos \varphi_2^* - \cos \alpha_0 \sin \varphi_2^* = -\sin \varphi \quad (3.4)$$

Уравнения (3.2), (3.3) и (3.4) не являются независимыми, так как сумма квадратов левых частей этих уравнений и сумма их правых частей тождественно равны единице. Разрешим систему уравнений (3.2)–(3.4) относительно двух переменных  $\varphi_1^*$  и  $\varphi_2^*$ . Ограничимся для простоты случаем  $0 < \varphi < \pi/2$ , который практически всегда имеет место. В этом случае  $\cos \varphi \neq 0$ , и решение системы (3.2)–(3.4) относительно  $\cos \varphi_1^*$ ,  $\sin \varphi_1^*$ ,  $\cos \varphi_2^*$ ,  $\sin \varphi_2^*$  имеет вид

$$\cos \varphi_1^* = \pm \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi}} \quad (3.5)$$

$$\sin \varphi_1^* = \mp \frac{\sin \alpha_0 \sin \varphi}{\sqrt{\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi}}$$

$$\cos \varphi_2^* = \pm \sqrt{\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi}$$

$$\sin \varphi_2^* = \cos \alpha_0 \sin \varphi$$

Таким образом, при заданном начальном угле  $\alpha_0$  наклона плоскости  $\pi_2$  (плоскости  $xz$  связанной системы координат  $Sxyz$ ) к плоскости  $XZ$  неподвижной системы координат  $OXYZ$  и при заданной угловой длине шага  $\varphi$  имеются две возможности выбора углов  $\varphi_1^*$  и  $\varphi_2^*$ , определяющих ориентацию корпуса робота в моменты окончания полушагов. Одна из этих возможностей отвечает верхнему знаку в выражениях (3.5), а другая – нижнему. После того, как знак выбран, углы  $\varphi_1^*$  и  $\varphi_2^*$  определяются из (3.5) однозначно. В дальнейшем для определенности ограничимся выбором верхнего знака в выражениях (3.5). Такой выбор, в частности, целесообразен при небольших длинах шага, поскольку в этом случае  $\cos \varphi_1^* \rightarrow 1$ ,  $\sin \varphi_1^* \rightarrow 0$ ,  $\cos \varphi_2^* \rightarrow 1$ ,  $\sin \varphi_2^* \rightarrow 0$  при  $\varphi \rightarrow 0$ , и, следовательно, движение с малым шагом требует поворота корпуса робота на небольшие углы ( $\varphi_1^* \rightarrow 0$ ,  $\varphi_2^* \rightarrow 0$  при  $\varphi \rightarrow 0$ ), что естественно. При выборе нижнего знака в выражениях (3.5) имеем  $\cos \varphi_1^* \rightarrow -1$ ,  $\sin \varphi_1^* \rightarrow 0$ ,  $\cos \varphi_2^* \rightarrow -1$ ,  $\sin \varphi_2^* \rightarrow 0$  при  $\varphi \rightarrow 0$ . В этом случае движение с малым шагом требует поворота корпуса робота на угол, близкий к  $\pi$ , как на первом, так и на втором полушагах, что может оказаться неосуществимым из-за конструктивных ограничений.

Решение уравнений (3.5) относительно  $\varphi_1^*$  и  $\varphi_2^*$  на интервалах  $-\pi < \varphi_1^* \leq \pi$ ,  $-\pi < \varphi_2^* \leq \pi$  имеет вид

$$\varphi_1^* = \text{sign}(\sin \alpha_0) \arccos \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi}} \quad (3.6)$$

$$\varphi_2^* = \text{sign}(\cos \alpha_0) \arccos \sqrt{\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi} \quad (3.7)$$

Закон изменения переменных  $\varphi_1(t)$ ,  $t \in [0, \tau]$ , и  $\varphi_2(t)$ ,  $t \in [\tau, t_1]$ , не определяется однозначно из условий (2.3)–(2.8). В качестве функций  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  можно выбрать любые функции, удовлетворяющие условиям  $\varphi_1(0) = 0$ ,  $\varphi_1(\tau) = \varphi_1^*$ ;  $\varphi_2(\tau) = 0$ ,  $\varphi_2(t_1) = \varphi_2^*$ , где  $\varphi_1^*$  и  $\varphi_2^*$  вычисляются по формулам (3.6) и (3.7), и обеспечивающие дважды дифференцируемость матрицы  $\Gamma(t)$ , определяемой соотношениями (2.7), на отрезке  $[0, t_1]$ .

Согласно определению регулярного движения (определение 5), в начале и в конце шага центр масс  $C$  корпуса робота лежит на оси трубы, а ось  $x$  робота касается оси трубы. В этом смысле положение корпуса робота в конце шага (исходное положение для следующего шага) аналогично его положению в начале шага. Однако угол наклона корпуса робота по отношению к экваториальной плоскости тороидальной трубы, измеряемый как угол между плоскостью  $xz$  связанной системы координат  $Cxuz$  (плоскостью  $\pi_2$ ) и плоскостью  $XZ$  изменится, и в общем случае не будет равен  $\alpha_0$ . Вычислим значение этого угла в конце шага, обозначив его через  $\alpha_1$ .

