

УДК 531.8

© 1998 г. Е.А. ПРИВАЛОВ

О ДИНАМИКЕ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОСТОРОННИМ ОГРАНИЧИТЕЛЕМ ДВИЖЕНИЯ И НЕИДЕАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ ЭНЕРГИИ

Рассматривается виброударная система, колебания которой вызваны действием источника периодического возбуждения ограниченной мощности. Исследования такого рода систем затрудняются двумя обстоятельствами: уравнения, описывающие движение осциллятора и источника возбуждения колебаний, связаны нелинейным образом; часть переменных в моменты ударов терпит бесконечные разрывы.

Первое из этих затруднений было преодолено в [1] при исследовании в квазилинейной постановке динамики осциллятора с учетом влияния его движения на источник возбуждения колебаний. В [2, 3] была предложена негладкая замена переменных, исключаяющая из уравнений виброударной системы члены с бесконечными разрывами. Применение этой замены позволило, в частности, изучить движение осциллятора, имеющего двусторонний ограничитель движения и неидеальный источник энергии [4]. В публикуемой работе модифицированным методом негладких преобразований [5] исследуется динамика взаимодействующего с источником энергии осциллятора с односторонним ограничителем движения.

Изучаются вынужденные движения осциллятора, вызываемые действием источника периодического возбуждения ограниченной мощности и сопровождающиеся ударами об односторонний ограничитель. Осциллятор представляет собой совершающее прямолинейные колебания тело массы m , соединенное с основанием пружиной жесткости c_0 . Положение осциллятора задается координатой x . Ограничитель движения смещен от положения $x = 0$ статического равновесия осциллятора на расстояние d . Будем полагать, что $x \geq d$. Если $d < 0$, осциллятор установлен с зазором относительно ограничителя, при $d > 0$ – с натягом. Удар об ограничитель считается мгновенным и характеризуется коэффициентом восстановления скорости r . Положим также, что величина $1 - r$ имеет порядок ϵ , где ϵ – малый параметр. Модель системы возбуждения колебаний приведена в [1]. В эту систему входят двигатель, кривошип и пружина. Кривошип прикреплен к ротору двигателя на расстоянии l от оси его вращения. Второй конец кривошипа, совершающий прямолинейные колебания, соединен с пружиной жесткости c_1 , передающей колебания осциллятору.

Динамика осциллятора и источника возбуждения колебаний описываются уравнениями

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + (c_0 + c_1)x = c_1 l \sin \varphi + F_1 \quad (1)$$

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + H_1 = L_1 + c_1 l (x - l \sin \varphi) \cos \varphi$$

Здесь t – время, β – коэффициент силы вязкого сопротивления движению осциллятора, F_1 – сила ударного действия ограничителя движения на осциллятор, φ – угол

поворота ротора двигателя, I – момент инерции ротора, H_1 и L_1 – характеристики двигателя: H_1 – момент сил сопротивления вращению ротора, L_1 – вращающий момент.

На практике характеристики H_1 и L_1 определяются экспериментально как функции угловой скорости $d\varphi/dt$ вращения ротора и задаются в виде графиков. Выявлены некоторые общие свойства зависимостей $H_1(d\varphi/dt)$ и $L_1(d\varphi/dt)$; H_1 – изменяющаяся по закону, близкому к линейному, возрастающая функция угловой скорости. Наоборот, зависимость $L_1(d\varphi/dt)$ для большинства типов двигателей – убывающая функция аргумента. В ряде случаев функция $L_1(d\varphi/dt)$ также по форме мало отличается от линейной.

При испытаниях строится также семейство регулировочных кривых $L_1(d\varphi/dt)$, получаемых при изменении параметров двигателя. Оказывается, что переход от одной кривой этого семейства к другой получается перемещением, близким к параллельному переносу.

Разделим первое уравнение системы (1) на m , второе – на I и перейдем к безразмерному времени $\tau = \omega t$, где $\omega = \sqrt{(c_0 + c_1)/m}$.

Уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{y} + x &= F - hy + p \sin \varphi \\ \ddot{\varphi} &= L - H + q(x - l \sin \varphi) \cos \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

$$p = c_1 l / (\omega^2 m), \quad h = \beta / (\omega m), \quad F = F_1 / (\omega^2 m)$$

$$L = L_1 / (\omega^2 I), \quad H = H_1 / (\omega^2 I), \quad q = c_1 l / (\omega^2 I)$$

где точка означает дифференцирование по τ . Будем считать, что величины h и p , а также выражение, стоящее в правой части третьего уравнения системы (1), имеют порядок ϵ .

