

УДК 531.383

© 1998 г. Ю.К. ЖБАНОВ, В.Ф. ЖУРАВЛЕВ

О БАЛАНСИРОВКЕ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА

Изучается влияние аномалий распределения масс резонатора волнового твердотельного гироскопа на его динамику. Формулируются основные цели и методы балансировки. Приводится качественный и количественный анализ всех соответствующих явлений.

Аномалии распределения масс резонатора волнового твердотельного гироскопа имеют двоякое проявление, существенно влияя на качество этого прибора. Во-первых, они приводят к расщеплению частоты собственных колебаний резонатора на рабочей моде, которая в идеальном резонаторе является двукратной. Во-вторых, аномалии вызывают колебания центра масс резонатора в рабочем режиме, увеличивая тем самым эффекты конструкционного демпфирования, снижая добротность и увеличивая разносторонность. В идеальном резонаторе центр масс в рабочем режиме неподвижен. Балансировка резонатора, обычно осуществляемая посредством удаления точечных масс в определенных местах его поверхности, преследует, в соответствии с вышесказанным, две основные цели:

- а) обращение в ноль сил реакций в опоре резонатора в рабочем режиме на неподвижном основании;
- б) устранение расщепления частоты собственных колебаний, соответствующих второй (основной) моде.

С технической точки зрения балансировка начинается с измерения тех эффектов, к которым приводят аномалии распределения масс, с последующим уничтожением этих эффектов адекватным удалением точечных масс.

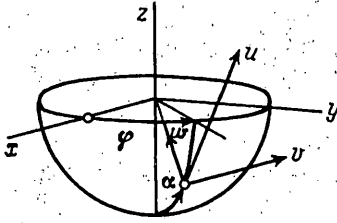
В настоящем исследовании изучаются два способа измерения эффектов неуравновешенности. Первый, который можно назвать пассивным, осуществляется на неподвижном основании прямым измерением реакции в опорах (например пьезодатчиками). Второй способ, его можно назвать активным, основывается на измерении динамических эффектов, возникающих в неуравновешенном резонаторе при вибрации основания.

Достоинством первого способа является простота его реализации, достоинством второго – возможность использования резонансных эффектов для повышения чувствительности измерений.

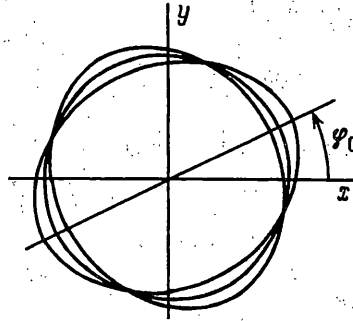
1. Реакция в опоре. Определение 1-ой, 2-ой и 3-ей гармоник дебаланса. Вторая форма колебаний тонкой полусферической оболочки резонатора, согласно Релею, может быть записана следующим образом

$$\begin{aligned} u &= \frac{A}{2} \sin \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos 2(\varphi - \varphi_0) \sin \omega(t - t_0) + \frac{B}{2} \sin \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_0) \cos \omega(t - t_0) \\ v &= \frac{A}{2} \sin \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_0) \sin \omega(t - t_0) - \frac{B}{2} \sin \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos 2(\varphi - \varphi_0) \cos \omega(t - t_0) \quad (1.1) \\ w &= \frac{A}{2} (2 + \cos \alpha) \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos 2(\varphi - \varphi_0) \sin \omega(t - t_0) + \\ &+ \frac{B}{2} (2 + \cos \alpha) \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_0) \cos \omega(t - t_0) \end{aligned}$$

где A, B, φ_0, t_0 являются произвольными постоянными, а смысл переменных u, v, w, α, φ объяснен на фиг. 1.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для простоты будем предполагать, что все дефекты распределения масс резонатора сосредоточены на его экваториальной кромке, соответствующей $\alpha = \pi/2$ в формулах (1.1). Для интересующего нас случая стоячей волны надо положить $B = 0$.

Таким образом, перемещения точек, где могут находиться дефектные массы, для стоячей волны второй формы колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} u &= (A/2) \cos 2(\varphi - \varphi_0) \sin \omega(t - t_0) \\ v &= (A/2) \sin 2(\varphi - \varphi_0) \sin \omega(t - t_0) \\ w &= A \cos 2(\varphi - \varphi_0) \sin \omega(t - t_0) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Угол φ_0 определяет ориентацию волны по отношению к резонатору (фиг. 2).