Ориентация связанной системы координат  $Cxuz$  в конце шага в неподвижной системе координат, повернутой относительно  $OXYZ$  на угол  $\varphi$  вокруг оси  $Y$  (назовем эту систему координат  $OX'YZ'$ , она играет роль системы отсчета  $OXYZ$  при расчете следующего шага), определяется матрицей  $\Gamma_1(\alpha_1)$ . Эта матрица равна произведению матрицы  $\Gamma(t_1)$ , определяющей ориентацию системы координат  $OXYZ$  относительно системы координат  $Cxuz$  в конце шага, на матрицу  $\Gamma_2^T(\varphi)$ , задающую переход от системы координат  $OX'YZ'$  к системе координат  $OXYZ$ . Имеем

$$\Gamma_1(\alpha_1) = \Gamma(t_1)\Gamma_2^T(\varphi)$$

Подставив в это равенство  $\Gamma_1(\alpha)$ ,  $\Gamma_2(\varphi)$  из (2.2) и  $\Gamma(t_1)$  из (3.1), получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ 0 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{vmatrix} = \Gamma_2(\varphi^*)\Gamma_3(\varphi_1^*)\Gamma_1(\alpha_0)\Gamma_2^T(\varphi) = \quad (3.8)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & & 0 & & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1^* \cos \alpha_0 & & \sin \alpha_0 \cos \varphi_2^* - \cos \alpha_0 \sin \varphi_1^* \sin \varphi_2^* & \\ 0 & \cos \alpha_0 \sin \varphi_1^* \sin \varphi_2^* - \sin \alpha_0 \cos \varphi_2^* & & \cos \varphi_1^* \cos \alpha_0 & \end{vmatrix}$$

Сопоставляя матрицы, представленные в (3.8) в развернутом виде, будем иметь

$$\cos \alpha_1 = \cos \varphi_1^* \cos \alpha_0 \quad (3.9)$$

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_0 \cos \varphi_2^* - \cos \alpha_0 \sin \varphi_1^* \sin \varphi_2^*$$

Подставим в (3.9) выражения (3.5), в которых выбран верхний знак. Найдем

$$\cos \alpha_1 = \frac{\cos \varphi \cos \alpha_0}{\sqrt{\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi}} \quad (3.10)$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{\sin \alpha_0}{\sqrt{\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi}}$$

Ограничиваясь интервалом  $(-\pi, \pi]$  для углов  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$ , из (3.10) получим

$$\alpha_1 = F(\alpha_0, \varphi) \quad (3.11)$$

$$F(\alpha, \varphi) = \text{sign}(\sin \alpha) \arccos \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi}} \quad \text{при } \sin \alpha \neq 0 \quad (3.12)$$

$$F(0, \varphi) = 0, \quad F(\pi, \varphi) = \pi$$

Если  $\varphi \in (0, \pi/2)$ , то функция  $F(\alpha, \varphi)$  непрерывна по  $\alpha$  на интервале  $(-\pi, \pi]$ .

**4. Изменение ориентации корпуса робота при многошаговом движении.** Рассмотрим теперь последовательность шагов при регулярном движении робота внутри тора. Обозначим через  $\alpha_k$  угол между плоскостями  $xz$  связанной системы координат  $S_{kxz}$  и плоскостью  $XZ$  неподвижной системы отсчета  $OXYZ$  в начале  $k$ -го шага. Из (3.11) очевидно, что изменение переменной  $\alpha_k$  от шага к шагу описывается рекуррентным соотношением

$$\alpha_{k+1} = F(\alpha_k, \varphi) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4.1)$$

где функция  $F(\alpha, \varphi)$  определяется в соответствии с (3.12).

Найдем стационарные точки многошагового (итерационного) процесса (4.1) на интервале  $(-\pi, \pi]$  и исследуем их устойчивость. Как следует из первого уравнения (3.10), стационарные точки  $\alpha_f$  должны удовлетворять уравнению

$$\cos \alpha_f = \frac{\cos \varphi \cos \alpha_f}{\sqrt{\sin^2 \alpha_f + \cos^2 \alpha_f \cos^2 \varphi}} = \frac{\cos \varphi \cos \alpha_f}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha_f \sin^2 \varphi}} \quad (4.2)$$

Решение уравнения (4.2) относительно  $\cos \alpha_f$  при  $\cos \varphi \neq 0$  (напомним, что предполагается  $\varphi \in (0, \pi/2)$ ) дает  $\cos \alpha_f = 0$  или  $\cos \alpha_f = \pm 1$ , откуда следует что итерационный процесс (4.1) имеет на интервале  $(-\pi, \pi]$  четыре стационарные точки:

$$\alpha_{f1} = -\pi/2, \quad \alpha_{f2} = 0, \quad \alpha_{f3} = \pi/2, \quad \alpha_{f4} = \pi \quad (4.3)$$

Исследуем их устойчивость. Напомним основные определения:

Стационарная точка  $\alpha_f$  итерационного процесса (4.1) называется устойчивой, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что если  $|\alpha_1 - \alpha_f| < \delta$ , то  $|\alpha_k - \alpha_f| < \varepsilon$  для любого  $k = 1, 2, \dots$

Стационарная точка  $\alpha_f$  итерационного процесса (4.1) называется асимптотически устойчивой, если она устойчива и, кроме того,  $\alpha_k \rightarrow \alpha_f$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Известно, что если функция  $F(\alpha, \varphi)$  дифференцируема по  $\alpha$  в стационарной точке  $\alpha_f$ , то эта стационарная точка асимптотически устойчива, если  $|\partial F(\alpha, \varphi) / \partial \alpha| < 1$  при  $\alpha = \alpha_f$ , и неустойчива, если  $|\partial F(\alpha, \varphi) / \partial \alpha| > 1$  при  $\alpha = \alpha_f$ .

Дифференцирование функции (3.12) дает

$$\frac{\partial F(\alpha, \varphi)}{\partial \alpha} = \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi} \quad (4.4)$$

При  $\alpha = \alpha_{f1} = -\pi/2$  и  $\alpha = \alpha_{f3} = \pi/2$  имеем

$$\partial F(\alpha, \varphi) / \partial \alpha = \cos \varphi$$

Следовательно, стационарные точки  $\alpha_{f1} = -\pi/2$  и  $\alpha_{f3} = \pi/2$  асимптотически устойчивы.



При  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi$  из (4.4) получим

$$\partial F(\alpha, \varphi) / \partial \alpha = 1 / \cos \varphi$$

Следовательно, стационарные точки  $\alpha_{f2} = 0$  и  $\alpha_{f4} = \pi$  итерационного процесса (4.1) неустойчивы.

