

УДК 531.38

© 1998 г. И.В. НОВОЖИЛОВ

КАЧЕНИЕ КОЛЕСА

Рассматривается плоская задача качения колеса по шероховатой поверхности. Предложено уточненное выражение для контактной силы Картера – Фромма. Обсуждается вопрос о соотношении традиционных моделей качения: качение без проскальзывания, качение с контактными силами, определяемыми по Кулону и Картеру – Фромму.

Ненагруженное колесо считается диском радиуса R . При нагружении оси колеса C вертикальной нагрузкой будем предполагать, что основная часть внешнего контура не изменяет своей формы, кроме малой окрестности зоны контакта с дорогой, где происходят радиальные деформации. На фиг. 1 внешний контур обозначен сплошной линией. Длину площадки контакта обозначим $2a \ll R$. Опорную поверхность считаем абсолютно жесткой, шероховатой.

Введем правую, ортогональную систему координат $Oxuz$, как указано на фиг. 1, с началом O в середине площадки контакта, горизонтальной и вертикальной осями x и u . Точки O и C считаются лежащими на оси u . Общий случай рассматривается в [1].

Деформации в касательном направлении зададим так. Внешний контур будем считать нерастяжимым. В рамках "brush-модели" Фромма [2] контур снабжен набором бесконечно малых "щетинок" – упругих, безынерционных контактных элементов, которые одним концом скреплены с контуром, а другим – опираются на поверхность, когда выходят на контакт с ней. Опорный конец "щетинки" взаимодействует с дорогой по закону Кулона.

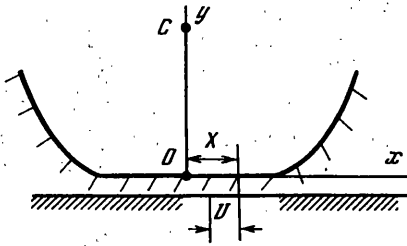
Обозначим через U касательную составляющую деформации произвольного контактного элемента. Величина U зависит от координаты X верхнего конца "щетинки" в системе $Oxuz$ и от времени T .

$$U = U(T, X) \quad (1)$$

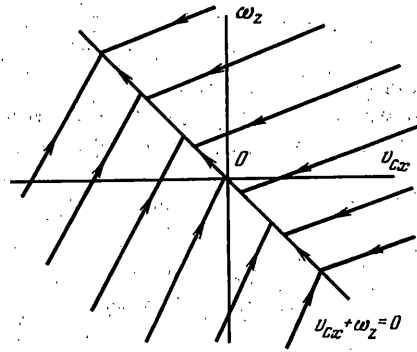
Касательную составляющую Δp упругой силы, развиваемой элементом, запишем в виде $\Delta p = -kU$, где k – коэффициент упругости. Тогда суммарная касательная сила, приложенная к колесу со стороны всех элементов, будет

$$P_x = -k \int_{-a}^a UdX \quad (2)$$

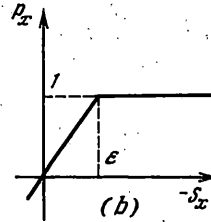
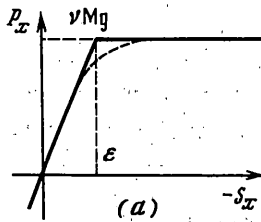
Рассмотрим два крайних случая движения. В первом будем считать, что опорные концы всех контактных элементов проскальзывают по поверхности. Тогда локальная деформация (1) определяется величиной максимальной силы кулонова трения, приложенной к опорному концу данного элемента. Будем полагать заданным распределение плотности нормальных реакций по пятну контакта. (Для резиновой пневматической шины, например, плотность может приниматься постоянной.) Локальные силы трения и величина U в (1) могут тогда считаться заданными функциями X и T , а



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

выражение (2) приводится к известному виду

$$P_x = -\nu N \text{sign} V_{Ox} \quad (3)$$

где ν – коэффициент кулонова трения, а N – нормальная составляющая главного вектора опорной реакции. Далее примем $N = Mg$, где M – масса колеса.