В [5] указана негладкая замена переменных x, y на переменные A и ψ : $x = AS$, $y = -AS$, в которой используются периодические по ψ функции C, S, M , имеющие на периоде

$$T = \left[-\arccos \frac{d - k(A + d)}{A - k(A + d)}, \arccos \frac{d + k(A + d)}{A + k(A + d)} \right]$$

вид

$$C = \cos \psi + k(1 + d/A)M(\cos \psi - 1), \quad S = \sin \psi + k(1 + d/A)M \sin \psi$$

$$M = \begin{cases} -1 & \text{при } -\arccos \frac{d - k(A + d)}{A - k(A + d)} < \psi < 0 \\ 1 & \text{при } 0 < \psi < -\arccos \frac{d + k(A + d)}{A + k(A + d)} \end{cases}$$

$$k = (1 - r^2) / [2(1 + r^2)]$$

В результате этой замены первые два уравнения системы (2) преобразуются в уравнения относительно A и ψ , не содержащие членов с бесконечными разрывами. Будем пренебрегать в этих уравнениях и далее величинами порядка более высокого чем ϵ . Тогда получим [5]:

$$\dot{A} = -[p \sin \varphi + hAS + k(A + d)M]S \quad (3)$$

$$\dot{\psi} = 1 - A^{-1}[p \sin \varphi + hAS + k(A + d)M]C$$

Третье уравнение системы (2) представим в виде

$$\dot{\varphi} = v, \quad \dot{v} = L - H + q(AC - l \sin \varphi) \cos \varphi \quad (4)$$

Объединенная система уравнений (3), (4) имеет две медленные и две быстрые переменные [6]. Будем рассматривать резонансные случаи движения. Обозначив через $\Omega = 2\pi/T$ частоту колебаний осциллятора, считаем расстройку $n\Omega - v$ (n – целое число) величиной порядка ε . Введем фазу $\theta = n\psi - \varphi$ и запишем уравнения (3), (4) в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -[p \sin(n\Omega\psi - \theta) + hAS + k(A + d)M]S \\ \dot{\psi} &= 1 - A^{-1}[p \sin(n\Omega\psi - \theta) + hAS + k(A + d)M]C \\ \dot{\theta} &= n\Omega - v - n\Omega A^{-1}[p \sin(n\Omega\psi - \theta) + hAS + k(A + d)M]C \\ \dot{v} &= L - H + q[AC - l \sin(n\Omega\psi - \theta)] \cos(n\Omega\psi - \theta) \end{aligned}$$

допускающей осреднение правых частей уравнений по быстрой переменной ψ . В результате осреднения на отрезке $[-\arccos(d/A), \arccos(d/A)]$ для переменных A, θ, v получим

$$\dot{A} = P \cos \theta - AQ \quad (5)$$

$$\dot{\theta} = n\Omega - v - A^{-1}P \sin \theta, \quad \dot{v} = L - S$$

$$P = (-1)^{n+1} n\pi p \frac{\sqrt{1 - (d/A)^2}}{[\arccos(d/A)]^2 - n^2\pi^2}$$

$$Q = \frac{h}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{1 - (d/A)^2}}{\arccos(d/A)} \frac{d/A}{d/A} \right) + k \frac{1 - (d/A)^2}{\arccos(d/A)}$$

$$S = H + q(n\pi p)^{-1} A \arccos(d/A) P \cos \theta$$

Отметим, что при $d = 0$ уравнения упрощаются, с точностью до обозначений совпадают с уравнениями, полученными при исследовании линейного осциллятора с неидеальным источником энергии [1], и все результаты этой работы переносятся на изучаемую виброударную систему.

Рассмотрим общий случай $d \neq 0$. Будем исследовать стационарные режимы колебаний. Положив $\dot{A} = \dot{\theta} = \dot{v} = 0$, сведем задачу к нахождению корней системы уравнений

$$P \cos \theta = AQ, \quad P \sin \theta = A(n\Omega - v), \quad L = S \quad (6)$$

