

УДК 534.1

© 1998 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, С.В. НЕСТЕРОВ

## МЕТОД УСКОРЕННОЙ СХОДИМОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Разработан эффективный численно-аналитический метод решения существенно неоднородной периодической краевой задачи. В основе рекуррентного алгоритма построения собственных значений и функций лежит установленная авторами дифференциальная связь между собственными числами и длиной интервала (величиной периода). Процедура уточнения искоемых величин обладает ускоренной сходимостью и высокой устойчивостью. Построение решений периодических краевых задач представляет значительный интерес для математической физики и теории колебаний. Эффективность подхода подтверждается решением модельных примеров.

**1. Постановка периодической краевой задачи.** Рассматривается одна из основных задач математической физики и теории колебаний. Требуется найти решение периодической краевой задачи на собственные значения  $\lambda$  и функции  $u = u(x)$ , описываемой соотношениями вида (см. [1–8] и др.):

$$(p(x)u')' + [\lambda r(x) - q(x)]u = 0, \quad u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1) \quad (1.1)$$

Здесь  $p(x)$ ,  $r(x)$ ,  $q(x)$  – известные достаточно гладкие функции аргумента  $x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , которые могут быть периодически продолжены для всех  $x$ ,  $|x| < \infty$ . Кроме того, предполагается, что функции  $p(x)$ ,  $r(x)$  строго положительны:  $p(x) \geq p_0 > 0$ ;  $r(x) \geq r_0 > 0$ . Для обеспечения гладкости (в частности, непрерывности коэффициентов) системы (1.1) следует положить  $p(0) = p(1 + 0)$ ,  $r(0) = r(1 + 0)$ ,  $q(0) = q(1 + 0)$ .

Отметим, что соотношения (1.1) можно трактовать как модель упругой системы с переменной периодической по пространственной координате  $x$  структурой [1–4]. Тогда функция  $p(x)$  описывает жесткость на изгиб или кручение,  $r(x)$  – погонную инерционную характеристику (линейную или угловую плотность),  $q(x)$  – коэффициент упругости внешней среды. Кроме того, соотношениями вида (1.1) описываются так называемые параметрические колебания [3, 5–8] (тогда  $x = t$  – время). Исследованию движений таких систем (в частности, уравнений Матье и Хилла) посвящено огромное количество публикаций (см. цитированную литературу в указанных монографиях). Как показывает вычислительная практика, не для всяких функций  $p$ ,  $r$ ,  $q$  решение периодической краевой задачи (1.1) "существует и единственно".

Система (1.1) приводится к нормальному виду, не содержащему производной функции  $p(x)$ , посредством подстановки  $z = p(x)u'$ ; в результате имеем периодическую краевую задачу вида

$$u' = z / p(x), \quad z' = -[\lambda r(x) - q(x)]u \quad (1.2)$$
$$u(0) = u(1), \quad z(0) = z(1)$$

Обе краевые задачи (1.1) и (1.2) полностью эквивалентны с учетом приведенных выше условий периодичности для коэффициентов  $p, r, q$ . Итак, требуется найти системы собственных значений  $\{\lambda_n\}$  и соответствующих им собственных функций  $\{u_n(x)\}$ ,  $u_n(x) = u(x, \lambda_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Отметим, что краевая задача (1.1) является самосопряженной, а собственные функции, отвечающие различным  $\lambda_n$ , ортогональны с весом  $r(x)$  на промежутке  $0 \leq x \leq 1$ , что устанавливается непосредственно.

Аналитическое или точное решение краевых задач, в том числе периодических, может быть получено в исключительных частных случаях явной интегрируемости уравнений. Высокоточное численное решение приводит к существенным вычислительным трудностям. Проблеме построения приближенных численных оценок собственных значений и функций с крайвыми условиями первого, второго и третьего родов, а также смешанных, уделяется большое внимание в многочисленных исследованиях, см. [1–9] и др. Предложен ряд подходов, методов и разработан ряд алгоритмов ее решения. Отметим, что имеющиеся результаты относятся, как правило, к первой краевой задаче. Задаче Штурма–Лиувилля с граничными условиями 2-го и 3-го родов посвящено существенно меньше исследований. Теория и методы приближенного решения периодической краевой задачи получили значительное развитие для колебательных систем (теория Флоке–Ляпунова, методы регулярных возмущений Ляпунова–Пуанкаре, метод усреднения Крылова–Боголюбова, метод сингулярных возмущений и др.). Регулярные методы высокоточного приближенного решения периодической задачи (1.1) или (1.2) в общем случае развиты недостаточно. Предлагается разработать эффективный численно-аналитический метод построения высокоточного приближенного решения периодической краевой задачи (1.1), (1.2), обладающий свойством ускоренной сходимости [10–12].

**2. Вариационная трактовка периодической краевой задачи.** Задача (1.1) или (1.2) есть дифференциальный аналог (уравнения Эйлера) следующей изопериметрической вариационной задачи с периодическими условиями

$$J[u] = \int_0^1 [p(x)u'^2 + q(x)u^2] dx \rightarrow \min \quad (2.1)$$

$$I[u] = \|u\|^2 = \int_0^1 r(x)u^2 dx = 1, \quad u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1)$$

Функция  $u = u_1(x)$ , доставляющая абсолютный минимум функционалу  $J[u]$ , есть первая собственная функция задачи (1.1), а  $J[u_1] = \lambda_1$  есть первое собственное число (при  $q(x) \geq 0$  оно строго положительно). Последующие собственные функции  $u_n(x)$  и числа  $\lambda_n$  ( $n \geq 2$ ) определяются рекуррентно на более узких классах функций  $u(x)$ , удовлетворяющих условиям ортогональности вида

$$I_k[u] = \int_0^1 r(x)u_k(x)u dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.2)$$

Решение вариационных задач (2.1), (2.2) приводит к системам собственных значений  $\{\lambda_n\}$  и ортонормированных функций  $\{u_n(x)\}$ , т.е. решению задачи Штурма–Лиувилля (1.1) и (1.2). Отметим, что системой собственных функций будет также  $c_n u_n(x)$ , где  $c_n = \text{const}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , т.е. решение вариационной задачи (2.1), (2.2) при  $I[u] = c_n^2$ .

Вариационная трактовка самосопряженной задачи Штурма–Лиувилля позволяет применить метод Релея–Ритца [9] для приближенного вычисления низших собственных чисел, т.е. получить их оценки сверху. В частности, принцип Релея весьма эффективно используется для построения оценок сверху первого собственного значения  $\lambda_1$ . Эти оценки могут рассматриваться как начальные приближения для

более точных расчетов, см. ниже. Ради определенности рассмотрим задачу вычисления первого собственного значения и функции.