В декартовой системе координат, связанной с резонатором так, что ось z совпадает с осью симметрии, а ось x — с осью отсчета угла φ , т.е. соответствует направлению $\varphi = 0$, перемещения точек могут быть вычислены по формуле

$$\Delta r = \begin{vmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

которая в нашем случае, для точек кромки резонатора, дает выражения

$$\begin{aligned} \Delta x(\varphi) &= [A \cos 2(\varphi - \varphi_0) \cos \varphi + (A/2) \sin 2(\varphi - \varphi_0) \sin \varphi] \sin \omega(t - t_0) = \\ &= [(3A/4) \cos(\varphi - 2\varphi_0) + (A/4) \cos(3\varphi - 2\varphi_0)] \sin \omega(t - t_0) \\ \Delta y(\varphi) &= [A \cos 2(\varphi - \varphi_0) \sin \varphi + (A/2) \sin 2(\varphi - \varphi_0) \cos \varphi] \sin \omega(t - t_0) = \\ &= [-(3A/4) \sin(\varphi - 2\varphi_0) + (A/4) \sin(3\varphi - 2\varphi_0)] \sin \omega(t - t_0) \\ \Delta z(\varphi) &= (A/2) \cos(2\varphi - 2\varphi_0) \sin \omega(t - t_0) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Чтобы найти реакцию в опоре требуется вычислить интеграл

$$\mathbf{F} = \int_0^{2\pi} \Delta m(\varphi) \Sigma \mathbf{r}(\varphi) d\varphi \quad (1.5)$$

Вычисления дают

$$\begin{aligned} F_x &= (A\omega^2/4) [(3d_{1c} + d_{3c}) \cos 2\varphi_0 + (3d_{1s} + d_{3s}) \sin 2\varphi_0] \sin \omega(t - t_0) \\ F_y &= (A\omega^2/4) [-(3d_{1s} + d_{3s}) \cos 2\varphi_0 + (3d_{1c} - d_{3c}) \sin 2\varphi_0] \sin \omega(t - t_0) \\ F_z &= (A\omega^2/2) [d_{2c} \cos 2\varphi_0 + d_{2s} \sin 2\varphi_0] \sin \omega(t - t_0) \end{aligned} \quad (1.6)$$

где обозначено при $k = 1, 2, 3$:

$$d_{kc} = \int_0^{2\pi} \Delta m(\varphi) \cos k\varphi d\varphi, \quad d_{ks} = \int_0^{2\pi} \Delta m(\varphi) \sin k\varphi d\varphi \quad (1.7)$$

Таким образом, силы радиальной реакции F_x, F_y зависят только от первой и третьей гармоник разложения дефектов распределения масс в ряд Фурье. Осевая реакция F_z зависит только от второй гармоники этого разложения. Для определения значений всех шести параметров дебалансов d_{kc}, d_{ks} для $k = 1, 2, 3$ достаточно измерить амплитуды всех компонент реакции при двух различных ориентациях волны, например при $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi/4$:

$$\text{Am } F_x(0) = (A\omega^2 / 4)(3d_{1c} + d_{3c}) \quad (1.8)$$

$$\text{Am } F_y(0) = (A\omega^2 / 4)(-3d_{1s} + d_{3s})$$

$$\text{Am } F_z(0) = (A\omega^2 / 2)d_{2c}, \quad \text{Am } F_x(\pi/4) = (A\omega^2 / 4)(3d_{1s} + d_{3s})$$

$$\text{Am } F_y(\pi/4) = (A\omega^2 / 4)(3d_{1c} - d_{3c}), \quad \text{Am } F_z(\pi/4) = (A\omega^2 / 2)d_{2s}$$

и разрешить выписанные равенства относительно параметров дебалансов

$$d_{1c} = 2[\text{Am } F_x(0) + \text{Am } F_y(\pi/4)] / 3A\omega^2$$

$$d_{1s} = 2[\text{Am } F_x(\pi/4) - \text{Am } F_y(0)] / 3A\omega^2$$

$$d_{3c} = 2[\text{Am } F_x(0) - \text{Am } F_y(\pi/4)] / A\omega^2 \quad (1.9)$$

$$d_{3s} = 2[\text{Am } F_x(\pi/4) + \text{Am } F_y(0)] / A\omega^2$$

$$d_{2c} = 2 \text{Am } F_z(0) / A\omega^2, \quad d_{2s} = 2 \text{Am } F_z(\pi/4) / A\omega^2$$

Для детального анализа зависимости реакции F от ориентации волны удобно параметры дебалансов d_{kc}, d_{ks} представить в виде

$$d_{kc} = d_k \cos k\varphi_k, \quad d_{ks} = d_k \sin k\varphi_k \quad (1.10)$$