Во втором крайнем случае движения предполагается, что не проскальзывает ни один контактный элемент. Опорные концы контактных элементов в этом случае неподвижны относительно дороги при пробегании элемента вдоль площадки контакта. Скорости верхних концов одинаковы в силу нерастяжимости контура колеса и совпадают со скоростью V_{Ox} точки O . Тогда

$$dU/dT = V_{Ox} \quad (4)$$

$$V_{Ox} = V_{Cx} + \Omega_z R \quad (5)$$

Здесь V_{Cx} – переносная составляющая скорости точки O вместе с системой $Oxuz$, а $\Omega_z R$ – составляющая скорости относительно этой системы. Величина последней в силу нерастяжимости контура одинакова для всех его точек, в частности и для точек вне зоны опорных деформаций. Тогда Ω_z определяется как проекция вектора угловой скорости недеформированной части колеса. Подставив (2), (5) в (4), получим

$$\frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial U}{\partial X} \Omega_z R = V_{Cx} + \Omega_z R \quad (6)$$

где $dX/dT = \Omega_z R$ – только что оговоренная скорость контактного элемента относительно системы $Oxuz$.

Запишем уравнение движения центра масс и уравнение кинетического момента относительно точки C для механической системы, заключенной внутри контура колеса

$$M \frac{dV_{Cx}}{dT} = F + P_x; \quad I \frac{d\Omega_z}{dT} = L + P_x(R - H) \quad (7)$$

В силу оговоренной малости деформаций колеса в (7) принимается, что центр масс колеса совпадает с точкой C , а величина момента инерции I полагается равной цент-

ральному моменту инерции недеформированного колеса. В (7) через F и L обозначены главный вектор и главный момент внешних, помимо контактных, сил, $H \ll R$ – вертикальное обжатие колеса.

Запишем начальные и граничные условия задачи

$$V_{Cx}(0) = V_0, \quad \Omega_z(0) = \Omega_0, \quad U(0, X) = U_0(X) \quad (8)$$

$$U(T, X_0) = 0 \quad (X_0 = \mp a \text{ при } \Omega_z \geq 0)$$

Последнее из условий (8) означает, что контактный элемент недеформирован в момент его первого соприкосновения с дорогой, которое происходит либо на левой, либо на правой границе площадки контакта в зависимости от направления вращения колеса.

Нормализуем полученные соотношения, перейдя в них к безразмерным аналогам исходных величин [1]:

$$t = \frac{T}{T_*}, \quad v_{Cx} = \frac{V_{Cx}}{V_*}, \quad \omega_z = \frac{\Omega_z}{\Omega_*}, \quad u = \frac{U}{U_*}, \quad p_x = \frac{P_x}{P_*}, \quad f = \frac{F}{F_*}, \quad l = \frac{L}{L_*}$$

Здесь T_*, \dots, L_* – характерные значения соответствующих величин, выбираемые так, чтобы t, \dots, l для рассматриваемого класса движения не превосходили по модулю значений порядка единицы.

Рассмотрим движение, в котором колесо поворачивается на "большие" углы порядка единиц радианов, а переносная и относительная составляющие скорости в (5) – величины одного порядка. Для этого движения справедливы оценки $\Omega_* T_* = 1$, $V_* = \Omega_* R$, $T_* = MV_*/F_*$. В качестве характерного значения для сил выберем максимальную величину кулонова трения скольжения из (3): $P_* = F_* = vMg$. Примем $L_* = P_* R$, $X_* = a$. Характерную деформацию получим из оценки $2akU_* = P_*$. Будем считать большой суммарную сдвиговую жесткость $2ak$, так что $U_* \ll a$.

