

УДК 531.8

© 1998 г. А.Ю. ИШЛИНСКИЙ, В.А. СТОРОЖЕНКО, М.Е. ТЕМЧЕНКО

### **БИФУРКАЦИИ И ТОЧНОСТЬ РАБОТЫ ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ ЦЕНТРИФУГИ НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОДВЕСЕ**

Статья является логическим продолжением работы [1], в которой была исследована устойчивость вертикального вращения высокоскоростной центрифуги на электромагнитном подвесе. В упомянутой работе было показано, что подвешенная подобным образом центрифуга обладает динамическими свойствами, в определенном смысле сходными с динамическими свойствами твердого тела, подвешенного на струне. Следует заметить, что важную роль в динамике твердого тела, подвешенного на струне, играют бифуркационные явления [2]. Как показано ниже, аналогичные явления присущи и центрифуге с электромагнитным подвесом. Так как возникающие бифуркации способны нарушить рабочий режим центрифуги, эти явления должны учитываться при конструировании и эксплуатации устройств подобного типа. Также по аналогии с движением твердого тела, подвешенного на струне, рассмотрен вопрос о влиянии технологических несовершенств подвеса на устойчивость центрифуги. Показано, что такого рода несовершенства способны вызвать потерю устойчивости при больших значениях угловой скорости. Подобные явления потери устойчивости наблюдались при экспериментальных исследованиях, проводимых на центрифуге данной конструкции.

1. Итак, рассматривается движение высокоскоростной центрифуги на электромагнитном подвесе, схематически изображенной на фиг. 1. В [1] при исследовании устойчивости этой центрифуги в первом приближении объектом исследования было характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda^4 - \sigma^2 \omega \lambda^3 - a_1 \lambda^2 + \sigma^2 \omega a_3 + a_2 = 0 \quad (1.1)$$

$$a_0 = \rho^2, \quad a_1 = (\rho^2 + \kappa^2)(\mu_1 + \mu_2 + v_2^2 - v_1^2) + \kappa(2v_2^2 - v_1^2),$$

$$a_2 = \kappa(\mu_1 + \mu_2 + v_2^2 - v_1^2)(4\kappa^2 \mu_2 + 2v_2^2 - v_1^2) - 4\kappa^2 \mu_2^2 = \kappa a_3 a_4 - 4\kappa^2 \mu_2^2,$$

$$a_3 = \mu_1 + \mu_2 + v_2^2 - v_1^2$$

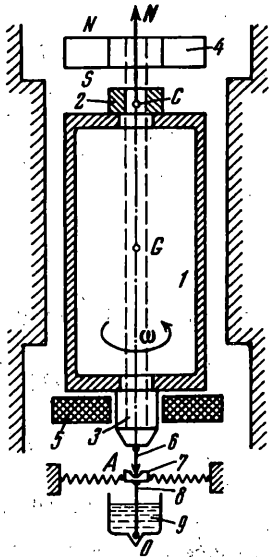
$$a_4 = 4\kappa^2 \mu_2 + 2v_2^2 - v_1^2 \quad (1.2)$$

В свою очередь, коэффициенты  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $\kappa$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  выражаются через параметры системы посредством формул

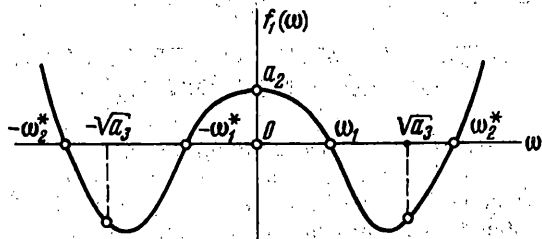
$$A/ml^2 = \rho^2, \quad C/ml^2 = \sigma^2, \quad g/l = v_1^2, \quad N/ml = v_2^2$$

$$k_1/m = \mu_1, \quad k_2/m = \mu_2, \quad a/l = \kappa \quad (1.3)$$

В последних формулах  $m$  – суммарная масса тела центрифуги  $l$  с дополнительными массами 2 и 3 (фиг. 1);  $A$ ,  $C$  – акваториальный и осевой моменты инерции этой механической совокупности;  $N$  – подъемная сила, создаваемая верхней системой



Фиг. 1



Фиг. 2

электромагнитов 4,  $k_2$  – коэффициент упругости, характеризующий упругую составляющую магнитного поля верхних электромагнитов;  $k_1$  – коэффициент упругости, возникающей при движении ножки 8 в упруговязкой среде 9;  $l$  – длина ножки 8;  $a$  – расстояние, связывающее точку A, в которой игла 6 опирается на подпятник 7, с общим центром масс системы точкой G.

Изучим возможность возникновения в исследуемой механической системе бифуркаций, т.е. существования таких значений угловой скорости  $\omega$ , при которых от вертикальной формы относительного равновесия ответвляются новые формы. Уравнение для определения таких значений угловой скорости получим, если, воспользовавшись  $\lambda - \omega$  теоремой [2], положим в уравнение (1.1)  $\lambda = \omega$ . Будем иметь тогда

$$E_0 \omega^4 - E_1 \omega^2 + E_2 = 0 \quad (1.4)$$

$$E_0 = \rho^2 - \sigma^2, \quad E_1 = (\rho^2 + \kappa^2 - \sigma^2)(\mu_1 + \mu_2 + v_2^2 - v_1^2) + \kappa(2v_2^2 - v_1^2)$$

$$E_2 = \kappa(\mu_1 + \mu_2 + v_2^2 - v_1^2)(4\mu_2 \kappa + 2v_2^2 - v_1^2) - 4\mu_2^2 \kappa^2 \quad (1.5)$$

При использовании обозначений (1.2) и (1.5) уравнение (1.4) преобразуем к виду

$$f_1(\omega) = (\rho^2 - \sigma^2)\omega^4 - (a_1 - \sigma^2 a_3)\omega^2 + a_2 = 0 \quad (1.6)$$

Действительные корни уравнения (1.6) (если они существуют) и являются теми значениями угловой скорости, при которых происходит ответвление новых форм относительного равновесия.