Соотношения принципа Релея сводятся к взятию квадратур [1, 3, 8, 9]:

$$\lambda_1 \leq \lambda_1^* = J[\psi] / I[\psi], \quad \psi(0) = \psi(1), \quad \psi'(0) = \psi'(1) \quad (2.3)$$

Здесь  $\psi = \psi(x)$  – непрерывно дифференцируемая пробная функция, выбираемая из интуитивных физических представлений о первой собственной функции  $u_1(x)$ . Равенство в (2.3) достигается при условии  $\psi(x) \equiv cu_1(x)$ ; в общем случае  $\lambda_1^* > \lambda_1$ . Вычислительная практика показывает, что весьма грубая аппроксимация  $\psi(x)$  приводит к достаточно точным оценкам  $\lambda_1^*$ , см. [10–11] и ниже. С помощью метода Релея–Ритца, обоснованного Н.М. Крыловым, собственные значения могут быть определены сколь угодно точно на основе достаточно полной системы линейно независимых пробных функций  $\{\psi_i(x)\}$ , удовлетворяющих условиям периодичности типа (2.3). Однако такой подход приводит к весьма трудоемким неустойчивым вычислениям. Наряду с высокоточными оценками сверху для практики важно построение оценок снизу, которые часто характеризуют качество функционирования системы, а также границы изменения собственных частот. Нахождение оценок снизу представляет принципиальные и вычислительные трудности [3].

Предлагается на основе метода возмущений и некоторой оценки собственного значения  $\lambda^0$ , в частности значения  $\lambda_1^*$ , получаемого согласно принципу Релея (2.3), разработать эффективный численно-аналитический алгоритм ускоренной (квадратичной) сходимости для определения собственного значения и функции со сколь угодно высокой точностью [10–12], а также получить оценки снизу. Далее для определенности рассматривается задача нахождения первого собственного значения и функции (индекс  $n = 1$  опускается с целью сокращения записи). Последующие значения ( $n \geq 2$ ) могут быть вычислены аналогично случаю  $n = 1$ .

**3. Введение малого параметра.** Предположим, что  $\lambda^0$  – некоторая оценка первого собственного значения, в частности,  $\lambda^0 = \lambda_1^*$  (2.3). Построим численно или аналитически два линейно независимых решения уравнения (1.1) (или системы (1.2)) для известного значения  $\lambda = \lambda^0$ . Они могут быть заданы как решения  $v_1, v_2$  задач Коши следующим образом:

$$(p(x)v')' + [\lambda^0 r(x) - q(x)]v = 0 \quad (3.1)$$

$$1) \ v(0) = 0, \ v'(0) = 1; \quad 2) \ v(0) = 1, \ v'(0) = 0$$

(и аналогично для (1.2)). Пусть эти функции  $v = v_1(x, \lambda^0)$  и  $v = v_2(x, \lambda^0)$  известны в аналитической или численной форме. Общее решение уравнения (3.1) равно

$$v_0(x, \lambda^0) = c_1 v_1(x, \lambda^0) + c_2 v_2(x, \lambda^0), \quad v_0' = dv_0 / dx \quad (3.2)$$

где  $c_1, c_2$  – произвольные постоянные. Потребуем, чтобы функции  $v_0, v_0'$  удовлетворяли смешанным краевым условиям периодичности, аналогичным (1.1):

$$v_0(0, \lambda^0) = v_0(\xi, \lambda^0), \quad v_0'(0, \lambda^0) = v_0'(\xi, \lambda^0) \quad (3.3)$$

где абсцисса  $\xi > 0$  и постоянные  $c_1, c_2 \neq 0$  подлежат определению. Подставим выражения (3.2) в (3.3). Из линейной однородной системы относительно  $c_1, c_2$  следует определяющее уравнение для  $\xi$ :

$$\Delta(\xi, \lambda^0) = 0, \quad \Delta(\xi, \lambda^0) \equiv \begin{vmatrix} v_1(\xi, \lambda^0) & v_2(\xi, \lambda^0) - 1 \\ v_1'(\xi, \lambda^0) - 1 & v_2'(\xi, \lambda^0) \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

Очевидно из определения, если  $\lambda^0 = \lambda$  (точное значение), то  $\xi = 1$ . Воспользуемся теоремой Лиувилля и приведем выражение для определителя  $\Delta(\xi, \lambda^0)$  (3.4) к более компактному виду. В результате имеем вместо (3.4) следующее определяющее уравнение

$$\Delta(\xi, \lambda^0) = v_1'(\xi, \lambda^0) + v_2(\xi, \lambda^0) - 2 = 0 \quad (3.5)$$

Поскольку при  $\lambda^0 = \lambda$  уравнение (3.5) имеет корень  $\xi = 1$ , то (при достаточно близких значениях  $\lambda^0$  к точному  $\lambda$ ) в окрестности этого значения существует корень  $\xi$  сколь угодно близкий к  $\xi = 1$ . Введем в качестве меры близости  $\lambda^0$  к  $\lambda$  величину  $\varepsilon$ , которую будем предполагать достаточно малой

$$\varepsilon = 1 - \xi, \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad \xi(\lambda^0) = \min \arg_{\xi} \Delta(\xi, \lambda^0) > 0$$

$$|\varepsilon| \leq d|\lambda - \lambda^0|, \quad |\lambda - \lambda^0| \leq D|\varepsilon|, \quad d, D = \text{const} \quad (3.6)$$

Корень  $\xi$  будем предполагать простым, т.е.  $d\xi/d\lambda \neq 0$  при  $\lambda = \lambda^0$  и, кроме того,  $\partial\Delta/\partial\xi \neq 0$  при  $\xi = \xi(\lambda^0)$ , см. п. 5. Множество значений  $\lambda$ , для которых  $d\xi/d\lambda = 0$ ,  $\partial\Delta/\partial\xi = 0$ , имеет меру нуль.

После определения искомого значения  $\xi$  решение  $v(x, \lambda^0)$  задачи Коши (3.1), удовлетворяющее условиям (3.3), можно представить в двух эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} v(x, \lambda^0) &= A[v_2'(\xi, \lambda^0)v_1(x, \lambda^0) + (1 - v_1'(\xi, \lambda^0))v_2(x, \lambda^0)] \\ v(x, \lambda^0) &= B[(1 - v_2(\xi, \lambda^0))v_1(x, \lambda^0) + v_1(\xi, \lambda^0)v_2(x, \lambda^0)] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь  $A$  и  $B$  – произвольные постоянные, которые можно положить равными единице ( $A = B = 1$ ) или выбрать из условий нормировки с весом  $r(x)$  на промежутке  $0 \leq x \leq \xi$ , т.е. из условия  $I[v] = 1$ ,  $0 \leq x \leq \xi$  (2.1). Оба выражения (3.7) удовлетворяют условиям периодичности на указанном интервале. Коэффициенты при  $v_1(x, \lambda^0)$ ,  $v_2(x, \lambda^0)$  предполагаются отличными от нуля (см. п. 5). В итоге эти выражения определяют решение периодической краевой задачи (1.1) или (1.2) с периодом  $\xi$ ;  $\lambda^0$  – первое собственное значение,  $v(x, \lambda^0)$  – первая собственная функция. При этом предполагается, что коэффициенты  $p = p(x)$ ,  $r = r(x)$  и  $q = q(x)$  продолжены периодически с указанным периодом  $\xi = \xi(\lambda^0)$  (3.6).