Проделав указанную нормализацию в (2), (6), (7), (8) для крайнего случая движения без зон проскальзывания в пятне контакта, получим

$$\frac{dv_{Cx}}{dt} = f + p_x, \quad r^2 \frac{d\omega_z}{dt} = l + p_x(1-h) \quad (9)$$

$$\delta \frac{du}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} \omega_z = v_{Cx} + \omega_z, \quad p_x = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 u dx$$

$$v_{Cx}(0) = v_0, \quad \omega_z(0) = \omega_0, \quad u(0, x) = u_0(x)$$

$$u(t, x_0) = 0 \quad (x_0 = \mp 1 \text{ при } \omega_z \geq 0)$$

Здесь $r = \rho/R$ (ρ – радиус инерции колеса), $h = H/R$, $\varepsilon = U_*/a$, $\delta = U_*/R = \varepsilon a/R$.

Оговоренные ранее предположения порождают в (9) следующий набор малых параметров: $h \ll 1$, $\varepsilon \ll 1$, $\delta \ll \varepsilon$. Это дает возможность строить приближенные модели движения.

Модель 1. При $h = \delta = \varepsilon = 0$ уравнения (9) перейдут в

$$\frac{dv_{Cx}}{dt} = f + p_x, \quad r^2 \frac{d\omega_z}{dt} = l + p_x, \quad 0 = v_{Cx} + \omega_z \quad (10)$$

Уравнениями (10) определяется традиционная модель качения абсолютно жесткого колеса без проскальзывания. Последнее уравнение в (10) – это уравнение связи, условие непроскальзывания. Величина p_x – реакция этой связи

$$p_x = -\frac{l + r^2 f}{1 + r^2} \quad (11)$$

Начальные условия в (10) должны удовлетворять уравнению связи. В противном случае, движение начинается с проскальзывания и контактная сила определяется выражением (3). После нормализации уравнения такого движения принимают вид

$$\frac{dv_{Cx}}{dt} = f - \text{sign} v_{Ox}, \quad r^2 \frac{d\omega_z}{dt} = l - \text{sign} v_{Ox}, \quad v_{Ox} = v_{Cx} + \omega_z \quad (12)$$

Из (10), (12) видно, что данная приближенная модель l имеет переменную структуру, изменяя свою размерность в зависимости от значений переменных v_{Cx} и ω_z .

На фиг. 2 представлены фазовые траектории этой модели на плоскости переменных v_{Cx} , ω_z . Для определенности изображен случай $f = 0$, $0 < l = \text{const} < 1$.

Модель 2. Рассмотрим приближенную модель, которая получится, если в (9) принять $\delta = 0$, $h, \varepsilon \neq 0$. В этом приближении третье уравнение из (9) принимает вид

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} \omega_z = v_{Cx} + \omega_x \quad (13)$$

Здесь v_{Cx} , ω_z – функции времени, задаваемые первыми двумя уравнениями из (9). Проинтегрировав по x уравнение (13) в пределах, определяемых граничными условиями из (9), найдем явную зависимость

$$u(x) = \frac{v_{Cx} + \omega_z}{\omega_z \varepsilon} (x+1), \quad \text{если } \omega_z > 0; \quad u(x) = \frac{v_{Cx} + \omega_z}{\omega_z \varepsilon} (x-1), \quad \text{если } \omega_z < 0$$

Подставив полученные выражения в четвертое уравнение из (9), найдем

$$p_x = - \frac{v_{Cx} + \omega_z}{|\omega_z| \varepsilon} \quad (14)$$

Перейдя к исходным, размерным величинам, запишем (14) в виде

$$P_x = -vMgs_x / \varepsilon \quad (15)$$

$$s = \frac{V_{Cx} + \Omega_z R}{|\Omega_z| R} = \frac{v_{Cx} + \omega_z}{|\omega_z|} \quad (16)$$