Рассмотрим вопрос о существовании вещественных корней уравнения (1.6) при различных соотношениях между параметрами, характеризующими исследуемую механическую систему.

(а). Исследуем вначале случай, когда центрифуга имеет форму вытянутого цилиндра. Тогда, согласно обозначениям (1.3) коэффициент  $(\rho^2 - \sigma^2)$  при  $\omega^4$  в уравнении (1.6) является положительным. Примем далее, что выполняются условия вековой устойчивости, полученные из анализа потенциальной энергии системы. Как было показано в [1], эти условия эквивалентны неравенствам  $a_2 > 0$  и  $a_3 > 0$ . Покажем, что в данном случае все четыре корня уравнения (1.6) являются вещественными. Действительно, при  $\omega = 0$  левая часть уравнения (1.6) в силу выполнения неравенства

$a_2 > 0$  положительна, она будет положительной и при  $\omega \rightarrow \pm \infty$ . Заметим далее, что при  $\omega^2 = a_3$  полином  $f_1(\lambda)$  – левая часть уравнения (1.6) – оказывается равным

$$-\kappa^2(a_3 - 2\mu_2)^2 < 0 \quad (1.7)$$

Построим график полинома  $f_1(\omega)$  в рассматриваемом случае (см. фиг. 2). Из его анализа следует, что уравнение (1.6) будет при любых значениях параметров, характеризующих исследуемую механическую систему, иметь четыре значения угловой скорости  $\pm \omega_1, \pm \omega_2$  (так называемые точки бифуркации, при которых от основной – вертикальной формы относительного равновесия ответвляются новые, отличные от нее, формы).

(b). Определим теперь точки бифуркации сплюснутого тела ( $\rho^2 < \sigma^2$ ), считая, что условия вековой устойчивости по-прежнему выполняются, т.е. имеют место неравенства  $a_2 > 0, a_3 > 0$ . Анализ уравнения (1.6) и графика, представленного на фиг. 3, показывает, что здесь может быть лишь две точки бифуркации  $\pm \omega_1^*$  при любых значениях параметров.

(c). Пусть теперь  $a_2 = 0$ , т.е. рассматривается граница вековой устойчивости, когда одно из условий устойчивости обращается в равенство. Тогда уравнение (1.6) можно представить в виде

$$(\rho^2 - \sigma^2)\omega^2(\omega^2 - w) = 0 \quad (1.8)$$

$$w = \frac{(\rho^2 + \kappa^2 - \sigma^2)a_3 + \kappa(2v_2^2 - v_1^2)}{\rho^2 - \sigma^2} \quad (1.9)$$

Наличие нулевого корня уравнения (1.8) означает, что ответвление новой формы относительного равновесия, отличной от вертикальной, в этом случае происходит при  $\omega = 0$ . Что касается второго значения угловой скорости  $\pm \omega_2$ , при котором возможно ответвление новой формы движения, то оно существует лишь при положительных значениях величины  $w$ , определяемой из формулы (1.9). При исследовании знака этой величины заметим, прежде всего, что согласно третьей из формул (1.2), при  $a_2 = 0$  коэффициенты  $a_3$  и  $a_4$  должны быть одного знака.

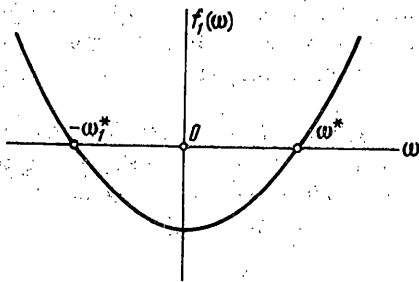
Примем вначале, что  $a_3 < 0, a_4 < 0$ . Тогда для вытянутого тела ( $\rho^2 > \sigma^2$ ) величина  $w$  оказывается отрицательной и, значит, возможно только одно бифуркационное значение угловой скорости  $\omega = 0$ . Для сплюснутого же тела ( $\rho^2 < \sigma^2$ ) возможно появление, кроме значения  $\omega = 0$ , еще одного значения  $\omega = \pm \sqrt{w}$  ( $w > 0$ ), при котором появляется новая форма движения.

При  $a_3 > 0, a_4 > 0$  величина  $w$  может быть как положительной, так и отрицательной и в случае вытянутого тела и в случае сплюснутого, а, следовательно, возможно появление второго бифуркационного значения угловой скорости, отличного от  $\omega = 0$ .

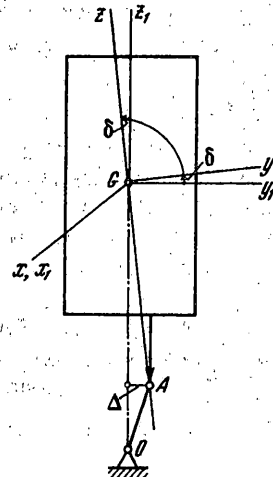
(d). Примем, что величина  $a_3$  равна нулю. Тогда, согласно третьему равенству (1.2) выражение  $a_2$  оказывается отрицательным. Если при этом тело вытянуто ( $\rho^2 > \sigma^2$ ), то механическая система имеет одну точку бифуркации. Сплюснутое тело в данном случае точек бифуркации вообще не имеет.