Полученный результат означает, что регулярное движение шагающего робота в трубе, стационарное по углу  $\alpha$  наклона плоскости  $\pi_2$  к экваториальной плоскости  $XZ$  тороидальной трубы, устойчиво, если на первом полушаге каждого шага плоскость опорных ног совпадает с плоскостью  $XZ$  и неустойчиво, если на первом полушаге каждого шага опорные ноги лежат в плоскости, перпендикулярной плоскости  $XZ$ .

Отметим, что при  $\alpha = \alpha_{fi}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) поворот корпуса робота необходимо производить только на одном определенном полушаге, а на другом полушаге корпус робота может двигаться поступательно. Это вытекает из формул (3.6) и (3.7) при подстановке в них значений  $\alpha_{fi}$  вместо  $\alpha_0$ . При  $\alpha_0 = \alpha_{f1} = -\pi/2$  и  $\alpha_0 = \alpha_{f3} = \pi/2$  (устойчивые стационарные значения) имеем  $\varphi_1^* = \mp \varphi$ ,  $\varphi_2^* = 0$ , и, следовательно, вращение корпуса необходимо только на первом полушаге. При  $\alpha_0 = \alpha_{f2} = 0$  и  $\alpha_0 = \alpha_{f4} = \pi$  (неустойчивые стационарные значения) из (3.6) и (3.7) получим  $\varphi_1^* = 0$ ,  $\varphi_2^* = \pm \varphi$ , и, следовательно, вращение корпуса необходимо только на втором полушаге.

Устойчивые стационарные точки  $\alpha_{f1}$  и  $\alpha_{f3}$  являются точками притяжения для всех движений в определенных интервалах начальных условий. Более точно, итерационный процесс (4.1) из любого начального состояния  $\alpha_1$ , отличного от неустойчивых стационарных точек  $\alpha_{f2} = 0$  и  $\alpha_{f4} = \pi$ , монотонно сходится к устойчивой стационарной точке, ближайшей к  $\alpha_1$ , а именно

$$\alpha_k \rightarrow -\pi/2 \text{ при } -\pi < \alpha_1 < 0, \quad \alpha_k \rightarrow \pi/2 \text{ при } 0 < \alpha_1 < \pi \quad (4.5)$$

Покажем, что если  $0 < \alpha_1 < \pi/2$ , то  $\alpha_k \rightarrow \pi/2$ . Так как  $\sin \alpha > 0$ ,  $\cos \alpha > 0$  при  $0 < \alpha < \pi/2$ , то из (3.12) при  $\varphi \in (0, \pi/2)$  вытекает, что  $F(\alpha, \varphi) \in (0, \pi/2)$ , если  $\alpha \in (0, \pi/2)$  и, в силу (4.1),  $\alpha_k \in (0, \pi/2)$  при всех  $k = 1, 2, \dots$ , если  $\alpha_1 \in (0, \pi/2)$ . Таким образом, если начальная точка  $\alpha_1$  последовательности  $\alpha_k$  принадлежит интервалу  $(0, \pi/2)$ , то и вся последовательность принадлежит этому интервалу и, следовательно, ограничена.

Рассмотрим функцию  $F(\alpha, \varphi)$ , определенную равенством (3.12). Обозначим

$$u(\alpha, \varphi) = \frac{\cos \alpha \cos \varphi}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi}} = \frac{\cos \alpha \cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha}} \quad (4.6)$$

При  $\alpha \in (0, \pi/2]$  имеем

$$F(\alpha, \varphi) = \arccos u(\alpha, \varphi) \quad (4.7)$$

Если  $\alpha \in (0, \pi/2)$  и  $\varphi \in (0, \pi/2)$ , то из (4.6) вытекают неравенства

$$0 < u(\alpha, \varphi) < \cos \alpha \quad (4.8)$$

Поскольку функция  $\arccos u$  монотонно убывает на отрезке  $-1 \leq u \leq 1$ , из (4.7) и (4.8) следуют соотношения

$$\alpha < F(\alpha, \varphi) < \pi/2 \quad (4.9)$$

В соответствии с (4.1) и (4.9) имеем  $\alpha_{k+1} > \alpha_k$ , т.е. последовательность  $\alpha_k$  монотонно возрастает, если  $\alpha_1 \in (0, \pi/2)$ . Следовательно, будучи ограниченной, эта последовательность имеет предел, принадлежащий интервалу  $(0, \pi/2]$ .

Так как функция  $F(\alpha, \varphi)$  непрерывна по  $\alpha$  при  $\varphi \in (0, \pi/2)$ , пределом последовательности  $\alpha_k$  может быть только стационарная точка в интервале  $(0, \pi/2]$ . Единственной такой точкой является  $\alpha = \pi/2$ .

Аналогично рассматриваются другие интервалы изменения  $\alpha_1$  в (4.5).

**5. Перемещение центра масс корпуса робота.** Вычислим перемещения центра масс  $C$  корпуса робота  $\Delta R_1(\tau)$  и  $\Delta R_2(t_1)$  на первом и втором полушагах соответственно. Из (2.6) следует

$$R_C(0) + \Delta R_1(\tau) + \Delta R_2(t_1) = R_C(t_1) \quad (5.1)$$

Введем две вспомогательные неподвижные системы координат  $C'x'y'z'$  и  $C''x''y''z''$ , которые совпадают с системой координат  $Cxyz$ , связанной с корпусом робота, в момент 0 начала шага и в момент  $\tau$  окончания первого полушага соответственно. В этих системах координат вектор-функции  $\Delta R_1(t)$  и  $\Delta R_2(t_2)$  представляются следующим образом:

$$\{\Delta R_1(t)\}_{x'y'z'} = \begin{Bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta y_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad t \in [0, \tau] \quad (5.2)$$

$$\{\Delta R_2(t)\}_{x''y''z''} = \begin{Bmatrix} \Delta x_2(t) \\ 0 \\ \Delta z_2(t) \end{Bmatrix}, \quad t \in [\tau, t_1]$$