Отметим, что при конкретных расчетах величина (числовое значение) параметра  $\varepsilon$  может быть сделана сколь угодно малой посредством удачного выбора пробной функции  $\psi(x)$  или системы линейно независимых функций  $\{\psi(x)\}$  [9], или с помощью процедуры продолжения по параметру (см. п. 5). На практике обычно достаточным для применения метода возмущений оказывается значение  $\varepsilon = 0,1-0,01$ , которое достигается при весьма грубом выборе пробной функции  $\psi(x)$ .

Таким образом, выше изложена процедура определения малого параметра задачи  $\varepsilon$  на основе вычисления корня некоторого уравнения, которое строится посредством численного решения двух задач Коши для известной оценки  $\lambda^0$  первого собственного значения  $\lambda (= \lambda_1)$ . Далее предлагается разработать метод регулярных возмущений с целью высокоточного вычисления решения периодической краевой задачи (1.1) или (1.2).

**4. Применение метода возмущений.** Для приближенного решения периодической краевой задачи (1.1) со сколь угодно высокой степенью точности по  $\varepsilon$  воспользуемся приемом, аналогичным примененному А. Пуанкаре [5, 6] для построения периодических решений возмущенных автономных систем. Введем новые аргументы  $y$ , функцию  $V$  и число  $\Lambda$  и приведем соотношения (1.1) к виду возмущенной периодической краевой задачи [10–12]:

$$y = x\xi, \quad 0 \leq y \leq \xi, \quad V = V(y, \varepsilon) \equiv u(x), \quad \Lambda = \xi^{-2}\lambda$$

$$(p(y(1-\varepsilon)^{-1})V')' + [\Lambda r(y(1-\varepsilon)^{-1}) - (1-\varepsilon)^{-2}q(y(1-\varepsilon)^{-1})]V = 0 \quad (4.1)$$

$$V(0, \varepsilon) = V(\xi, \varepsilon), \quad V'(0, \varepsilon) = V'(\xi, \varepsilon)$$

В качестве порождающей (невозмущенной) краевой задачи возьмем соотношения (4.1) при  $\varepsilon = 0$ . Ее решение  $V_0(y) = v(y, \lambda^0)$ ,  $\Lambda_0 = \lambda^0$  (в частности,  $\Lambda_0 = \lambda^*$  (2.3)) известно и совпадает с построенным в п. 3, см. (3.1), (3.6), (3.7). Будем искать возмущенные выражения  $V, \Lambda$  в виде разложений по степеням  $\varepsilon$ :

$$V(y, \varepsilon) = v(y, \lambda^0) + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \dots, \quad \Lambda(\varepsilon) = \lambda^0 + \varepsilon \Lambda_1 + \varepsilon^2 \Lambda_2 + \dots \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в (4.1), в случае гладких коэффициентов  $p(y), r(y), q(y)$  на интервале  $y \in [0, \zeta]$ , где  $\zeta = \max(1, \xi)$ , получим для неизвестных  $V_1(y), \Lambda_1$  краевую задачу, описываемую линейным неоднородным уравнением

$$(p(y)V_1')' + [\lambda^0 r(y) - q(y)]V_1 = -\Lambda_1 r(y)v_0(y) - \lambda^0 y r'(y)v_0(y) + 2q(y)v_0(y) + yq'(y)v_0(y) - (yp'(y)v_0'(y))' \quad (4.3)$$

$$V_1(0) = V_1(\xi), \quad V_1'(0) = V_1'(\xi), \quad v_0(y) = v(y, \lambda^0)$$

Согласно альтернативе Фредгольма и вследствие самосопряженности задачи для однородного уравнения правая часть уравнения (неоднородность) (4.3) должна быть ортогональна функции  $v_0(y)$ . Это соотношение будет определяющим уравнением для неизвестной величины  $\Lambda_1$ . Разрешая его, получим выражение в виде квадратур

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = & \|v_0\|^{-2} \int_0^\xi [-\lambda^0 y r'(y) + 2q(y) + yq'(y)] v_0^2(y) dy - \\ & - \|v_0\|^{-2} \int_0^\xi p'(y) v_0'(y) v_0(y) dy + \|v_0\|^{-2} \int_0^\xi y p'(y) v_0'^2(y) dy \\ & \|v_0\|^2 = \int_0^\xi r(y) v_0^2(y) dy \end{aligned} \quad (4.4)$$

Равенство (4.4) есть необходимое и достаточное условие существования решения краевой задачи (4.3)  $V_1(y)$ . Эта функция может быть построена методом вариации постоянных интегрирования на основе формулы Лиувилля. Аналогично в виде квадратур находятся последующие коэффициенты  $\Lambda_n, V_n(y), n \geq 2$ , разложений (4.2). В случае негладких функций  $p(y), r(y), q(y), 0 \leq y \leq \xi$ , удовлетворяющих условию Липшица, следует применить рекуррентный метод последовательных приближений по степеням параметра  $\varepsilon, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ . Обоснование метода возмущений и оценка интервала  $\varepsilon_0$  сходимости проводятся на основе методов функционального анализа [5, 6, 13, 14] (мажорантные функции Коши, теорема Шаудера о неподвижной точке, теорема Банаха об операторе сжатия).

Однако такой подход малопродуктивен в прикладном аспекте, поскольку приводит к громоздким многократным квадратурам от функций, определяемых численно путем интегрирования задач Коши типа (3.1), а также решения неоднородных краевых задач типа (4.3), например, численным интегрированием уравнения, или методом вариаций постоянных интегрирования. Заметим, что на практике часто оказывается достаточным вычисление величины  $\Lambda$  в первом приближении по  $\varepsilon$  для оценки влияния некоторых возмущающих факторов. С погрешностью  $O(\varepsilon^2)$  для  $\lambda$  имеем выражение

$$\lambda^{(1)} = \xi^2 (\lambda^0 + \varepsilon \Lambda_1) = \lambda^0 + \varepsilon (\Lambda_1 - 2\lambda^0) + O(\varepsilon^2) \quad (4.5)$$

Здесь  $\Lambda_1 = \Lambda_1(\xi, \lambda^0)$ , где  $\xi = \xi(\lambda^0)$  определяется согласно (3.4) или (3.5) формулой

(3.6). Без потери точности по степеням  $\varepsilon$  (в первом приближении с погрешностью  $O(\varepsilon^2)$ ) в выражении (4.4) для  $\Lambda_1$  можно положить  $\xi = 1$ , т.е.  $\Lambda_1 = \Lambda_1(1, \lambda^0) + O(\varepsilon)$ .