(e). И, наконец, рассмотрим случай сплюснутого тела ( $\rho^2 < \sigma^2$ ), для которого выполняется неравенство  $a_2 < 0$ . Если при этом и коэффициент при  $\omega^2$  в уравнении (1.6) будет отрицателен, то точек бифуркации не будет. Если же коэффициент при  $\omega^2$  в упомянутом уравнении будет положителен, то будут иметь место два бифуркационных значения угловой скорости.

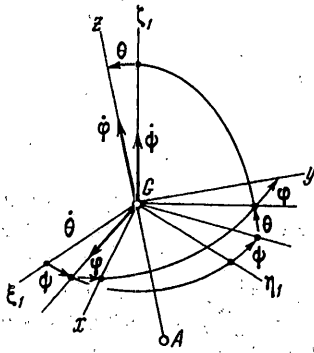
*Числовой пример.* Вычислим бифуркационные значения угловой скорости для исследуемой механической системы со следующими конкретными значениями параметров:  $P = mg = 2$  кгс;  $N = 1,5$  кгс;  $a = 0,15$  м;  $l = 0,04$  м;  $A = 2/g \cdot 10^{-2}$  кгс  $\cdot$  м<sup>2</sup>;  $C = 18/g \cdot 10^{-4}$  кгс  $\cdot$  м<sup>2</sup>,  $k_1 = 100$  кгс  $\cdot$  м<sup>-1</sup>;  $k_2 = 20$  кгс  $\cdot$  м<sup>-1</sup>;  $g = 9,81$  м  $\cdot$  с<sup>-2</sup>.



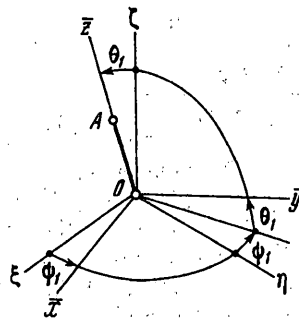
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Для приведенных данных уравнение (1.6) будет иметь четыре корня:  $\pm \omega_1 = \pm 2,556$  Гц,  $\pm \omega = \pm 6,23$  Гц, которым соответствуют два значения угловой скорости, при которых происходит возникновение новых форм относительного равновесия, отличных от основной – вертикальной формы вращения.

Наличие в системе точек бифуркации должно учитываться при конструировании и эксплуатации механических устройств, поскольку в окрестности таких точек возможна потеря устойчивости, вызванная стремлением данного механического устройства перейти на новую форму относительного равновесия, не предусмотренную его рабочим режимом.

2. Из изложенного выше, а также из результатов, полученных в [1], следует, что картина распределения устойчивости исследуемого устройства, а также бифуркационные явления сходные с теми, которые были обнаружены при изучении динамики твердого тела, вращающегося на невесомой нерастяжимой струне [2]. Поэтому естественно ожидать, что и некоторые другие явления, наблюдающиеся при движении тела на струне, будут иметь место и при движении центрифуги, подвешенной описанным выше способом. В частности, как было показано в [2], малое смещение точки крепления тела к струне относительно оси симметрии тела может привести к потере устойчивости стационарного движения тела на струне при больших значениях угловой скорости. Подобная потеря устойчивости как раз и была выявлена при экспериментах с центрифугой, когда угловая скорость последней достигала большой величины (порядка 100000 об/мин). Для более детального изучения этого вопроса

рассмотрим задачу в следующей постановке. Пусть ось игольчатой опоры центрифуги не совпадает с ее осью симметрии, в результате чего точка опоры  $A$  также не находится на оси симметрии центрифуги, а отстоит от нее на расстоянии равном  $\Delta$  (фиг. 4).

Обратимся к уравнениям движения исследуемого устройства в этом случае. Будем считать точку  $O$  началом неподвижной системы координат  $\xi\eta\zeta$ . В центре масс центрифуги  $G$  разместим начало жестко связанной с телом системы координат  $xyz$ , ось  $z$  которой проведем через точку  $A$ , а ось  $x$  направим перпендикулярно плоскости, содержащей ось  $z$  и ось симметрии тела. В точке  $G$  поместим также начало неизменно связанной с телом системы координат  $x_1y_1z_1$ . Ось  $z_1$  этой последней системы направим вдоль оси симметрии тела, а ось  $x_1$  совместим с осью  $x$  системы  $xyz$ . Тогда взаимное отклонение осей  $z$  и  $z_1$  или, что то же,  $y$  и  $y_1$ , будет составлять некоторый угол  $\delta$  (фиг. 4).

Ориентацию тела центрифуги в пространстве определим тремя углами Эйлера  $\psi$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  (см. фиг. 5). Заметим при этом, что точки  $A$  и  $G$ , как следует из вышесказанного, расположены на оси  $z$ . Расстояние  $|AG|$  будем обозначать по-прежнему буквой  $a$ . Положение ножки в пространстве зададим двумя углами  $\theta_1$  и  $\psi_1$  (см. фиг. 6).