Из (1.10) следует

$$d_k = d_{kc} \cos k\varphi_k + d_{ks} \sin k\varphi_k$$

$$0 = -d_{kc} \sin k\varphi_k + d_{ks} \cos k\varphi_k \quad (1.11)$$

и, с учетом выражений (1.7):

$$d_k = \int_0^{2\pi} \Delta m(\varphi) \cos k(\varphi - \varphi_k) d\varphi, \quad 0 = \int_0^{2\pi} \Delta m(\varphi) \sin k(\varphi - \varphi_k) d\varphi \quad (1.12)$$

Таким образом, величина d_k задает амплитуду k -й гармоники распределения дефектов масс, а угол φ_k — ориентацию этой гармоники.

Выражения (1.6) для компонент реакции преобразуются к виду

$$F_x = (A\omega^2 / 4)[3d_1 \cos(2\varphi_0 - \varphi_1) + d_3 \cos(2\varphi_0 - 3\varphi_3)] \sin \omega(t - t_0)$$

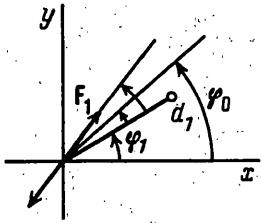
$$F_y = (A\omega^2 / 4)[3d_1 \sin(2\varphi_0 - \varphi_1) - d_3 \sin(2\varphi_0 - 3\varphi_3)] \sin \omega(t - t_0)$$

$$F_z = (A\omega^2 / 2)d_2 \cos(2\varphi_0 - 2\varphi_2) \sin \omega(t + t_0) \quad (1.13)$$

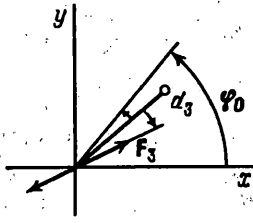
Все свойства реакции теперь видны. Амплитуда осевой составляющей F_z имеет максимум при $\varphi_0 = \varphi_2$ и тот же максимум с противоположной фазой колебаний при $\varphi_0 = \varphi_2 + \pi/2$. При $\varphi_0 = \varphi_2 + \pi/4$ осевая составляющая реакция исчезает.

Амплитуда радиальной реакции, вызванная первой гармоникой дебаланса, не зависит от ориентации волны. При $\varphi_0 = \varphi_1$, т.е. при ориентации волны по направлению дебаланса, вектор реакции совпадает с ориентацией волны. При повороте волны вектор реакции поворачивается на двойной угол поворота волны в ту же сторону (фиг. 3).

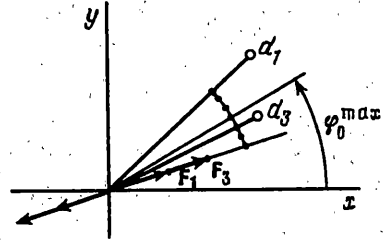
Амплитуда радиальной реакции, вызванной третьей гармоникой дебаланса, тоже не зависит от ориентации волны. При $\varphi_0 = \varphi_3$ направление и этой реакции совпадает с ориентацией волны. При повороте волны вектор реакции тоже поворачивается на двойной угол поворота волны, но в противоположную сторону (фиг. 4).



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Направления векторов обеих радиальных реакций совпадают (фиг. 5) при ориентации волны

$$\varphi_0^{\max} = (3\varphi_3 + \varphi_1) / 4 \quad (1.14)$$

Оба вектора ориентируются при этом по направлению

$$\varphi_F^{\max} = (3\varphi_3 - \varphi_1) / 2 \quad (1.15)$$

Амплитуда радиальной реакции достигает максимума

$$\max \text{Am } F_R = (3d_1 + d_3) A \omega^2 / 4 \quad (1.16)$$

Минимум амплитуды

$$\min \text{Am } F_R = |3d_1 - d_3| A \omega^2 / 4 \quad (1.17)$$

достигается при $\varphi_0^{\min} = (3\varphi_3 + \varphi_1) / 4 + \pi / 4$ и соответствует ориентации реакции ортогонально максимальной

$$\varphi_F^{\min} = (3\varphi_3 - \varphi_1) / 2 + \pi / 2$$

В частном случае, когда $3d_1 = d_3$ минимум амплитуды обращается в ноль. Если оси x, y повернуть на угол φ_F^{\max} (1.15) в положение x^*, y^* (фиг. 6), то углы дебалансов φ_1^* и φ_3^* относительно новых осей будут удовлетворять соотношению