Рассмотрим выражение (4.5) при  $\lambda^0 = \lambda^*$ , где  $\lambda^*$  — оценка сверху первого собственного значения (см. например, (2.3)). Тогда  $\lambda_* = \xi^2 \lambda^*$  есть оценка собственного значения снизу:  $\lambda_* \leq \lambda$ , если  $\varepsilon \Lambda_1 > 0$ ; предполагается, что  $|\varepsilon|$  достаточно мало. Аналогично, если  $\lambda^0 = \lambda_*$  — оценка снизу, то при  $\varepsilon \Lambda_1 < 0$  выражение  $\lambda^* = \xi^2 \lambda_*$  дает оценку сверху. На практике для оперативных расчетов эти оценки часто оказываются эффективными. Знак коэффициента  $\Lambda_1$  в ряде случаев может быть установлен "априори" (без взятия квадратур согласно (4.4)) на основе знакоопределенности функций. Например, при  $p = \text{const}$  грубым достаточным условием для установления знака  $\Lambda_1$  является знакоопределенность подинтегрального выражения в квадратной скобке (4.4).

Отметим, что формула (4.4) содержит производные функций  $p, r, q$ . Интегрированием по частям, избавляясь от производных, можно добиться их отсутствия и получить компактное конечное выражение [10–12] (см. ниже). На основе формулы для уточненного значения  $\lambda^{(1)}$  (4.5) и процедуры решения краевой задачи п. 3 можно разработать эффективный численно-аналитический метод ускоренной сходимости построения искомого решения исходной периодической краевой задачи (1.1) или (1.2). Изложенный в п. 4 подход приближенного построения собственного значения и функции применим и для других более высоких индексов  $n = 2, 3, \dots$ , поскольку специфика первого собственного числа и функции практически не использовалась (кроме номера корня  $\xi$  в (3.6)).

**5. Метод ускоренной сходимости.** Как отмечалось, выражение  $\Lambda_1$  (4.4) может быть существенно упрощено посредством интегрирования по частям [10–12]. Для  $\lambda^{(1)}$  получается в итоге компактное конечное выражение

$$\lambda^{(1)} = \lambda^0 + \varepsilon \mu(\xi, \lambda^0), \quad \xi = \xi(\lambda^0), \quad \varepsilon = 1 - \xi \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \mu(\xi, \lambda^0) = & -\xi \|v_0\|^{-2} [(\lambda^0 r(\xi) - q(\xi))v_0^2(\xi) + \\ & + p(\xi)v_0^2(\xi) + p'(\xi)v_0(\xi)v_0'(\xi)] \end{aligned}$$

где квадрат нормы с весом  $r(x)$  на интервале  $0 \leq x \leq \xi$  определяется согласно (4.4). Если функция  $p$  дифференцируема, а  $p', r, q$  удовлетворяют условию Липшица, то без потери точности можно положить  $\xi = 1$  в выражении (5.1). При помощи изложенного в п. 4 метода регулярных возмущений получим оценку близости и интервал сходимости

$$|\lambda - \lambda^{(1)}| \leq C\varepsilon^2, \quad 0 \leq |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \quad (5.2)$$

где постоянные  $C$  и  $\varepsilon_0$  определяются конструктивно в терминах коэффициентов системы (1.1) и их производных. Далее предполагается, что величина абсциссы  $\xi$ , вычисленная согласно (3.6), удовлетворяет второму неравенству (5.2).

Изложим кратко алгоритм последовательного уточнения собственных значений и функций, обладающий свойством ускоренной сходимости (типа метода касательных Ньютона). Возьмем теперь уточненное значение  $\lambda^{(1)}$  (5.1) вместо начального приближения  $\lambda^0$  и подставим его в соотношения (3.1); построим численно или аналитически функции  $v_{1,2}(x, \lambda^{(1)})$ , которые являются собственными на некотором интервале  $0 \leq x \leq \xi_{(1)}$ ,  $\xi_{(1)} > 0$ . Определим затем из уравнения (3.5) абсциссу  $\xi_{(1)} = \xi(\lambda^{(1)})$  и параметр  $\varepsilon_{(1)} = 1 - \xi_{(1)}$  согласно (3.6), а также собственную функцию  $v_{(1)}(x) = v(x, \lambda^{(1)})$  по формулам (3.7); получим оценки

$$|\varepsilon_{(1)}| \leq d|\lambda - \lambda^{(1)}| \leq dC\varepsilon^2, \quad |v(x, \lambda) - v_{(1)}(x)| \leq K|\varepsilon_{(1)}| \quad (5.3)$$

$$|v'(x, \lambda) - v'_{(1)}(x)| \leq K|\varepsilon_{(1)}|, \quad 0 \leq x \leq \zeta_{(1)}, \quad \zeta_{(1)} = \max(1, \xi_{(1)})$$

Для определенности полагаем, что точная функция  $u(x, \lambda)$  и приближенная  $v(x, \lambda^{(1)})$  являются нормированными; можно также положить  $A = 1$  или  $B = 1$  в (3.7). С помощью известных  $\xi_{(1)}, \varepsilon_{(1)}$  и  $u_{(1)}(x), v'_{(1)}(x)$  по формуле типа (5.1) определяется следующее приближение  $\lambda$ :  $\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} + \varepsilon_{(1)}\mu(\xi_{(1)}, \lambda^{(1)})$ , причем вместо  $\xi_{(1)} = \xi(\lambda^{(1)})$  можно подставить значение  $\xi_{(1)} = 1$  без потери точности по степеням  $\varepsilon_{(1)}, \varepsilon_{(1)} = O(\varepsilon^2)$ . Процесс может быть неограниченно продолжен ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} (p(x)v')' + [\lambda^{(k)}r(x) - q(x)]v &= 0, \quad v_{(k)}(x) = v(x, \lambda^{(k)}) \\ \Delta(\xi, \lambda^{(k)}) &= v'_1(\xi, \lambda^{(k)}) + v_2(\xi, \lambda^{(k)}) - 2 = 0 \\ \xi_{(k)} &= \xi(\lambda^{(k)}) = \min \arg_{\xi} \Delta(\xi, \lambda^{(k)}) > 0, \quad \varepsilon_{(k)} = 1 - \xi_{(k)} \\ \lambda^{(k+1)} &= \lambda^{(k)} + \varepsilon_{(k)}\mu(\xi_{(k)}, \lambda^{(k)}) = \lambda^{(k)} + \varepsilon_{(k)}\mu(1, \lambda^{(k)}) + O(\varepsilon_{(k)}^2) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Функции  $v_{1,2}(x, \lambda^{(k)}), u_{(k)}(x)$  определяются формулами (3.1), (3.7) при  $\lambda^0 = \lambda^{(k)}, \xi = \xi(\lambda^{(k)})$ . Таким образом, алгоритм уточнения собственного значения  $\lambda$  и функции  $u(x)$  сводится к однотипным, как правило, численным операциям: 1) интегрирование двух задач Коши (3.1), 2) определение корня уравнения (3.5) и 3) уточнение значения  $\lambda$  по формуле типа (5.1), см. (5.4).