В качестве обобщенных координат выберем углы  $\theta_1$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ , а также линейные комбинации углов  $\psi_1$  и  $\psi$ :

$$\chi = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi), \quad \chi_1 = \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi) \quad (2.1)$$

Функция Лагранжа в этом случае приводится к виду

$$\begin{aligned} L = T - \Pi = & \frac{1}{2} m [l^2 \dot{\theta}_1^2 + l^2 \sin^2 \theta (\dot{\chi} + \dot{\chi}_1)^2 + a^2 \sin^2 \theta (\dot{\chi} - \dot{\chi}_1)^2 + a^2 \dot{\theta}^2 + \\ & + 2al \cos \theta_1 \sin \theta \sin 2\chi_1 (\dot{\chi} - \dot{\chi}_1) \dot{\theta}_1 + 2al \sin \theta_1 \sin \theta \cos 2\chi_1 (\dot{\chi}^2 - \dot{\chi}_1^2) + \\ & + 2al \sin \theta_1 \sin \theta \dot{\theta}_1 \dot{\theta} - 2al \sin \theta_1 \cos \theta \sin 2\chi_1 (\dot{\chi} + \dot{\chi}_1) \dot{\theta}] + \\ & + \frac{1}{2} A [\dot{\theta} \cos \varphi + (\dot{\chi} - \dot{\chi}_1) \sin \theta \sin \varphi]^2 + \frac{1}{2} (A \sin^2 \delta + C \cos^2 \delta) [(\dot{\chi} - \dot{\chi}_1) \cos \varphi + \dot{\varphi}]^2 + \\ & + (C - A) \sin \delta \cos \delta [\dot{\theta} \sin \varphi - (\dot{\chi} - \dot{\chi}_1) \sin \theta \cos \varphi] [\dot{\varphi} + (\dot{\chi} - \dot{\chi}_1) \cos \theta] + N (l \cos \theta_1 + \\ & + 2a \cos \theta) - mg (l \cos \theta_1 + a \cos \theta) - \frac{1}{2} k_1 l^2 \sin^2 \theta_1 - \frac{1}{2} k_2 (l^2 \sin^2 \theta_1 + \\ & + 4a^2 \sin^2 \theta + 4al \sin \theta_1 \sin \theta \cos 2\chi_1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Обобщенная координата  $\chi$  входит в состав функции Лагранжа лишь своей производной. Следовательно, она является циклической и ей соответствует первый интеграл уравнений движения

$$\begin{aligned} p = \partial L / \partial \dot{\chi} = & \dot{\chi} [m (l^2 \sin^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta + 2al \sin \theta \sin \theta \cos 2\chi) + \\ & + C (\sin \theta \cos \varphi \sin \delta - \cos \theta \cos \delta)^2 + A (\sin \theta \cos \varphi \cos \delta + \cos \theta \sin \delta)^2 + A \sin^2 \theta \sin^2 \varphi] + \\ & + \dot{\chi} [m (l^2 \sin^2 \theta_1 - a^2 \sin^2 \theta) - A (\sin \theta \cos \varphi \sin \delta - \cos \theta \cos \delta)^2 - A (\sin \theta \cos \varphi \cos \delta + \\ & + \cos \theta \sin \delta)^2 - A \sin^2 \theta \sin^2 \varphi] + mal \dot{\theta}_1 \cos \theta \sin \theta \sin 2\chi_1 + \dot{\theta} [-mal \sin \theta_1 \cos \theta \sin 2\chi_1 + \\ & + (C - A) \sin \delta \sin \varphi (\cos \theta \cos \delta - \sin \theta \cos \varphi \sin \delta)] + \dot{\varphi} [A \sin \delta (\cos \theta \sin \delta + \\ & + \sin \theta \cos \varphi \cos \delta) + A \cos \delta (\cos \theta \cos \delta - \sin \theta \cos \varphi \sin \delta)] = \text{const} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Этот интеграл выражает постоянство проекции кинетического момента тела на неподвижную ось  $\zeta$ .

Для исследования стационарных движений данной механической системы перейдем от функции Лагранжа  $L$  к функции Рауса, определяемой равенством [3]

$$R = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} \dot{\chi} \quad (2.4)$$

При этом производную  $\dot{\chi}$  исключим из правой части последнего равенства при помощи соотношения (2.3). В результате получим

$$\begin{aligned} R = & \frac{1}{2} m [l^2 \dot{\theta}_1^2 + a^2 \dot{\theta}^2 + 2al\dot{\theta}_1\dot{\theta}(\cos\theta_1 \cos\theta \cos 2\chi_1 + \sin\theta_1 \sin\theta) - \\ & - 2al \cos\theta_1 \sin\theta \sin 2\chi_1 \dot{\theta}_1 \dot{\chi}_1 - 2al \sin\theta_1 \cos\theta \sin 2\chi_1 \dot{\chi}_1 \dot{\theta} + (l^2 \sin^2 \theta_1 + a^2 \sin^2 \theta - \\ & - 2al \sin\theta_1 \sin\theta \cos 2\chi_1) \dot{\chi}_1^2] + \frac{1}{2} (A \cos^2 \delta + C \sin^2 \delta) (\dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\chi}_1 \sin \theta \cos \varphi)^2 + \\ & + \frac{1}{2} A (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\chi}_1^2 \sin \theta \sin \varphi)^2 + \frac{1}{2} (A \sin^2 \delta + C \cos^2 \delta) (\dot{\varphi} - \dot{\chi} \cos \theta)^2 + \\ & + (C - A) \sin \delta \cos \delta (\dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\chi}_1 \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\chi}_1 \dot{\theta} \sin \varphi \cos \theta - \dot{\chi}_1^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi) + \\ & + N(l \cos \theta_1 + 2a \cos \theta) - mg(l \cos \theta_1 + a \cos \theta) - \frac{1}{2} k_1 l^2 \sin^2 \theta_1 - \\ & - \frac{1}{2} k_2 (l^2 \sin^2 \theta_1 + 4a^2 \sin^2 \theta + 4al \sin \theta_1 \sin \theta \cos 2\chi_1) - \frac{1}{2} (p - M)^2 / I. \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} M = & \dot{\chi}_1 [m(l^2 \sin^2 \theta_1 - a^2 \sin^2 \theta) - A - (C - A)(\sin \delta \cos \varphi \sin \theta - \cos \delta \cos \theta)^2] + \\ & + mal \dot{\chi}_1 \cos \theta_1 \sin \theta \sin 2\chi_1 + \dot{\theta} [-mal \sin \theta_1 \cos \theta \sin 2\chi_1 + (C - A) \sin \delta \sin \varphi (\cos \delta \cos \theta - \\ & - \sin \delta \cos \varphi \sin \theta)] + \dot{\varphi} [A \sin \delta (\sin \delta \cos \theta + \cos \delta \sin \theta \cos \varphi) + \\ & + C \cos \delta (\cos \delta \cos \theta - \sin \delta \sin \theta \cos \varphi)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$I = m(l^2 \sin^2 \theta_1 + a^2 \sin^2 \theta + 2al \sin \theta_1 \sin \theta \cos 2\chi_1) + A + (C - A)(\cos \delta \cos \theta - \sin \theta \sin \delta \cos \varphi)^2 \quad (2.7)$$