Обозначим  $\Delta x_1(\tau) = \Delta x_1^*$ ,  $\Delta y_1(\tau) = \Delta y_1^*$ ,  $\Delta x_2(t_1) = \Delta x_2^*$ ,  $\Delta z_2(t_1) = \Delta z_2^*$  и спроектируем векторное равенство (5.1) на оси системы координат  $OXYZ$ . Переход от систем координат  $C'x'y'z'$  и  $C''x''y''z''$  к системе  $OXYZ$  задается матрицами  $\Gamma^T(0)$  и  $\Gamma^T(\tau)$  соответственно. Используя соотношения (2.3), (2.4), (3.1) и (5.2), получим

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{Bmatrix} + \Gamma_1^T(\alpha_0) \begin{Bmatrix} \Delta x_1^* \\ \Delta y_1^* \\ 0 \end{Bmatrix} + \Gamma_1^T(\alpha_0) \Gamma_3^T(\varphi_1^*) \begin{Bmatrix} \Delta x_2^* \\ 0 \\ \Delta z_2^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \sin \varphi \\ 0 \\ R \cos \varphi \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

Система (5.3) приводится к виду

$$\Delta x_1^* + \Delta x_2^* \cos \varphi_1^* = R \sin \varphi \quad (5.4)$$

$$\Delta y_1^* \cos \alpha_0 + \Delta x_2^* \cos \alpha_0 \sin \varphi_1^* - \Delta z_2^* \sin \alpha_0 = 0 \quad (5.5)$$

$$\Delta y_1^* \sin \alpha_0 + \Delta x_2^* \sin \alpha_0 \sin \varphi_1^* + \Delta z_2^* \cos \alpha_0 = R(\cos \varphi - 1) \quad (5.6)$$

Вычитая из уравнения (5.6), умноженного на  $\cos \alpha_0$ , уравнение (5.5) умноженное на  $\sin \alpha_0$ , найдем однозначно величину  $\Delta z_2^*$ :

$$\Delta z_2^* = R \cos \alpha_0 (\cos \varphi - 1) \quad (5.7)$$

Остальные компоненты перемещений центра масс робота должны быть определены из уравнения (5.4) и уравнения (5.5) или (5.6), в которое вместо  $\Delta z_2^*$  подставлено выражение (5.7). Таким образом получаем систему двух уравнений

$$\Delta x_1^* + \Delta x_2^* \cos \varphi_1^* = R \sin \varphi \quad (5.8)$$

$$\Delta y_1^* + \Delta x_2^* \sin \varphi_1^* = R \sin \alpha_0 (\cos \varphi - 1)$$

относительно трех неизвестных  $\Delta x_1^*$ ,  $\Delta y_1^*$  и  $\Delta x_2^*$ . Решение этой системы неединствен-

но и, следовательно, имеется определенный произвол в выборе перемещений центра масс корпуса робота на полушагах. При планировании движений робота в трубе этот произвол должен быть устранен наложением связи на переменные  $\Delta x_1^*$ ,  $\Delta y_1^*$  и  $\Delta x_2^*$  таким образом, чтобы система уравнений, дополненная уравнением связи, имела единственное решение.

Положим  $\Delta x_1^* = \Delta x_2^*$ . Тогда из (5.8) с учетом выражения (3.5) для  $\cos \varphi_1^*$  (с выбором знака +) получим

$$\Delta x_1^* = \Delta x_2^* = R \frac{\sin \varphi \sqrt{\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi}} \quad (5.9)$$

$$\Delta y_1^* = R \sin \alpha_0 (\cos \varphi - 1) \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi} - 1}{\cos \varphi + \sqrt{\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi}}$$

$$\Delta z_2^* = R \cos \alpha_0 (\cos \varphi - 1)$$

Итак, пусть заданы радиус поворота трубы  $R$ , угловая длина шага  $\varphi$  (или линейная длина шага  $s = R\varphi$ ) и угол  $\alpha_0$  наклона плоскости  $xz$  системы координат  $Sxuz$ , связанной с корпусом робота, по отношению к экваториальной плоскости тороидальной трубы (плоскости  $XZ$  неподвижной системы координат  $OXYZ$ ) в начале шага. Тогда углы поворота корпуса робота за первый и второй полушаги рассчитываются по формулам (3.6) и (3.7), а перемещения его центра масс – по формулам (5.9).

Рассмотрим предельный случай этих зависимостей при  $R \rightarrow \infty$ , что соответствует движению в прямолинейной трубе.

Так как  $\varphi = s/R \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ , то из (3.6), (3.7) вытекает  $\varphi_1^* \rightarrow 0$ ,  $\varphi_2^* \rightarrow 0$ . Функции (5.9) имеют при  $\varphi \rightarrow 0$  следующую асимптотику:

$$\Delta x_1^* = \Delta x_2^* = \frac{R}{2} [\varphi + o(\varphi^2)] = \frac{s}{2} + o\left(\frac{s^2}{R}\right)$$

$$\Delta y_1^* = \frac{R}{16} \sin \alpha_0 [\varphi^4 \cos^2 \alpha_0 + o(\varphi^4)] = \frac{R}{16} \sin \alpha_0 \left[ \left(\frac{s}{R}\right)^4 \cos^2 \alpha_0 + o\left(\left(\frac{s}{R}\right)^4\right) \right]$$

$$\Delta z_2^* = -\frac{R}{2} \cos \alpha_0 [\varphi^2 + o(\varphi^3)] = -\frac{R}{2} \cos \alpha_0 \left[ \left(\frac{s}{R}\right)^2 + o\left(\left(\frac{s}{R}\right)^3\right) \right]$$

Отсюда вытекает

$$\Delta x_1^* \rightarrow s/2, \quad \Delta x_2^* \rightarrow s/2, \quad \Delta y_1^* \rightarrow 0, \quad \Delta z_2^* \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty$$

Таким образом, при  $R \rightarrow \infty$  параметры регулярного движения робота в тороидальной трубе переходят в параметры регулярного движения в прямолинейной трубе, при котором корпус робота движется поступательно и за каждый полушаг перемещается на расстояние, равное половине длины шага.