Отметим, что вычисление квадрата нормы  $\|u_{(k)}\|^2$  можно заменить процедурой совместного интегрирования уравнения для неизвестной функции  $w = \partial v / \partial \lambda$ :

$$\begin{aligned} (p(x)w')' + [\lambda^{(k)}r(x) - q(x)]w &= -r(x)v(x, \lambda^{(k)}), \quad w(0) = w'(0) = 0 \\ \|v_{(k)}\|^2 &\equiv \int_0^{\xi_{(k)}} r(x)v^2(x, \lambda^{(k)})dx = [v'(\xi_{(k)}, \lambda^{(k)})w(\xi_{(k)}, \lambda^{(k)}) - \\ &- v(\xi_{(k)}, \lambda^{(k)})w'(\xi_{(k)}, \lambda^{(k)})]p(\xi_{(k)}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Как отмечалось, без потери точности по степеням  $\varepsilon_{(k)}$  на  $k$ -м шаге можно положить  $\xi_{(k)} = 1, k = 0, 1, \dots$  Это упрощает вычисления, поскольку при высокоточных расчетах требуется согласование величин шагов вычислений с длиной интервала  $\xi_{(k)}$ .

Оценим погрешность рекуррентной процедуры (5.4). Она определяется величиной параметра  $\varepsilon_{(k)}$ , т.е.

$$|\varepsilon_{(k)}| \leq dC\varepsilon_{(k-1)}^2 \leq (dC)^3\varepsilon_{(k-2)}^4 \leq \dots \leq (dC)^{-1}(\varepsilon dC)^{\theta(k)}, \quad \theta(k) = 2^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

Изложенная процедура весьма быстро сходится к точному решению периодической краевой задачи при  $\delta = |\varepsilon|dC < 1$ . На практике даже для довольно сложных выражений  $p, r, q$  обычно достигается  $\delta = 0,1-0,01$ , что позволяет за две-три итерации получать высокоточные приближенные значения и функции. Четыре-пять итераций практически исчерпывают точностные возможности математического обеспечения современных ЭВМ. Предлагаемый подход легко реализуем; он не требует привлечения дорогостоящего программного обеспечения.

Обсудим проблему определения начального приближения  $\lambda^0$ . Эта оценка может быть уточнена посредством малокоординатного приближения собственной функции по методу Релея - Ритца [1-3, 8-14]. На практике часто функции  $p = p(x, \alpha), r = r(x, \alpha), q = q(x, \alpha)$ , т.е. зависят от некоторого скалярного или векторного параметра  $\alpha, \alpha \in A$  и требуется построить искомое решение периодической краевой задачи в зависимости от  $\alpha: \lambda = \lambda(\alpha), u = u(x, \alpha)$ . Тогда может быть применен эффективный алгоритм продолжения решения по параметру  $\alpha$  в предположении, что при некотором значении  $\alpha_0 \in A$  искомое достаточно точное решение известно или может быть построено на основе метода Релея-Ритца, метода "пристрелки", изложенного выше метода возму-

щений и др. (см. п. 6, пример 6.3). Высокоточное решение  $u(x, \alpha_0)$  по изложенному выше алгоритму используется далее в качестве начального приближения (пробной функции) для построения искомой оценки  $\lambda^0(\alpha)$  для других значений  $\alpha \in A$ , близких к  $\alpha_0 \in A$ . Это означает, что высокоточная оценка  $\lambda(\alpha_0)$  рассматривается как начальное приближение  $\lambda^0(\alpha)$  для достаточно близких к  $\alpha_0$  значений  $\alpha \in A$ . Параметр, по которому осуществляется продолжение, можно ввести искусственно, например следующим образом. В уравнениях (1.1), (1.2) полагаем  $p = P, r = R, q = Q$ , где

$$P(x, \alpha) = p_0(x) + \alpha(p(x) - p_0(x)), \quad R(x, \alpha) = r_0(x) + \alpha(r(x) - r_0(x)) \quad (5.7)$$

$$Q(x, \alpha) = q_0(x) + \alpha(q(x) - q_0(x)), \quad p_0(x), r_0(x) > 0, \quad 0 \leq x, \alpha \leq 1$$

Здесь  $p_0(x), r_0(x), q_0(x)$  – некоторые аппроксимации функций  $p(x), r(x), q(x)$ , для которых решение может быть построено сравнительно просто (в частности,  $p_0, r_0, q_0 = \text{const}$ , см. пример 6.3). Полагая в (5.7)  $\alpha = \alpha_j = j/N$ , где  $j = 0, 1, 2, \dots, N$ ;  $N$  – достаточно велико, методом продолжения по параметру  $\alpha_j$  с шагом  $\Delta\alpha = 1/N$  получим высокоточное решение периодической краевой задачи. Применение изложенных выше подходов требует проведения численных экспериментов, легко реализуемых на современных РС АТ.

На практике при некотором значении параметра  $\alpha = \alpha_0$  может иметь место случай однократного вырождения, когда  $\partial\Delta/\partial\xi = 0$  при  $\xi = \xi(\lambda^0)$ , но  $\partial^2\Delta/\partial\xi^2 \neq 0$ . Например, это выполняется для системы с постоянными коэффициентами (уравнение Матье или Хилла). Тогда оказывается, что условия периодичности выполняются для обеих функций

$$v_{1,2}(0, \lambda^0) = v_{1,2}(\xi, \lambda^0), \quad v'_{1,2}(0, \lambda^0) = v'_{1,2}(\xi, \lambda^0) \quad (5.8)$$

для одного и того же значения  $\xi(\lambda^0)$ . При изменении параметра  $\alpha$  будет происходить расщепление собственного значения  $\lambda(\alpha)$ , отвечающее двум различным функциям  $v_1(x, \alpha)$  и  $v_2(x, \alpha)$ . В этом случае требуется проведение более аккуратных и тщательных расчетов при отходе от значения  $\alpha = \alpha_0$ .