Для получения уравнений движения рассматриваемой механической системы подставим только что полученное выражение (2.5) функции Рауса в левые части равенства [3]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.8)$$

В результате получим уравнения, полностью приведенные в [4]. Совокупность этих уравнений допускает частное решение

$$\begin{aligned} \theta_1 = \theta_1^0 = \text{const}, \quad \theta = \theta^0 = \text{const}, \quad \dot{\theta}_1 = \dot{\theta} = 0 \\ \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \chi_1 = 0, \quad \dot{\chi}_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

которое соответствует стационарному движению рассматриваемой системы. При этом постоянные  $\theta_1^0, \theta^0$  оказываются связанными, согласно упомянутым уравнениям,

соотношениями

$$\begin{aligned}
 & -\cos \theta_1^0 (\sin \theta_1^0 + \kappa \sin \theta^0) + \omega^{-2} [(v_1^2 - v_2^2) \sin \theta_1^0 + (\mu_1 + \mu_2) \sin \theta_1^0 \cos \theta_1^0 + \\
 & + 2\mu_2 \kappa \sin \theta^0 \cos \theta_1^2] = 0 \\
 & -\kappa \cos \theta^0 (\sin \theta_1^0 + \kappa \sin \theta^0) - (\rho^2 - \sigma^2 - \kappa^2) \sin(\theta^0 + \delta) \cos(\theta^0 + \delta) + \\
 & + \omega^{-2} [\kappa(2v_1^2 - v_2^2) \sin \theta^0 + 2\kappa\mu_2 \cos \theta^0 (\sin \theta_1^0 + \kappa \sin \theta^0)] = 0
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь использованы обозначения (1.3), а также

$$\omega = p_0 / I_0 \tag{2.11}$$

где  $p_0, I_0$  – постоянные количества, представленные формулами (2.3) и (2.7), в которых следует заменить выражения для обобщенных координат их значениями (2.9). Величина  $\omega$  представляет не что иное, как угловую скорость вращения тела в его стационарном движении.

Обратимся к исследованию устойчивости стационарных движений центрифуги. Для этого полагая в уравнениях движения

$$\theta_1 = \theta_1^0 + \Delta\theta_1, \quad \theta = \theta^0 + \Delta\theta, \quad \chi_1 = \Delta\chi_1, \quad \varphi = \Delta\varphi \tag{2.12}$$