**6. Планирование движения робота.** Для того, чтобы полностью определить движение робота в тороидальной трубе, нужно для каждого ( $k$ -го) шага задать шесть дважды дифференцируемых скалярных функций:

$$\Delta x_{1k}(t), \quad \Delta y_{1k}(t), \quad t \in [0, \tau]; \quad (6.1)$$

$$\Delta x_{2k}(t), \quad \Delta z_{2k}(t), \quad t \in [\tau, t_1];$$

$$\varphi_{1k}(t), \quad t \in [0, \tau]; \quad \varphi_{2k}(t); \quad t \in [\tau, t_1]$$

Здесь второй индекс  $k$  отвечает номеру шага. Функции (6.1) должны быть заданы таким образом, чтобы вектор-функция  $\mathbf{R}_C(t)$ , описывающая траекторию центра масс корпуса робота, и матрица-функция  $\Gamma(t)$ , описывающая изменение ориентации корпуса робота, были дважды дифференцируемыми на всем интервале движения. Из этого требования вытекают условия сопряжения функций (6.1) в момент  $\tau$  окончания первого полушага и в момент  $t_1$  окончания очередного шага.

Из (2.6), (2.7) и (5.2) вытекают начальные условия

$$\Delta x_{1k}(0) = 0, \quad \Delta y_{1k}(0) = 0, \quad \varphi_{1k}(0) = 0 \quad (6.2)$$

$$\Delta x_{2k}(\tau) = 0, \quad \Delta z_{2k}(\tau) = 0, \quad \varphi_{2k}(\tau) = 0$$

для функций (6.1). Из предыдущих разделов следуют соотношения

$$\Delta x_{1k}(\tau) = \Delta x_{1k}^*, \quad \Delta y_{1k}(\tau) = \Delta y_{1k}^*, \quad \varphi_{1k}(\tau) = \varphi_{1k}^* \quad (6.3)$$

$$\Delta x_{2k}(t_1) = \Delta x_{2k}^*, \quad \Delta z_{2k}(t_1) = \Delta z_{2k}^*, \quad \varphi_{2k}(t_1) = \varphi_{2k}^*$$

Правые части равенств (6.3) вычисляются по формулам (3.6), (3.7) и (5.9), где нужно заменить  $\alpha_0$  на  $\alpha_k$  и снабдить переменные в левых частях индексом  $k$ .

Непрерывность функций  $\mathbf{R}_C(t)$  и  $\Gamma(t)$  в точках  $t = \tau$  и  $t = t_1$  вытекает из их определения по формулам (2.6) и (2.7). Из условия непрерывности скорости  $\dot{\mathbf{R}}_C(t)$  центра масс корпуса робота в момент  $t = \tau$  следуют соотношения

$$\Delta \dot{x}_{2k}(\tau) = \Delta \dot{x}_{1k}(\tau) \cos \varphi_{1k}^* + \Delta \dot{y}_{1k}(\tau) \sin \varphi_{1k}^* \quad (6.4)$$

$$0 = -\Delta \dot{x}_{1k}(\tau) \sin \varphi_{1k}^* + \Delta \dot{y}_{1k}(\tau) \cos \varphi_{1k}^*$$

$$\Delta \dot{z}_{2k}(\tau) = 0$$

Равенства (6.4) представляют собой координатную запись векторного условия непрерывности  $\dot{\mathbf{R}}_C(\tau - 0) = \dot{\mathbf{R}}_C(\tau + 0)$  в системе координат  $C''x''y''z''$ , совпадающей со связанной с корпусом робота системой координат  $Cxyz$  в момент  $\tau$  окончания первого полушага. Совершенно аналогично из условия непрерывности ускорения  $\ddot{\mathbf{R}}_C(t)$  центра масс корпуса робота в момент  $t = \tau$  имеем

$$\Delta \ddot{x}_{2k}(\tau) = \Delta \ddot{x}_{1k}(\tau) \cos \varphi_{1k}^* + \Delta \ddot{y}_{1k}(\tau) \sin \varphi_{1k}^* \quad (6.5)$$

$$0 = -\Delta \ddot{x}_{1k}(\tau) \sin \varphi_{1k}^* + \Delta \ddot{y}_{1k}(\tau) \cos \varphi_{1k}^*$$

$$\Delta \ddot{z}_{2k}(\tau) = 0$$

Условия непрерывности функций  $\mathbf{R}_C(t)$  и  $\ddot{\mathbf{R}}_C(t)$  в момент окончания  $k$ -го (начала  $k + 1$ -го) шага дают

$$\Delta \dot{x}_{1k+1}(0) = \Delta \dot{x}_{2k}(t_1) \cos \varphi_{2k}^* - \Delta \dot{z}_{2k}(t_1) \sin \varphi_{2k}^* \quad (6.6)$$

$$\Delta \dot{y}_{1k+1}(0) = 0$$

$$0 = \Delta \dot{x}_{2k}(t_1) \sin \varphi_{2k}^* + \Delta \dot{z}_{2k}(t_1) \cos \varphi_{2k}^*$$

$$\Delta \ddot{x}_{1k+1}(0) = \Delta \ddot{x}_{2k}(t_1) \cos \varphi_{2k}^* - \Delta \ddot{z}_{2k}(t_1) \sin \varphi_{2k}^* \quad (6.7)$$

$$\Delta \ddot{y}_{1k+1}(0) = 0$$

$$0 = \Delta \ddot{x}_{2k}(t_1) \sin \varphi_{2k}^* + \Delta \ddot{z}_{2k}(t_1) \cos \varphi_{2k}^*$$

Соотношения (6.6) и (6.7) представляют собой координатную запись условий непрерывности скорости и ускорения центра масс корпуса робота в момент

окончания  $k$ -го шага в системе координат, совпадающей с  $S_{хуz}$  в этот момент времени.