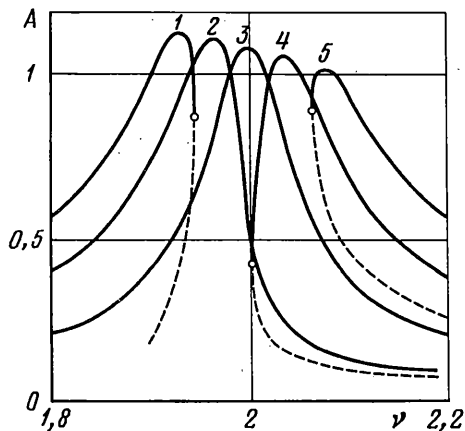
Исключим из первых двух уравнений этой системы переменную θ . Получим трансцендентное уравнение

$$P^2 = A^2[Q^2 + (n\Omega - v)^2] \quad (7)$$

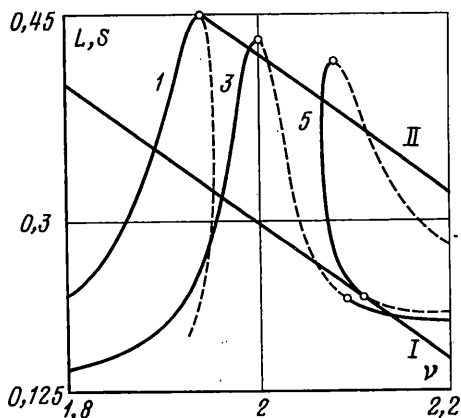
из которого найдем зависимость $A(v)$.

На фиг. 1 представлено семейство кривых $A(v)$, построенных при $n = 1$ для следующих значений параметров системы: $p = 0,1$, $h = 0,01$, $k = 0,0525$ ($r = 0,9$) и для пяти значений параметра d : $-0,06$; $-0,03$; 0 ; $0,03$; $0,06$. Этим значениям d соответствуют кривые с номерами 1–5.

Если считать, что движение осциллятора не оказывает влияния на динамику двигателя, т.е., источник возбуждения является идеальным, третье уравнение отделяется от системы (5). Первые два уравнения образуют систему относительно переменных A и θ , в которой частота v является параметром. Кривые $A(v)$ – амплитудно-



Фиг. 1



Фиг. 2

частотные характеристики (АЧХ) этой системы. Отметим, что при $d = 0$ график зависимости $A(\nu)$ имеет вид АЧХ линейного осциллятора с вершиной резонансной кривой при $\nu = 2$, при $d > 0$ АЧХ смещаются в зарезонансную зону и по форме походят на АЧХ осциллятора с жесткой характеристикой восстанавливающей силы, при $d < 0$ происходит смещение АЧХ в дорезонансную зону, и они приобретают черты АЧХ осциллятора, характеристика восстанавливающей силы которого является мягкой. К такого рода системам оказываются приложимы результаты исследования устойчивости стационарных колебаний нелинейных систем второго порядка [7]. В соответствии с этими результатами участки АЧХ, построенных на фиг. 1, где колебания являются неустойчивыми, проведены штриховыми линиями. Светлыми точками на кривых помечены границы устойчивых и неустойчивых участков.

Дальнейшее исследование динамики осциллятора с неидеальным источником возбуждения проведем, следуя методике, разработанной в [1]. Рассмотрим третье уравнение системы (6) – уравнение баланса вращающего момента L и суммарного демпфирующего момента S . Преобразуем правую часть этого уравнения, исключив из нее переменную θ и подставив найденную зависимость $A(\nu)$. Уравнение примет вид:

$$L(\nu) = S(\nu) \quad (8)$$

$$S(\nu) = H(\nu) + q(n\pi p)^{-1} A^2(\nu) Q[A(\nu)] \arccos[d / A(\nu)]$$

где S – выражение для момента сил сопротивления вращению ротора системы, состоящей из осциллятора и двигателя. Решения этого уравнения – стационарные значения частоты – находятся как абсциссы точек пересечения графиков функций $L(\nu)$ и $S(\nu)$, построенных в одних и тех же осях и масштабе.

На фиг. 2 представлены семейство регулировочных кривых $L(\nu)$ и семейство кривых $S(\nu)$. При этом предполагается, что функции $H(\nu)$ и $L(\nu)$ зависят от аргумента линейным образом: $L(\nu) = -a_1(\nu - \nu_0)$, $H(\nu) = a_2\nu$. Кривые семейства $S(\nu)$ построены при $a_2 = 0,01$ для значений параметра d , равных $-0,06$; 0 ; $0,06$; величины параметров n , p , h , k выбраны теми же, что при построении графиков на фиг. 1. Номера кривых (1, 3, 5) совпадают с номерами соответствующих кривых АЧХ. При построении кривых семейства $L(\nu_0)$ значение параметра a_1 выбрано равным $0,05$, значения параметра ν_0 равными $2,6$, $2,85$. Этим значениям соответствуют кривые с номерами I, II.