сохраним в них члены первого порядка малости относительно возмущений  $\Delta\theta_1, \Delta\theta, \Delta\chi, \Delta\varphi$ . Тогда, вводя безразмерное время  $\tau = \omega t$ , получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 \Delta\theta_1}{d\tau^2} + d_{12} \frac{d^2 \Delta\theta}{d\tau^2} + g_{13} \frac{d\Delta\chi_1}{d\tau} + g_{14} \frac{d\Delta\varphi}{d\tau} + e_{11} \Delta\theta_1 + e_{12} \Delta\theta = 0 \\
 & d_{12} \frac{d^2 \Delta\theta_1}{d\tau^2} + d_{22} \frac{d^2 \Delta\theta}{d\tau^2} + g_{23} \frac{d\Delta\chi_1}{d\tau} + g_{24} \frac{d\Delta\varphi}{d\tau} + e_{21} \Delta\theta_1 + e_{22} \Delta\theta = 0 \\
 & d_{33} \frac{d^2 \Delta\chi_1}{d\tau^2} + d_{34} \frac{d^2 \Delta\varphi}{d\tau^2} - g_{13} \frac{d\Delta\theta_1}{d\tau} - g_{23} \frac{d\Delta\theta}{d\tau} + e_{33} \Delta\chi_1 = 0 \\
 & d_{43} \frac{d^2 \Delta\chi_1}{d\tau^2} + d_{44} \frac{d^2 \Delta\varphi}{d\tau^2} - g_{14} \frac{d\Delta\theta_1}{d\tau} - g_{14} \frac{d\Delta\theta}{d\tau} + e_{44} \Delta\varphi = 0.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
 & d_{12} = d_{21} = \kappa \cos(\theta - \theta) d_{22} = \kappa^2 + \rho^2 \\
 & d_{33} = \frac{4}{I'} \sin^2 \theta_1^0 [\rho^2 \sin^2(\theta^0 + \delta) + \sigma^2 \cos^2(\theta^0 + \delta)] \\
 & d_{34} = d_{43} = \frac{2}{I'} \sin \theta_1^0 (\sin \theta_1^0 + \kappa \sin \theta^0) [\sigma^2 \cos \delta \cos(\theta^0 + \delta) + \rho^2 \sin \delta \sin(\theta^0 + \delta)] \\
 & d_{44} = \frac{1}{I'} [(\sin \theta_1^0 + \kappa \sin \theta^0)^2 (\sigma^2 \cos^2 \delta + \rho^2 \sin^2 \delta) + \sigma^2 \rho^2 \sin^2 \theta^0] \\
 & g_{13} = \frac{4}{I'} \sin \theta_1^0 \cos \theta_1^0 [\rho^2 \sin^2(\theta^0 + \delta) + \sigma^2 \cos^2(\theta^0 + \delta)] \\
 & g_{14} = \frac{2}{I'} \cos \theta_1^0 (\sin \theta_1^0 + \kappa \sin \theta^0) [\rho^2 \sin \delta \sin(\theta^0 + \delta) + \sigma^2 \cos \delta \cos(\theta^0 + \delta)] \\
 & g_{23} = \frac{4}{I'} \sin \theta_1^0 \{(\sin \theta_1^0 + \kappa \sin \theta^0)(\rho^2 - \sigma^2) \cos(\theta^0 + \delta) \sin(\theta^0 + \delta) - \\
 & - \kappa \cos \theta^0 [\rho^2 \sin^2(\theta^0 + \delta) + \sigma^2 \cos^2(\theta^0 + \delta)]\} \\
 & g_{24} = \frac{1}{I'} \{(\sin \theta_1^0 + \kappa \sin \theta^0) [\sin \theta_1^0 (\sigma^2 \sin(\theta^0 + 2\delta) - 2\rho^2 \sin \delta \cos(\theta^0 + \delta)) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(2\rho^2 \sin^2 \delta + 2\sigma^2 \cos^2 \delta - \sigma^2 \sin^2 \theta^0)] + \sigma^2 \sin \theta^0 [\rho^2 - (\sigma^2 - \rho^2) \cos^2 (\theta^0 + \delta)] \\
e_{11} = & \sin \theta_1^0 (\sin \theta_1^0 + \kappa \sin \theta^0) - \cos^2 \theta_1^0 + \omega^{-2} [(v_2^2 - v_1^2) \cos \theta_1^0 + (\mu_1 + \mu_2) \cos 2\theta_1^0 - \\
& - 2\kappa \mu_2 \sin \theta_1^0 \sin \theta^0], \quad e_{12} = (-\kappa + 2\mu_2 \omega^{-2}) \cos \theta_1^0 \cos \theta^0 \\
e_{22} = & -\kappa^2 \cos 2\theta^0 + \kappa \sin \theta^0 \sin \theta_1^0 - (\rho^2 - \sigma^2) \cos 2(\theta^0 + \delta) + \omega^{-2} [\kappa(2v_2^2 - v_1^2) \cos \theta_0 + \\
& + 4\kappa^2 \mu_2 \cos 2\theta^0 - 2\kappa \mu_2 \sin \theta_1^0 \sin \theta^0], \quad e_{33} = 4\kappa \sin \theta_1^0 \sin \theta^0 \\
e_{44} = & (\rho^2 - \sigma^2) \cos(\theta^0 + \delta) \sin \delta \sin \theta^0, \quad (I' = I / ml^2)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Характеристическое уравнение, составленное для системы уравнений (2.13), с учетом коэффициентов (2.14) весьма громоздко. Исследуем вначале это уравнение для предельной формы стационарного движения при  $\omega \rightarrow \infty$ . Из соотношений (2.10) при этом следует

$$\sin(\theta^0 + \delta) \cos(\theta^0 + \delta) = 0, \quad \sin \theta_1^0 = -\kappa \sin \theta^0 \tag{2.15}$$

Из всех возможных решений полученных уравнений (2.15) при малом  $\delta$  физической сути задачи удовлетворяет следующее решение:

$$\theta^0 = -\delta, \quad \theta_1^0 = \arcsin(\kappa \sin \delta) \tag{2.16}$$

Этому решению как раз и соответствует идеальное движение центрифуги, при котором ось ее динамической симметрии совпадает с вертикалью. С учетом обозначений (1.3) коэффициенты (2.14) принимают вид

$$\begin{aligned}
d_{12} = d_{21} = & \kappa(\cos \delta \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \delta} - \kappa \sin^2 \delta), \quad d_{22} = \kappa^2 + \rho^2, \quad d_{33} = 4\kappa^2 \sin^2 \delta \\
d_{34} = & 0, \quad d_{44} = \rho^2 \sin^2 \delta, \quad g_{13} = -4\kappa \sin \delta \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \delta}, \quad g_{14} = 0 \\
g_{23} = & -4\kappa^2 \sin \delta \cos \delta, \quad g_{24} = -(2\rho^2 - \sigma^2) \sin \delta, \quad e_{11} = -1 + \kappa^2 \sin^2 \delta \\
e_{12} = & -\kappa \cos \delta \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \delta}, \quad e_{22} = \sigma^2 - \rho^2 - \kappa^2 \cos^2 \delta, \quad e_{33} = -4\kappa^2 \sin^2 \delta \\
e_{44} = & -(\rho^2 - \sigma^2) \sin^2 \delta
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Полагая в системе уравнений (2.13):

$$\Delta \theta_1 = \Delta \theta_1^0 e^{\lambda \tau}, \quad \Delta \theta = \Delta \theta^0 e^{\lambda \tau}, \quad \Delta \chi_1 = \Delta^0 \chi_1 e^{\lambda \tau}, \quad \Delta \varphi = \Delta \varphi^0 e^{\lambda \tau} \tag{2.18}$$