Условия непрерывности матричных функций  $\dot{\Gamma}(t)$  и  $\ddot{\Gamma}(t)$  в моменты времени  $\tau$  и  $t_1$  эквивалентны условиям непрерывности угловой скорости  $\omega(t)$  и углового ускорения  $\dot{\omega}(t)$  корпуса робота, соответственно, в указанные моменты времени. Поскольку оси, вокруг которых происходит вращение корпуса робота на первом и втором полушагах, ортогональны, ортогональны и соответствующие векторы угловых скоростей и ускорений, и условия непрерывности функций  $\omega(t)$  и  $\dot{\omega}(t)$  дают

$$\dot{\varphi}_{1k}(\tau) = 0, \quad \dot{\varphi}_{2k}(\tau) = 0, \quad \dot{\varphi}_{2k}(t_1) = 0, \quad \dot{\varphi}_{1k+1}(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (6.8)$$

$$\ddot{\varphi}_{1k}(\tau) = 0, \quad \ddot{\varphi}_{2k}(\tau) = 0, \quad \ddot{\varphi}_{2k}(t_1) = 0, \quad \ddot{\varphi}_{1k+1}(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (6.9)$$

Функции (6.1), удовлетворяющие условиям (6.2)–(6.9) могут быть выбраны различными способами. Для примера приведем некоторые возможные законы изменения угловых и линейных переменных (6.1).

Найдем выражения для  $\varphi_{1k}(t)$  и  $\varphi_{2k}(t)$  в виде полиномов наименьшей степени. Так как соотношения (6.2), (6.3), (6.8) и (6.9) налагают на каждую из этих функций по шесть краевых условий, то наименьшая степень искомых полиномов равна пяти. Вычислив коэффициенты полиномов из соответствующих краевых условий, получим

$$\varphi_{1k}(t) = \varphi_{1k}^* P\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad t \in [0, \tau]; \quad \varphi_{2k}(t) = \varphi_{2k}^* P\left(\frac{t-\tau}{t_1-\tau}\right), \quad t \in [\tau, t_1]$$

$$P(\xi) = 6\xi^5 - 15\xi^4 + 10\xi^3, \quad \xi \in [0, 1] \quad (6.10)$$

Полином  $P(\xi)$  монотонно возрастает от нуля до единицы на отрезке  $[0, 1]$ , причем первая и вторая производные полинома  $P(\xi)$  на концах указанного отрезка обращаются в нуль. В соответствии с этим функция  $\varphi_{1k}(t)$  монотонно возрастает от нуля до  $\varphi_{1k}^*$  на отрезке  $[0, \tau]$ , а функция  $\varphi_{2k}(t)$  монотонно возрастает от нуля до  $\varphi_{2k}^*$  на отрезке  $[\tau, t_1]$ .

В аналогичном виде могут быть заданы и функции, описывающие движение центра масс корпуса робота:

$$\Delta x_{1k}(t) = \Delta x_{1k}^* P\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad \Delta y_{1k}(t) = \Delta y_{1k}^* P\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad t \in [0, \tau] \quad (6.11)$$

$$\Delta x_{2k}(t) = \Delta x_{2k}^* P\left(\frac{t-\tau}{t_1-\tau}\right), \quad \Delta z_{2k}(t) = \Delta z_{2k}^* P\left(\frac{t-\tau}{t_1-\tau}\right), \quad t \in [\tau, t_1]$$

В этом случае первые и вторые производные функций (6.11) равны нулю на концах соответствующих отрезков, и условия (6.4)–(6.7), очевидно, удовлетворяются.

Приведем еще один способ полиномиального задания функций  $\Delta x_{1k}(t)$ ,  $\Delta y_{1k}(t)$ ,  $\Delta x_{2k}(t)$ ,  $\Delta z_{2k}(t)$ , при котором в конце полушагов скорость и ускорение центра масс робота в нуль не обращаются.

Будем искать эти функции в следующем виде

$$\Delta x_{1k}(t) = A_{1k}t + A_{2k}t^2 + A_{3k}t^3 + A_{4k}t^4 + A_{5k}t^5 \quad (6.12)$$

$$\Delta y_{1k}(t) = B_{3k}t^3$$

$$\Delta x_{2k}(t) = C_{1k}(t-\tau) + C_{2k}(t-\tau)^2 + C_{3k}(t-\tau)^3 + C_{4k}(t-\tau)^4 + C_{5k}(t-\tau)^5$$

$$\Delta z_{2k}(t) = D_{3k}(t-\tau)^3$$

Для полиномов (6.12) выполнены начальные условия (6.2), соотношения (6.4) и (6.5) для  $\Delta z_{2k}(\tau)$  и  $\Delta \dot{z}_{2k}(\tau)$ , а также соотношения (6.6) и (6.7) для  $\Delta y_{1k}(0)$  и  $\Delta \ddot{y}_{1k}(0)$ . Подставив полиномы (6.12) в оставшиеся уравнения (6.4)–(6.7) и в соответствующие соотношения (6.3), найдем их коэффициенты:

$$A_{3k} = -\frac{9\Delta y_{1k}^*}{\tau^3} \operatorname{ctg} \varphi_{1k}^* + \frac{10\Delta x_{1k}^*}{\tau^3} - \frac{6A_{1k}^*}{\tau^2} - \frac{3A_{2k}^*}{\tau} \quad (6.13)$$

$$A_{4k} = \frac{15\Delta y_{1k}^*}{\tau^4} \operatorname{ctg} \varphi_{1k}^* - \frac{15\Delta x_{1k}^*}{\tau^4} + \frac{8A_{1k}^*}{\tau^3} + \frac{3A_{2k}^*}{\tau^2}$$