В частности, при  $p, r, q = \text{const}$  имеем две собственные функции  $v = c_1 v_1$  и  $v = c_2 v_2$ , где  $v_1 = v_0^{-1} \sin v_0 x$ ,  $v_2 = \cos v_0 x$ ; согласно (3.5) имеем  $\Delta(\xi v_0) = -\sin^2(\xi v_0/2) = 0$ . Величина абсциссы  $\xi = \xi(v_0) = 2\pi/v_0$ , одна и та же для обеих функций. Предполагается, что значение  $v_0$  близко к  $2\pi$ , т.е.  $v_0^2 = (\lambda^0 r - q)/p \approx (2\pi)^2$ , что соответствует значению  $\lambda^0 = ((2\pi)^2 p + q)/r$ . Выражения (3.7) должны быть преобразованы следующим образом:

$$\begin{aligned} v(x, \lambda^0) &= c_1 [v_1(x, \lambda^0) + (1 - v'_1(\xi, \lambda^0))(v'_2(\xi, \lambda^0))^{-1} v_2(x, \lambda^0)] = \\ &= c_2 [(1 - v_2(\xi, \lambda^0))v_1^{-1}(\xi, \lambda^0)v_1(x, \lambda^0) + v_2(x, \lambda^0)] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Если имеет место ситуация (5.8), то по формулам (5.9) получим в пределе при  $\xi \rightarrow \xi(\lambda^0)$ :

$$v(x, \lambda^0) = c_1 v_1(x, \lambda^0), \quad v(x, \lambda^0) = c_2 v_2(x, \lambda^0) \quad (5.10)$$

поскольку  $(1 - v'_1)$  и  $(1 - v_2)$  стремятся к нулю быстрее, чем  $v'_2$  и  $v_1$  при  $\xi \rightarrow \xi(\lambda^0)$ . Для различных ветвей  $\lambda(\alpha)$  используются разные выражения функций  $u(x, \lambda, \alpha)$  согласно (5.10).

Для иллюстрации эффективности метода возмущений и алгоритма ускоренной сходимости проведем численный расчет конкретных задач.

**6. Примеры.** Приведем расчет модельных примеров периодических краевых задач для различных уравнений, содержащих также некоторые параметры. Исследуем зависимость собственных значений и функций от этих параметров.



6.1. Рассмотрим сперва случай уравнения (1.1) типа Эйлера, допускающего точное аналитическое решение

$$u'' + \lambda r(x, \theta)u = 0, \quad r(x, \theta) = (\theta + x)^{-2}, \quad u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1) \quad (6.1)$$

$$u = (\theta + x)^{1/2}(a \sin \varphi + b \cos \varphi), \quad \varphi = \varphi(v, \theta, x) = v \ln(\theta + x)$$

Здесь  $\theta > 0$  — произвольный числовой параметр;  $a, b$  — постоянные интегрирования, неизвестное и подлежащее дальнейшему определению значение  $v = (\lambda - 1/4)^{1/2} \geq 0$ ,  $\lambda \geq 1/4$ . Соответствующее характеристическое уравнение (3.4) (или (3.5)) для определения  $v = v_n(\theta)$  приводится к виду

$$\cos \Delta \varphi = 2\alpha(\alpha^2 + 1)^{-1} - \frac{1}{2}v^{-1}(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 1)^{-1} \sin \Delta \varphi \quad (6.2)$$

$$\Delta \varphi \equiv \varphi(v, \theta, 1) - \varphi(v, \theta, 0) = 2v \ln \alpha, \quad \alpha = (1 + \theta^{-1})^{1/2} > 1$$

Корни  $v_n(\theta)$  уравнения (6.2) простые, они могут быть определены численно с помощью ЭВМ. Аналитически можно установить их асимптотическое поведение при  $\theta \rightarrow 0$  ( $\alpha \rightarrow \infty$ ) и  $\theta \rightarrow \infty$  ( $\alpha \rightarrow 1$ ):

$$v_n \sim \frac{1}{2} \pi n / \ln \theta^{-1} \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0; \quad v_n \sim 2\pi n \theta \rightarrow \infty, \quad \theta \rightarrow \infty \quad (6.3)$$

Выражения (6.3) представляют собой главные члены соответствующих разложений. При помощи теорем Вейерштрасса могут быть построены последующие члены аналитических разложений. Таким образом, поведение корней  $v_n(\theta)$  оказывается довольно простым для всех  $n$  и  $\theta$  и не содержит особенностей.

6.2. Рассмотрим другой более поучительный случай уравнения, допускающего точное интегрирование в элементарных функциях. Пусть коэффициент  $r(x, \theta)$  имеет в задаче (6.1) следующий вид

$$r(x, \theta) = [1 + (x - \theta)^2]^{-2}, \quad |\theta| < \infty, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (6.4)$$

Тогда продолжаемая периодически по  $x$  с периодом, равным единице, функция  $r(x, \theta)$  (6.4) терпит разрывы первого рода, величина которых равна

$$\Delta r(\theta) = r(1, \theta) - r(0, \theta) = (\theta - \frac{1}{2})(4\theta^2 - 4\theta + 3)r(1, \theta)r(0, \theta) \\ \Delta r(\frac{1}{2}) = 0, \quad \Delta r(\theta) \sim r|\theta|^{-5}, \quad r(x, \theta) \sim \theta^{-4}, \quad |\theta| \rightarrow \infty \quad (6.5)$$

Из (6.5) следует, что задача симметрична относительно значения  $\theta = 1/2$ , т.е. достаточно исследовать решение при  $-\infty < \theta \leq 1/2$  или при  $1/2 \leq \theta < \infty$ , см. ниже.

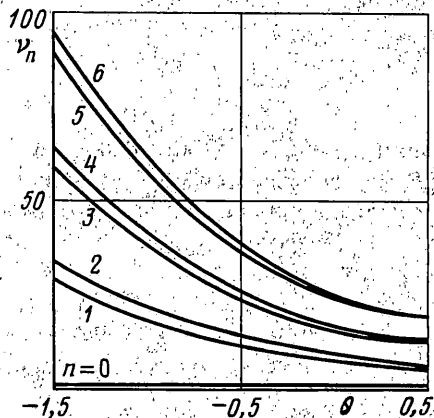
Для построения общего решения уравнения (6.1), (6.4) совершим замены аргумента  $x \rightarrow y$ , параметра  $\lambda \rightarrow v$  и функции  $u(x, \lambda) \rightarrow V(y, v)$ :

$$x - \theta = \operatorname{tg} y, \quad y_0 \leq y \leq y_1, \quad y_0 = -\operatorname{arctg} \theta, \quad y_1 = \operatorname{arctg}(1 - \theta) \\ v^2 = \lambda + 1, \quad u(x, \lambda, \theta) = V(y, v, \theta) / \cos y \quad (6.6)$$

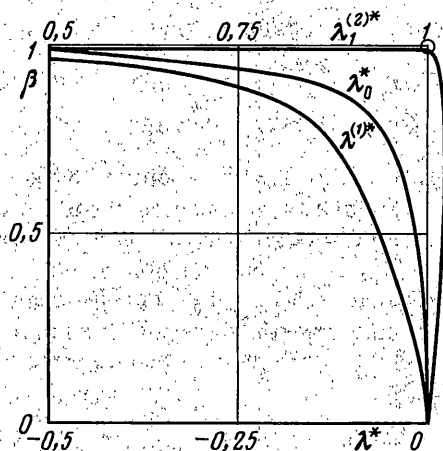
Периодическая краевая задача в новых переменных (6.6) описывается соотношениями

$$V'' + v^2 V = 0, \quad y_0 \leq y \leq y_1, \quad V(y_0) / \cos y_0 = V(y_1) / \cos y_1 \\ V'(y_0) \cos y_0 + V(y_0) \sin y_0 = V'(y_1) \cos y_1 + V(y_1) \sin y_1 \quad (6.7)$$