получим характеристическое уравнение, которое после некоторых несложных преобразований может быть приведено к следующему:

$$\begin{aligned}
& \Delta(z) = (2\rho^2 - \sigma^2)(1+z) \times \\
& \left| \begin{array}{cccc}
1 + \rho^2 - \kappa^2 + 2\kappa \chi_1 \cos \delta & \rho^2 + \kappa \chi_1 \cos \delta & -c & -(\rho^2 - \sigma^2) \\
(1+z)(\rho^2 + \kappa \chi_1 \cos \delta) & (\kappa^2 + \rho^2)(1+z) - \kappa^2 \sin^2 \delta & -\kappa \cos \delta (1+z) & -(\rho^2 - \sigma^2)(1+z) \\
2\kappa \chi_1 & 2\kappa \cos \delta & z-1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & \frac{\rho^2}{2\rho^2 - \sigma^2} (1+z) - 1
\end{array} \right| = \\
& = 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$z = \lambda^2, \quad \chi_1 = \kappa \cos \delta + (1 - \kappa^2 \sin^2 \delta)^{1/2} \tag{2.20}$$

Условием устойчивости рассматриваемой предельной формы стационарного движения (при  $\omega \rightarrow \infty$ ) является требование отрицательности всех корней характеристического уравнения (2.19).



Прежде всего отметим, что уравнение (2.19) имеет отрицательный корень

$$z = -1 \quad (2.21)$$

Для анализа остальных корней этого уравнения положим вначале угол  $\delta = 0$ . При этом ось игольчатой опоры центрифуги будет строго совпадать с ее осью симметрии. Тогда, кроме корня (2.21) уравнение (2.19) будет иметь еще три отрицательных корня

$$z_2 = z_3 = -1; \quad z_4 = -(1 - \sigma^2 / \rho^2)^2 \quad (2.22)$$

Произведем теперь уточнение корней  $z_2$  и  $z_3$ , считая величину угла  $\delta$  отличной от нуля, но достаточно малой. С этой целью положим в уравнении (2.19):

$$z = -1 + u \quad (2.23)$$

где  $u$  — величина, имеющая порядок  $\delta$ . Ограничимся членами второго порядка малости относительно  $\delta$  и  $u$ . Тогда для определения величины  $u$  придем к уравнению

$$\begin{vmatrix} \rho^2 + \kappa_2^2(1 - \kappa\delta^2) & \rho^2 + \kappa\kappa_2(1 - \kappa_2\delta^2/2) & -\kappa_2(1 - \kappa\delta^2/2) & -(\rho^2 - \sigma^2) \\ (\rho^2 + \kappa\kappa_1)u & (\kappa^2 + \rho^2)u - \kappa^2\delta^2 & -\kappa u & -(\rho^2 - \sigma^2)u \\ 2\kappa_1(1 - \kappa\delta^2/2) & 2\kappa(1 - \delta^2/2) & -2 + u & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \frac{\rho^2}{2\rho^2 - \sigma^2}u - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.24)$$

$(\kappa_2 = 1 + \kappa)$

Ограничиваясь членами со второй степенью малости, получим

$$u^2 + 2\kappa^2\delta^2 = 0, \text{ т.е. } u = \pm i\sqrt{2\kappa\delta} \quad (2.25)$$

Подставляя это значение  $u$  в формулу (2.23), имеем

$$z_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{2\kappa\delta} \quad (2.26)$$

Отсюда следует, что уравнение (2.24) имеет пару комплексных корней. Следовательно, рассматриваемая предельная форма стационарного движения оказывается неустойчивой.

Определим теперь значение угловой скорости, при котором происходит потеря устойчивости. Для этого, считая по-прежнему угол  $\delta$  малым, будем рассматривать стационарные движения с угловой скоростью  $\omega$ , величина которой имеет порядок  $1/\delta$ . Тогда в уравнениях (2.10) можно положить

$$v_1^2 / \omega^2 = c_1\delta^2, \quad v_2^2 / \omega^2 = c_2\delta^2, \quad \mu_1 / \omega^2 = d_1\delta^2, \quad \mu_2 / \omega^2 = d_2\delta^2 \quad (2.27)$$

Произведем далее уточнение решения (2.16). Для этого в уравнениях (2.10) положим

$$\theta^0 = -\delta + \Delta\theta^*, \quad \theta_1^0 = \kappa\delta + \Delta\theta_1^* \quad (2.28)$$

где  $\Delta\theta^*$ ,  $\Delta\theta_1^*$  — малые порядка выше первого относительно  $\delta$ . Тогда с точностью до величин третьего порядка включительно получим уравнения для нахождения поправок  $\Delta\theta^*$ ,  $\Delta\theta_1^*$ :

$$\begin{aligned} \Delta\theta_1^* + \kappa\Delta\theta^* &= (c_1 - c_2)\kappa\delta^3 + (d_1 - d_2)\kappa\delta^3 \\ \kappa\Delta\theta_1^* + (\rho^2 - \sigma^2 + \kappa^2)\delta\theta^* &= -(2c_1 - c_2)\kappa\delta^3 - 2d_2\kappa^2\delta^3 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Решение этих уравнений можно представить в виде

$$\Delta\theta^* = \tau_1\delta^3, \quad \Delta\theta_1^* = \tau_2\delta^3 \quad (2.30)$$

$$\tau_1 = \frac{\kappa}{\rho^2 - \sigma^2} [c_2(1 + \kappa) - c_1(2 + \kappa)] - \kappa \frac{d_1 + d_2}{\rho^2 - \sigma^2} \quad (2.31)$$

$$\tau_2 = \kappa c_1 \left( 1 + \frac{\kappa + 2}{\rho^2 - \sigma^2} \right) - \kappa c_2 \left( 1 + \kappa \frac{\kappa + 1}{\rho^2 - \sigma^2} \right) + \kappa(d_1 - d_2) + \kappa^3 \frac{d_1 + d_2}{\rho^2 - \sigma^2}$$