$$A_{5k} = -\frac{6\Delta y_{1k}^*}{\tau^5} \operatorname{ctg} \varphi_{1k}^* + \frac{6\Delta x_{1k}^*}{\tau^5} - \frac{3A_{1k}^*}{\tau^4} - \frac{A_{2k}^*}{\tau^3}$$

$$B_{3k} = \Delta y_{1k}^* / \tau^3$$

$$C_{1k} = \frac{3\Delta y_{1k}^*}{\tau \sin \varphi_{1k}^*}, \quad C_{2k} = \frac{3\Delta y_{1k}^*}{\tau^2 \sin \varphi_{1k}^*}$$

$$C_{3k} = \frac{9\Delta z_{2k}^*}{(t_1 - \tau)^3} \operatorname{ctg} \varphi_{2k}^* + \frac{10\Delta x_{2k}^*}{(t_1 - \tau)^3} - \frac{6C_{1k}^*}{(t_1 - \tau)^2} - \frac{3C_{2k}^*}{t_1 - \tau}$$

$$C_{4k} = -\frac{15\Delta z_{2k}^*}{(t_1 - \tau)^4} \operatorname{ctg} \varphi_{2k}^* - \frac{15\Delta x_{2k}^*}{(t_1 - \tau)^4} + \frac{8C_{1k}^*}{(t_1 - \tau)^3} + \frac{3C_{2k}^*}{(t_1 - \tau)^2}$$

$$C_{5k} = \frac{6\Delta z_{2k}^*}{(t_1 - \tau)^5} \operatorname{ctg} \varphi_{2k}^* + \frac{6\Delta x_{2k}^*}{(t_1 - \tau)^5} - \frac{3C_{1k}^*}{(t_1 - \tau)^4} - \frac{C_{2k}^*}{(t_1 - \tau)^3}$$

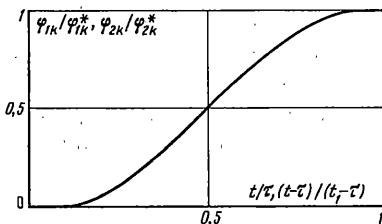
$$D_{3k} = \Delta z_{2k}^* / (t_1 - \tau)^3$$

$$A_{1k+1} = -\frac{3\Delta z_{2k}^*}{(t_1 - \tau) \sin \varphi_{2k}^*}, \quad A_{2k+1} = -\frac{3\Delta z_{2k}^*}{(t_1 - \tau)^2 \sin \varphi_{2k}^*}$$

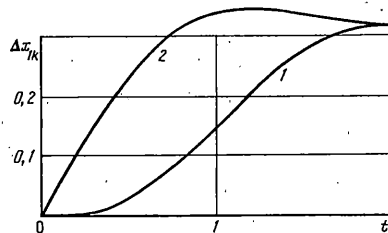
Таким образом, движение корпуса робота (т.е. функции (6.1)), удовлетворяющее всем наложенным условиям, может быть построено в явной форме различными способами.

Остановимся кратко на планировании движения ног робота. В соответствии с ограничением 1 из п. 2, в каждый момент времени четыре ноги находятся в опорной фазе, а остальные четыре – в фазе переноса. Движение опорных ног определяется заданием положения стоп на поверхности трубы и законом движения корпуса. При моделировании, некоторые результаты которого приводятся в разд. 7, положение стоп опорных ног задавалось следующим образом. На каждом шаге выбирались две меридиональные плоскости тора, и стопы располагались в точках, где эти плоскости пересекаются с одной из плоскостей  $\pi_1$  или  $\pi_2$  и одновременно с поверхностью трубы.

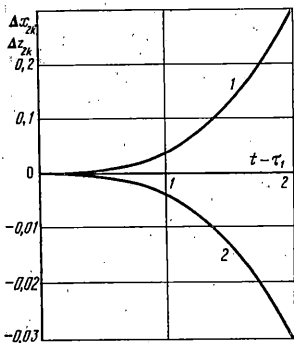
Пусть  $i$ -я нога робота – опорная. Зная радиус-вектор  $\mathbf{R}_C(t)$  центра масс корпуса



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

робота относительно начала неподвижной системы координат  $OXYZ$  и радиус-вектор  $\mathbf{R}_{P_i}$  стопы  $P_i$  относительно точки  $O$ , найдем радиус-вектор стопы  $P_i$  относительно шарнира  $A_i$ , связывающего  $i$ -ю ногу с корпусом робота (см. п. 1):

$$\mathbf{A}_i \mathbf{P}_i = \mathbf{R}_{P_i} - \mathbf{R}_C(t) - \mathbf{R}_i \quad (6.14)$$

Здесь  $\mathbf{R}_i = \mathbf{C} \mathbf{A}_i$ . В системе координат  $S_{xyz}$ , связанной с корпусом робота, вектор  $\mathbf{R}_i$  представляется соответствующим равенством (1.2). Спроектировав векторное равенство (6.14) на оси системы координат  $A_i x_i y_i z_i$  (см. п. 1), используя матрицу  $\Gamma(t)$  и соответствующую матрицу  $\Gamma^{(i)}$  из (1.1), найдем координаты  $x_{P_i}(t)$  и  $y_{P_i}(t)$  стопы  $P_i$

в этой системе отсчета. Соотношения (1.4) определяют углы  $q_{1i}(t)$  и  $q_{2i}(t)$  в шарнирах  $i$ -й ноги при заданном законе движения корпуса. Отметим, что для однозначного нахождения углов  $q_{1i}$  и  $q_{2i}$  из соотношений (1.4) необходимо задать параметр  $\gamma_i = \pm 1$ , который определяет направление сгиба ноги в колене.

Движение ног в фазе переноса может быть определено различными способами. Главные условия при этом — попадание стоп в конце переноса в заданные точки опоры на поверхности трубы и отсутствие столкновений звеньев ног друг с другом, с корпусом робота и с поверхностью трубы. Планирование движения ног в фазах опоры и переноса осуществлялось аналогично тому, как это делалось в работе [2] для случая движения в прямолинейной трубе.