Обозначим через ν_* значения угловой скорости вращения ротора, соответствующие точкам пересечения кривых $L(\nu)$ и $S(\nu)$. После подстановки найденных таким образом корней уравнения (8) в решение уравнения (7) определяются стационарные значения амплитуды A_* , а затем из (6) – значения фазы θ_* .

Проведем исследование устойчивости полученных решений. Необходимыми и достаточными условиями устойчивости стационарного решения системы уравнений (5), согласно критерию Рауса–Гурвица, являются неравенства

$$B_1 > 0, B_3 > 0, B_1 B_2 - B_3 > 0 \quad (9)$$

левые части которых составлены из элементов b_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) матрицы коэффициентов уравнений в вариациях записанных в окрестности решения A_*, θ_*, v_* :

$$B_1 = -(b_{11} + b_{22} + b_{33}) \quad (10)$$

$$B_2 = b_{11}b_{33} + b_{11}b_{22} + b_{22}b_{33} - b_{32}b_{23} - b_{12}b_{21} - b_{13}b_{31}$$

$$B_3 = b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33} + b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{22}b_{33} - b_{12}b_{23}b_{31} - b_{13}b_{21}b_{32}$$

Коэффициенты b_{ij} выражаются через параметры системы (5):

$$b_{11} = A Q (dP / dA) / P - Q - A (dQ / dA), \quad b_{12} = -A (n\Omega - v), \quad b_{13} = 0$$

$$b_{21} = n(d\Omega / dA) - [(dP / dA) / P - 1 / A](n\Omega - v), \quad b_{22} = -Q, \quad b_{23} = -1 \quad (11)$$

$$b_{31} = -qQ \{ A [1 + A (dP / dA) / P] \arccos(d / A) + d / \sqrt{1 - (d / A)^2} \} / (n\pi p)$$

$$b_{32} = qA^2 \arccos(d / A) (n\Omega - v) / (n\pi p), \quad b_{33} = dL / dv - dH / dv$$

Правые части этих соотношений вычисляются при $A = A_*, \theta = \theta_*, v = v_*$.

После подстановки зависимостей (10), (11) в неравенства (9) получаются довольно громоздкие выражения, при их исследовании приходится прибегать к расчетам на ПЭВМ. Однако, следуя методике [1], удастся провести предварительный качественный анализ устойчивости полученных стационарных режимов колебаний и выделить на оси частот в окрестности резонанса интервалы, где эти колебания являются неустойчивыми. Этот подход основан на представлении второго из условий устойчивости (9) в виде

$$(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})(dL / dv - dS / dv) < 0 \quad (12)$$

Неравенство (12) не выполняется, если сомножители в левой его части имеют одинаковые знаки. Знак первого сомножителя определяется условием устойчивости стационарных колебаний осциллятора с идеальным источником возбуждения и может быть найден, исходя из анализа форм кривых $A(v)$ на фиг. 1. Знак второго сомножителя задается соотношением значений производных dL/dv и dS/dv , вычисленных в точках пересечения кривых S и L на фиг. 2. Таким образом суждение об устойчивости выносится из геометрических соображений. Используя этот прием, выделим пунктирными линиями неустойчивые участки на графиках зависимостей $S(v)$:

Сравнение значений частот, соответствующих граничным точкам устойчивых и неустойчивых участков на кривых $S(v)$, которые получились как результат анализа условия (12) и условий (9), показывает, что при выбранных значениях параметров системы (1) границы областей устойчивости, полученные этими методами, совпадают.

Из проведенного исследования следует, что к виброударным системам после негладкой замены переменных применим подход, разработанный в [1] для изучения динамики квазилинейных систем с неидеальным источником энергии, причем ограниченность мощности источника возбуждения колебаний может оказать существенное влияние на стационарные режимы колебаний виброударных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 373 с.
2. Журавлев В.Ф. Метод анализа виброударных систем при помощи специальных функций // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 2. С. 30–34.

3. Журавлев В.Ф. Исследование некоторых виброударных систем методом негладких преобразований // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 6. С. 24–28.
4. Журавлев В.Ф., Меняйлов А.И. Исследование виброударной системы с ограниченным возбуждением // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 2. С. 45–50.
5. Привалов Е.А. Об одной форме метода негладких преобразований, применяемого для исследования виброударных систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 4. С. 37–40.
6. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
7. Булгаков Б.В. Колебания. М.: Гостехиздат, 1954. 891 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.III.1998