Подставим выражения (2.30) с учетом (2.31) в правые части равенств (2.14). В результате коэффициенты системы уравнений (2.13) преобразуются к следующим:

$$d_{12} = d_{21} = \kappa[1 - (\kappa + 1)^2\delta^2 / 2], \quad d_{22} = \kappa^2 + \rho^2 \quad (2.32)$$

$$d_{33} = 4\kappa^2\delta^2(1 + 2\tau_2\delta^2 - \kappa^3\delta^2 / 3), \quad d_{34} = -2\kappa\delta^4(\tau_2 + \kappa\tau_1), \quad d_{44} = \rho^2\delta^2(1 - 2\tau_1\delta^2)$$

$$g_{13} = -4\kappa\delta \left( 1 - \frac{2}{3}\kappa^2\delta^2 \right), \quad g_{14} = 2\delta^3[\tau_2 + \kappa\tau_1 + (1 - \kappa^3) / 6], \quad g_{23} = -4\kappa\delta(\kappa - \kappa\delta^2) / 2 +$$

$$+ \mu_2\delta^3 / \kappa^3\delta^3 / 6), \quad g_{24} = (2\rho^2 - \sigma^2)\delta(1 - \tau_1\delta^2), \quad e_{11} = -1 + [\kappa^2 + d_1 + d_2 + (\tau_2 +$$

$$+ \kappa\tau_1) / \kappa]\delta^2, \quad e_{12} = -\kappa + [2\kappa d_2 + (1 + \kappa) / 2]\delta^2, \quad e_{22} = \sigma^2 - \rho^2 - \kappa^2 + (\sigma^2 - \rho^2 + \kappa^2 -$$

$$- \kappa^2\tau_1 - \kappa\tau_2 + 2\kappa^2 d_2)\delta^2, \quad e_{33} = -4\kappa\delta^2[\kappa + (\tau_2 - \kappa\tau_1)\delta^2],$$

$$e_{44} = (\rho^2 - \sigma^2)\delta^2 \left[ -1 + \left( \tau_1 + \frac{1}{2} \right) \delta^2 \right]$$

Примем, что как и ранее, для  $z = \lambda^2$  имеет место представление (2.23). Тогда, вновь составляя характеристическое уравнение для системы уравнений (2.13) и производя ряд простейших преобразований, полностью приведенных в [4], получим следующее соотношение для определения искомой величины поправки  $u$ :

$$u^2 = 2(c_1 - c_2 + d_1 + d_2 + \tau_1 + \tau_2 / \kappa - \kappa^2)\delta^2 = 4\omega^{-2}(v_2^2 - v_1^2 + \mu_2) - 2a^2\delta^2 / l^2 \quad (2.33)$$

Учитывая далее, что произведение  $ad \approx asin\delta$  (фиг. 4) приближенно равно расстоянию  $\Delta$ , отделяющему точку опоры центрифуги от ее оси симметрии, а также обозначения (1.3), получим

$$u^2 = 2 \left( 2 \frac{N - mg + k_1 l}{m l \omega^2} - \frac{\Delta^2}{l^2} \right) \quad (2.34)$$

Отсюда с учетом равенства (2.23) имеем

$$z_{2,3} = -1 \pm \left( 4 \frac{N - mg + k_1 l}{m l \omega^2} - 2 \frac{\Delta^2}{l^2} \right)^{1/2} \quad (2.35)$$

Из последнего равенства, в свою очередь, следует, что при

$$\omega^2 > \omega_*^2 = \frac{2l(N - mg + k_1 l)}{m\Delta^2} \quad (2.36)$$

подкоренное выражение является отрицательным, значит корни  $z_2, z_3$  являются комплексными и, следовательно, при  $\omega \in [\omega_*, \infty)$  движение является неустойчивым.

В таблице в зависимости от величины  $\Delta$  [мм] отклонения точки опоры центрифуги  $A$  от ее оси симметрии приведены значения угловой скорости  $\omega$  (1/с), при которых

происходит потеря устойчивости, и соответствующие ее значения в гц и об/мин. При этом использовались значения параметров центрифуги, приведенные в п. 1.

$\Delta$ (мм)	$\omega_*$ (1/с)	$\Omega_*$ (гц)	$n$ (об/мин)
0,5	2343,8	373,027	22387,65
0,4	2929,8	466,29	27977,6
0,3	3906,4	627,72	37303,4
0,2	5859,6	932,58	55955,7
0,1	11719,2	1865,17	111910,2
0,05	23438,4	3730,3	223820,5

Из таблицы видно, что причиной наблюдаемой экспериментально потери устойчивости при угловой скорости порядка  $10^5$  об/мин может быть технологическая неточность подвеса центрифуги порядка 0,1 мм.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е.* К исследованию устойчивости высокоскоростной центрифуги на электромагнитном подвесе // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 3. С. 197–208.
2. *Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е.* Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. М.: Наука, 1991. 330 с.
3. *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 5. С. 922–933.
4. *Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е.* Об устойчивости высокоскоростной центрифуги на электромагнитном подвесе. Препринт № 587. М.: Ин-т пробл. механики РАН, 1997. 48 с.

Москва, Киев

Поступила в редакцию  
24.IX.1997