Заметим, что выражение (14), а, следовательно (15), (16), не определены, когда величины v_{Cx} , ω_z одновременно обращаются в ноль. Для вычисления доопределенного значения силы p_x в такой момент времени t_0 воспользуемся правилом Лопиталья. Из (14) имеем

$$P_x(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} p_x = - \frac{v_{Cx} + \omega_z}{|\omega_z| \varepsilon} \quad (17)$$

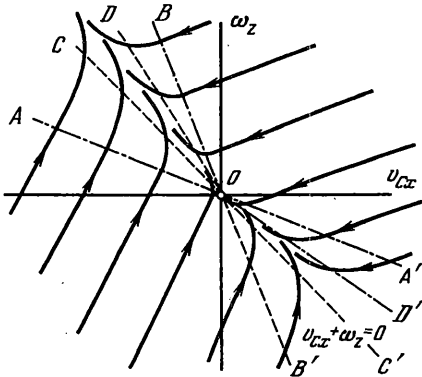
Подставив в (17) выражения v_{Cx} , ω_z из (9), получим

$$p_x(t_0) = \frac{(f + p_x(t_0)) + (l + p_x(t_0)) / r^2}{|\omega_z| \varepsilon}$$

Отсюда

$$p_x(t_0) = - \frac{l + r^2 f}{1 + r^2} + O(\varepsilon^2) \quad (18)$$

Первое слагаемое в (18), как естественно ожидать, совпадает с выражением (11) для реакции в точке контакта абсолютно жесткого колеса, катящегося без проскальзывания, в точке опоры.



Фиг. 4

Учет промежуточных ситуаций, когда часть контактных элементов проскальзывает, часть – нет, сглаживает характеристику, как указано штриховой линией на фиг. 3, а [2, 3].

Эксперимент дает весьма близкие зависимости $P_x(s_x)$. Для пневматической резиновой шины $\epsilon \sim 0,1$ для стального железнодорожного колеса $\epsilon \sim 10^{-3}$ [2, 4–6].

Модель 3. Под этой моделью будем понимать описания качения в литературе по транспортной механике, полученное на основе "Brush-модели" или с использованием экспериментальных характеристик вида, представленного на фиг. 3. Эта модель формулируется для движения в одном направлении, обычно в положительном направлении оси x , при $v_{Cx} > 0$, и поэтому различия в выражении (14) для разных знаков ω_z не обсуждаются. В рамках этой модели вместо величины $|\Omega_z| R$ в (16) обычно фигурирует величина путевой скорости $V_{Cx} > 0$, что по (13) приводит к погрешности порядка ϵ . Это не согласуется с уровнем точности модели 2. В литературе, далее, не обсуждается доопределение выражения для s_x при одновременном обращении в ноль путевой и угловой скоростей [1–9].

В качестве примера, выявляющего существенные различия обсуждаемых моделей, рассмотрим частный случай движения при $F = 0$, $L = \text{const} > 0$.

Уравнения движения по (9), (14) запишем в виде

$$\frac{dv_{Cx}}{dt} = p_x, \quad r^2 \frac{d\omega_z}{dt} = l + (1-h)p_x, \quad p_x = p_x(s_x), \quad s_x = \frac{v_{Cx} + \omega_z}{|\omega_z|} \quad (19)$$

где для $p_x(s_x)$ возьмем кусочно-линейную аппроксимацию фиг. 3, в. Примем для определенности условие $l < 1 - h$.