Уравнение для  $V$  (6.7) интегрируется в тригонометрических функциях:  $V = a \sin v y + b \cos v y$ , где  $a, b$  — постоянные интегрирования, выбираемые с учетом условий периодичности. В результате получается соответствующее характеристическое уравнение для определения собственных значений  $v = v_n(\theta)$  задачи (6.7) вида (3.4)



Фиг. 1



Фиг. 2

(или (3.5)):

$$\Delta(v, \theta) = v[(\cos^2 y_1 + \cos^2 y_0) \cos v(y_1 - y_0) - 2 \cos y_1 \cos y_0] + (\cos y_1 \sin y_1 - \cos y_0 \sin y_0) \sin v(y_1 - y_0) = 0 \quad (6.8)$$

Здесь известные величины  $y_{0,1} = y_{0,1}(\theta)$  определены согласно заменам (6.6). Трансцендентное уравнение (6.8) имеет счетное множество корней  $v_n = v_n(\theta)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  для всех значений  $\theta$ ,  $|\theta| < \infty$ , которые могут быть найдены численно при помощи ЭВМ, см. фиг. 1. Отметим, что имеется корень  $v \equiv 0$  ( $\lambda \equiv -1$ ), который, однако, приводит к тривиальному решению  $V(y, v, \theta) \equiv 0$ . Нетрудно также установить наличие корня  $v_0(\theta) \equiv 1$  ( $\lambda_0(\theta) \equiv 0$ ), которому отвечает собственная функция  $V_0 = b \cos y$  ( $u_0 \equiv b = \text{const}$ ), что очевидно. На фиг. 1 приведено численное решение уравнения (6.8); для различных значений  $\theta$  построены первые семь собственных значений  $v_n(\theta)$ ,  $n = 0, 1, \dots, 6$  задачи (6.7).

Рассмотрим некоторые конкретные значения  $\theta$ , допускающие существенное упрощение уравнения (6.8). Пусть  $\theta = 1/2$ ; тогда решение задачи расщепляется: имеют место два набора корней  $\{v_k^*\}$ ,  $\{v_m^{**}\}$ , соответствующих им собственных значений  $\{\lambda_k^*\}$ ,  $\{\lambda_m^{**}\}$ , см. (6.6), и собственных функций  $\{u_k^*(x)\}$ ,  $\{u_m^{**}(x)\}$ :

$$v_k^* = \pi k / y^0, \quad y^0 = \arctg 1/2 \approx 0,4636, \quad \lambda_k^* = v_k^{*2} - 1 > 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$u_k^*(x) = a_k (1 + (x - 1/2)^2)^{1/2} \sin(v_k^* \arctg(x - 1/2)) \quad (6.9)$$

$$v_m^{**} = \text{Arg}(\text{tg} v y^0 - 1/2 v^{-1}), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad v_0^{**} = 1, \quad \lambda_0^{**} = 0$$

$$\lambda_m^{**} = v_m^{**2} - 1 > 0, \quad m \geq 1; \quad v_m^{**} \rightarrow \pi m / y^0, \quad m \rightarrow \infty$$

$$u_m^{**}(x) = b_m (1 + (x - 1/2)^2)^{1/2} \cos(v_m^{**} \arctg(x - 1/2))$$

Таблицы корней  $z_m(\gamma)$  уравнения вида  $\text{tg} z = \gamma z^{-1}$  для различных значений  $\gamma$  приведены в соответствующих монографиях и справочниках (или строятся численно).

Возьмем значение  $\theta = 0$  (или  $\theta = 1$ ); получим характеристическое уравнение и приближенные значения корней при  $n \gg 1$ :

$$\cos(\pi v / 4) = 2\sqrt{2} / 3 - (3v)^{-1} \sin(\pi v / 4), \quad v = v_n, \quad \lambda_{n*} = v_n^2 - 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.10)$$

$$v_0 = 1; \quad v_n = \pm(4 / \pi) \arccos(2\sqrt{2} / 3) + 8n + (6\pi n)^{-1} + O(n^{-2}), \quad n \gg 1$$

Собственные функции  $u_n(x)$  при  $\theta = 0, 1$  могут быть представлены в виде

$$u_n(x) = c_n (1+x^2)^{1/2} [(1 - \sqrt{2} \cos(\pi v_n / 4)) \sin(v_n \arctg x) + \sqrt{2} \sin(\pi v_n / 4) \cos(v_n \arctg x)] \quad (6.11)$$

Обратимся вновь к уравнению (6.8); его корни  $v_0, v_1, \dots, v_6$  как функции  $\theta$  приведены на фиг. 1 для значений  $-1,5 \leq \theta \leq 0,5$ , а вследствие симметрии задачи относительно  $\theta = 1/2$ , и для  $0,5 \leq \theta \leq 2,5$ . Отметим, что значение функции  $r(x, \theta)$  при  $\theta = -1,5$  или  $\theta = 2,5$  изменяется приблизительно в 53 раза. Из формул (6.9) следует, что при  $\theta = 1/2$  значения  $v_{2k-1}$  и  $v_{2k}$  неограниченно сближаются при  $k \rightarrow \infty$ , т.е. наступает "вырождение" – собственные значения становятся кратными, см. фиг. 1. Однако для значений  $\theta \neq 1/2$  эти значения расходятся на конечную величину, в частности для  $\theta = 0, 1$ , при  $k \rightarrow \infty$  имеем  $v_{2k} - v_{2k-1} = (8/\pi) \arccos(2\sqrt{2}/3) \approx 0,87$ . При  $|\theta| \rightarrow \infty$  нетрудно получить следующую оценку для  $v_n$ :  $v_n(\theta) \approx 2\pi n \theta^2$ , т.е.  $\lambda_n(\theta) \approx (2\pi n \theta^2)^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Полученные решения задач (6.1), (6.4) могут быть использованы для отладки программы при численных расчетах на ЭВМ, а также применены в качестве начального приближения в методе продолжения по параметру при применении алгоритма ускоренной сходимости (см. п. 5).

6.3. Эффективность алгоритма ускоренной сходимости (см. п. 5) проиллюстрируем расчетом периодической краевой задачи для модифицированного уравнения Матье (уравнения типа Хилла):

$$\begin{aligned} u'' + (\lambda - q(\varphi, \beta))u &= 0, \quad u(-1) = u(1), \quad u'(-1) = u'(1) \\ q(\varphi, \beta) &= \beta \cos \varphi (1 + \beta \cos \varphi)^{-1} = \beta \cos \varphi - \beta^2 \cos^2 \varphi + \beta^3 \cos^3 \varphi - \beta^4 \dots, \\ \varphi &= 2\pi x, \quad -1 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Здесь  $\beta$  – числовой параметр;  $|\beta| < 1$ , поскольку согласно (6.12) при  $|\beta| \geq 1$  функция  $q$  становится неограниченной. Для значений  $|\beta| \ll 1$  уравнение (6.12) близко (с погрешностью  $O(\beta^2)$ ) уравнению Матье [6–8].