**7. Результаты моделирования.** Приведем некоторые результаты численного моделирования движения корпуса робота в тороидальной трубе на основе аналитических зависимостей (3.6), (3.7), (3.12), (4.1), (5.9), (6.10)–(6.13). При моделировании геометрические параметры робота (см. п. 1) фиксировались следующим образом:  $a = -b = 0,4$  м,  $d = 0,11$  м,  $l_1 = l_2 = 0,15$  м. Эти значения соответствуют исследовательскому макету робота, созданному в Мюнхенском техническом университете, и определяют его размеры. Можно считать, что весь корпус робота расположен внутри цилиндра, ось которого совпадает с осью робота, длина равна  $a + b = 0,8$  м, а радиус основания равен  $d = 0,11$  м. Радиус трубы брался равным  $\rho = 0,375$  м; именно в такой трубе планируется проводить первые испытания робота.

Численное моделирование осуществлялось для различных значений радиуса поворота  $R$ , угловой длины шага  $\phi$  и начального угла  $\alpha_1$  наклона корпуса робота по отношению к экваториальной плоскости тороидальной трубы. Результаты моделирования представлялись в виде графиков зависимостей  $\phi_{1k}(t)$ ,  $\phi_{2k}(t)$ ,  $\Delta x_{1k}(t)$ ,  $\Delta y_{1k}(t)$ ,  $\Delta x_{2k}(t)$ ,  $\Delta z_{2k}(t)$ , описывающих движение корпуса на полушагах (здесь  $k = 1, 2, \dots$  — номер шага). Кроме того, осуществлялось анимационное представление движения робота на экране дисплея, что позволяло визуально наблюдать планируемое движение и, при необходимости, корректировать его параметры, например, угловую длину шага  $\phi$ , с целью не допустить столкновения корпуса робота со стенками трубы и/или со звеньями ног.

Для примера рассмотрим прохождение роботом поворота трубы на угол  $90^\circ$  при радиусе поворота  $R = 5$  м и угловой длине шага  $\phi = \pi/24$ . Очевидно, что при таком значении  $\phi$  весь криволинейный участок проходится за двенадцать шагов. Начальное значение угла наклона корпуса робота к экваториальной плоскости тороидального участка трубы примем равным  $\alpha_1 = \pi/4$ . Будем считать, что полушаги имеют равные продолжительности при общей длительности шага  $t_1 = 4$  с.

Расчеты показывают, что от шага к шагу угол  $\alpha_k$  наклона корпуса робота к экваториальной плоскости тора растет, приближаясь к  $\pi/2$  в соответствии с выводами

п. 4. Угол  $\Phi_{1k}^*$  поворота корпуса робота на первом полушаге монотонно возрастает, а угол  $\Phi_{2k}^*$  его поворота на втором полушаге монотонно убывает.

На первом полушаге каждого шага перемещение центра масс корпуса робота практически происходит вдоль его оси, точнее, вдоль касательной к оси трубы в точке, где центр масс корпуса робота находился в начале шага (величина  $\Delta y_{1k}^*$  пренебрежимо мала по сравнению с  $\Delta x_{1k}^*$ ). Осевые компоненты  $\Delta x_{1k}^*$  и  $\Delta x_{2k}^*$  перемещений центра масс корпуса робота для всех шагов практически одинаковы. "Поперечная" компонента  $\Delta z_{2k}^*$  смещения уменьшалась по абсолютной величине на десятки доли миллиметра за каждый шаг, что также практически несущественно.

Зависимость от времени углов  $\Phi_{1k}$  и  $\Phi_{2k}$  поворота корпуса робота на полушагах определяется соотношениями (6.10). В нормализованном виде эта зависимость представлена на фиг. 5.

Движение центра масс корпуса робота задавалось в п. 6 либо в виде (6.11) либо в виде (6.12), (6.13). Для способа (6.11) нормализованная зависимость от времени компонент перемещения центра масс описывается тем же графиком, что и угловые переменные на фиг. 5.

На фиг. 6 и 7 показано, как изменяются со временем компоненты перемещения центра масс корпуса робота при законе движения, заданном в виде (6.12), (6.13). Рекуррентные формулы (6.13) для вычисления коэффициентов полиномов (6.12) требуют задания начальных (для  $k = 1$ ) значений коэффициентов  $A_{1k}$  и  $A_{2k}$ . При моделировании полагалось  $A_{11} = 0$ ,  $A_{21} = 0$ . Это означает, что в начале первого шага скорость и ускорение центра масс корпуса робота равны нулю.

На фиг. 6 представлены зависимости от времени осевой компоненты  $\Delta x_{1k}$  смещения центра масс корпуса робота на первом полушаге для первого и второго шагов (кривые 1 и 2 соответственно). Для последующих шагов графики функций  $\Delta x_{1k}(t)$  практически совпадают с кривой 2.

На фиг. 7 изображены зависимости от времени компонент  $\Delta x_{2k}$  (кривая 1) и  $\Delta z_{2k}$  (кривая 2) перемещения центра масс корпуса робота на втором полушаге. Для всех шагов эти кривые практически не отличаются.

Результаты моделирования показывают, что предложенный в работе способ построения движений позволяет роботу преодолевать закругленные участки трубопроводов посредством регулярных походок.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-01142).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотник Н.Н., Черноусько Ф.Л. Оптимизация параметров шагающего робота для движения в трубах // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 27–41.
2. Болотник Н.Н., Костин Г.В., Черноусько Ф.Л. Моделирование и оптимизация движения шагающего робота в трубе // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 3. С. 176–191.
3. Pfeiffer F., Rossmann T., Chernousko F.L., Bolotnik N.N. Optimization of structural parameters and gaits of a pipe-crawling robot // Proc. IUTAM Symp. Optimization of Mechanical Systems. Stuttgart, Germany, 1995. Dordrecht: Kluwer, 1996. P. 231–238.