На фазовой плоскости переменных v_{Cx} , ω_z системы (19) на фиг. 4 прямыми AA' , BB' выделена линейная область $|s_x| \leq \epsilon$ характеристики $p_x(s_x)$. Вне этой области $p_x = \pm 1$, и фазовые траектории системы – прямые, как на фиг. 2, отвечающие движению колеса с полным проскальзыванием пятна контакта. Внутри линейной области уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$r^2 \frac{d\omega_z}{dv_{Cx}} = \frac{-\epsilon l |\omega_z| + (v_{Cx} + \omega_z)(1-h)}{v_{Cx} + \omega_z} \quad (20)$$

Начало координат O – особая точка для системы (20). Определение типа особой точки по коэффициентам при v_{Cx} , ω_z в (20) дает любопытный результат: для четвертого квадранта, при $\omega_z < 0$, точка O – "узел", а во втором квадранте, при $\omega_z > 0$, точка O – "седло". Пучок фазовых траекторий в четвертом квадранте стягивается в точку O , и система проходит через нее с конечной скоростью, определяемой (18). Во втором квадранте фазовые траектории уходят от точки O , стремясь к асимптоте,

Линейная зависимость (15) контактной силы от аргумента s_x отвечает крайнему случаю движения, когда все контактные элементы считаются непроскальзывающими. Ширину линейной зоны s_x^0 можно оценить, приравняв силу (15) ее максимальному значению νMg при полном проскальзывании всех контактных элементов. Отсюда $s_x^0 = \epsilon$.

При кусочно-линейной аппроксимации двумя отрезками прямых характеристика контактной силы представлена на фиг. 3, а для размерного, на фиг. 3, в – нормализованного выражения силы.

лежащей в угле COD . Здесь CC' – изоклина вертикальных, а DOD' – горизонтальных наклонов фазовых траекторий. Смена типа особой точки для разных знаков ω_z объясняется неаналитичностью функции (14) по ω_z .

При $\epsilon \rightarrow 0$ раcтвор угла AOB стремится к нулю, и в пределе, при $\epsilon = 0$, модель 2 переходит в модель 1, фазовый портрет которой представлен на фиг. 2.

Сравнение движений, описываемых этими моделями, показывает, что при одинаковых начальных условиях и значениях параметров моделей при любом конечном значении $\epsilon \neq 0$, значения их переменных разойдутся на конечную величину за время порядка.

Известная по литературе модель 3 не дает возможности построить фазовый портрет системы на всей фазовой плоскости, так как она неправомерна для движений, в которых изменяется знак переменной ω_z и она не определена при v_{Cx} , $\omega_z = 0$.

Заметим, что модели качения могут быть дополнительно упрощены, если рассматриваются транспортные системы, для которых величина M в (3) и (7) складывается из массы m собственно колеса и массы экипажа, приведенной к данному колесу. При $m \ll M$ в (9) и далее будет $r^2 = (m/M)(\rho/R)^2 \ll 1$. Задача (9) становится тогда сингулярно-возмущенной по А.Н. Тихонову [10], и второе дифференциальное уравнение в (9) может быть заменено вырожденным квазистатическим соотношением, которое получается при $r^2 = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новожиллов И.В. Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1991. 188 с.
2. Ресеjка Н.В. Lateral dynamics of road vehicles // Vehicle system dynamics Suppl. 1987. V. 16. P. 75–120.
3. Новожиллов И.В., Стрельцов С.В. О неголономных соотношениях в теории катящегося колеса // Проблемы нелинейного анализа и синтеза в инженерных системах. 1995. Вып. 1. С. 3–8.
4. Динамика системы "дорога – шина – автомобиль – водитель" / Под ред. А.А. Хачатурова. М.: Машиностроение. 1976. 535 с.
5. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
6. Лазарян В.А., Длугач Л.А., Коротенко М.Л. Устойчивость движения рельсовых экипажей. Киев: Наук. думка, 1972. 197 с.
7. Zegelaar P.W., Ресеjка Н.В. The in-plane dynamics of tyre on uneven roads // Vehicle system dynamics Suppl. 1996. V. 25. P. 714–730.
8. Левин М.А., Фуфаев Н.А. Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука, 1989. 271 с.
9. Ишлинский А.Ю. О проскальзывании в области контакта при трении качения // Изв. АН СССР. ОТН. 1956. № 6. С. 3–16.
10. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990. 207 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.X.1997