Для определения собственных значений  $\lambda = \lambda_n(\beta)$  и соответствующих 2-периодических собственных функций  $u = u_n(x, \beta)$  применим разработанный выше в п. 5 алгоритм ускоренной сходимости (5.4) и процедуру продолжения по параметру  $\beta \geq 0$  (5.7), начиная с  $\beta = 0$ . При  $\beta = 0$  решение краевой задачи строится элементарно; при этом значение  $\lambda_0(0) = 0$  оказывается невырожденным и ему отвечает функция  $u_0(x, 0) = b = \text{const}$ . Следующие значения  $\lambda_n(0) = (\pi n)^2$ ,  $n \geq 1$  оказываются двукратно вырожденными; им отвечают две собственные функции:  $u_n^{(1)}(x, 0) = a_n (\pi n)^{-1} \sin \pi n x$  и  $u_n^{(2)}(x, 0) = b_n \cos \pi n x$ . При  $\beta \neq 0$  значения  $\lambda_n(\beta)$  разветвляются на две ветви  $\lambda_n = (\lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)})$ . Первой и второй ветвям отвечает нечетное  $u_n^{(1)}(x, \beta)$  и четное  $u_n^{(2)}(x, \beta)$  решение соответственно, точнее, решение, вырождающееся в нечетную или четную функции.

На фиг. 2 приведены графические результаты расчетов низших собственных значений  $\lambda_0(\beta)$  (им соответствует нижняя ось абсцисс) и  $\lambda_1(\beta) = (\lambda_1^{(1)}(\beta), \lambda_1^{(2)}(\beta))$  (верхняя ось абсцисс) для  $0 \leq \beta < 1$ . Установлено, что при  $\beta \ll 1$  эти зависимости близки соответствующим кривым на диаграмме Айнса–Стретта [6–8]. При увеличении  $\beta$  различия нарастают и поведение  $\lambda_{0,1}(\beta)$  существенно отличается от значений, приведенных для уравнения Матье. Численными и аналитическими исследованиями установлено, что  $\lambda_0, \lambda_1^{(1)} \rightarrow -\infty$  при  $\beta \uparrow 1$ , причем зависимость монотонна, см. фиг. 2. Собственные значения  $\lambda_0, \lambda_1^{(1)}$  были рассчитаны для  $0 \leq \beta \leq 0,999$ ; функция  $q$  изменялась в широких пределах:  $|q|_{\min} = 0$ ,  $|q|_{\max} = \beta(1 - \beta)^{-1} \approx 10^3$ .

Исследование зависимости  $\lambda_1^{(2)}(\beta)$  оказалось несколько сложнее. Как и функции  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1^{(1)}$ , она имеет "касание" с соответствующей вертикальной прямой при  $\beta = 0$ . Затем переменная  $\lambda_1^{(2)}(\beta)$  слабо возрастает для  $0 \leq \beta \leq 0,7$ ;  $\lambda_{1\max}^{(2)} = 10,040$  и монотонно убывает при дальнейшем увеличении  $\beta$ ;  $0,7 \leq \beta \leq 1 - 0$ . Однако убывание  $\lambda_1^{(2)}$  существенно медленнее, чем  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1^{(1)}$ ; например, значение  $\lambda_1^{(2)} = \pi^2(\lambda_1^{(2)*} = 1)$  достигается лишь при  $0,999 < \beta < 0,9995$ . Для последовательности  $\beta_i = 1 - 10^{-i}$ , где  $i = 1, 2, \dots, 7$ , получены с погрешностью порядка  $10^{-8}$  соответствующие выражения  $\lambda_1^{(2)}(\beta_i)$ ; приведем их с тремя значащими цифрами после запятой (без округления): 10,009; 9,918; 9,871; 9,852; 9,845; 9,842; 9,841.

Следует отметить, что при  $\beta \uparrow 1$  задача имеет обобщенное предельное решение:  $\lambda_1^{(2)} = \pi^2$  (фиг. 2, точка в правом верхнем угле); собственная функция  $u_1^{(2)}(x, \beta) \rightarrow \cos \pi x$  по норме  $W_2^{(1)}$  [4, 9, 13]. Это можно установить интегрированием уравнения (6.12) (интеграл понимается в смысле главного значения). Значение  $\lambda_1^{(2)} = \pi^2$  есть также оценка сверху собственного числа соответствующей вариационной задачи (2.1) при  $\beta \rightarrow 1 - 0$ , что доказывается на основе принципа Рэля с помощью пробной функции  $\psi(x) = \cos \pi x$ . Методами теории вычетов определяется интеграл  $J[\psi]$  (2.3) и осуществляется предельный переход при  $\beta \rightarrow 1 - 0$ .

Отметим, что расчеты собственных значений и функций по изложенной в п. 5 рекуррентной схеме метода ускоренной сходимости проводились с погрешностью  $\epsilon^{(k)} \sim 10^{-8}$  (точность определения абсциссы  $\xi^{(k)}$  была  $10^{-10} - 10^{-11}$ ) на основе процедуры продолжения по параметру  $\beta$ ; обычно требовалось выполнение 3–4-х итераций. Алгоритм обеспечивал высокую эффективность расчетов: точность, устойчивость, быстродействие. Дальнейшее подробное численно-аналитическое исследование модифицированного уравнения Матье (6.12) может иметь важное значение для понимания поведения собственных частот в системах с особыми точками с целью определения границ областей устойчивости и неустойчивости различных резонансных зон.

Авторы благодарят А.М. Шматкова за выполнение некоторых весьма высокоточных расчетов в примере 6.3 и А.А. Чайковского за помощь при оформлении графиков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00221, 96-01-00265).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
2. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 930 с.
3. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. М.: Мир, 1970. 328 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
5. Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.
6. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
7. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 320 с.
8. Мак Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матье. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 474 с.
9. Крылов Н.М. Методы приближенного решения задач математической физики // Избр. труды. Т. 2. Киев: Изд-во АН УССР, 1961. 150 – 204.
10. Нестеров С.В., Акуленко Л.Д. Эффективное решение задачи Штурма – Лиувилля // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 1. С. 44–46.

11. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* Accelerated convergence method in the Sturm-Liouville problem // *Rus. J. of Math. Phys.* 1995. V 3. No. 4. P. 517–521.
12. *Акуленко Л.Д., Костин Г.В., Нестеров С.В.* Численно-аналитический метод исследования свободных колебаний неоднородных стержней // *Изв. РАН. МТТ.* 1995. № 5. С. 180–192.
13. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969. 447 с.
14. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Эффективный метод исследования колебаний существенно неоднородных распределенных систем // *ПММ.* 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 466–478.

Москва

Поступила в редакцию  
19.VII.1997