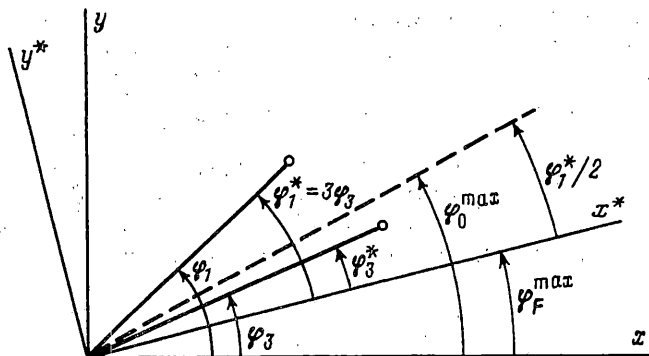
$$\varphi_1^* = 3\varphi_3^* \quad (1.18)$$

и компоненты радиальной реакции в проекциях на новые оси примут вид

$$F_{x^*} = (A \omega^2 / 4) (3d_1 + d_3) \cos(2\varphi_0^* - \varphi_1^*) \sin \omega(t - t_0) \quad (1.19)$$

$$F_{y^*} = (A \omega^2 / 4) (3d_1 - d_3) \sin(2\varphi_0^* - \varphi_1^*) \sin \omega(t - t_0)$$

где φ_0^* задает ориентацию волны уже относительно новых осей x^*, y^* .



Фиг. 6

Годограф вектора амплитуды реакции при изменении ориентации волны

$$\text{Am } F_x^* = (A\omega^2 / 4)(3d_1 + d_3) \cos(2\varphi_0 - \varphi_1^*) \quad (1.20)$$

$$\text{Am } F_y^* = (A\omega^2 / 4)(3d_1 - d_3) \sin(2\varphi_0 - \varphi_1^*)$$

имеет вид эллипса с полуосями $3d_1 + d_3$ и $|3d_1 - d_3|$.

В осях x^* , y^* , в силу соотношения (1.18), имеем

$$\varphi_0^{\max} = \varphi_1^* / 2, \quad \varphi_0^{\min} = \varphi_1^* / 2 + \pi / 4$$

$$\varphi_F^{\max} = 0, \quad \varphi_F^{\min} = \pi / 2$$

В частном случае $3d_1 = d_3$ эллипс вырождается в прямую.

Если экспериментально измерить параметры эллипса – величины полуосей (1.16), (1.17), ориентацию волны, вызывающей максимальную реакцию (1.14), и ориентацию максимальной реакции (1.15), то и по ним можно рассчитать параметры d_1 , φ_1 , d_3 , φ_3 первой и третьей гармоник дебаланса.

Для углов ориентации гармоник справедливы выражения

$$\varphi_1 = 2\varphi_0^{\max} - \varphi_F^{\max}, \quad \varphi_3 = (2\varphi_0^{\max} + \varphi_F^{\max}) / 3 \quad (1.21)$$

Для амплитуд

$$d_1 = 2(\max \text{Am } F_R + \min \text{Am } F_R) / 3A\omega^2 \quad (1.22)$$

$$d_3 = 2(\max \text{Am } F_R - \min \text{Am } F_R) / A\omega^2$$

если

$$3d_1 - d_3 \geq 0 \quad (1.23)$$

и наоборот

$$d_1 = 2(\max \text{Am } F_R - \min \text{Am } F_R) / 3A\omega^2 \quad (1.24)$$

$$d_3 = 2(\max \text{Am } F_R + \min \text{Am } F_R) / A\omega^2$$

если

$$3d_1 - d_3 \leq 0 \quad (1.25)$$

Различить варианты можно по направлению поворота вектора реакции при повороте волны. От знака величины $3d_1 - d_3$ зависит знак компоненты реакции F_y^* . При выполнении (1.23) при повороте волны вектор реакции F_R поворачивается в ту же

сторону, при выполнении (1.25) – в противоположную. При $3d_1 - d_3 = 0$ выражения (1.22) и (1.24) совпадают, так как в этом случае $\min \text{Am } F_R = 0$.

2. Зависимость кинетической энергии от дебаланса. Разночастотность. Определение 4-й гармоники дебаланса. Проанализируем зависимость кинетической энергии резонатора от дефектов распределения масс при колебаниях по второй форме. Для подсчета кинетической энергии дефектных масс требуется вычислить интеграл

$$T_d = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \Delta m(\varphi) (\Delta \dot{\mathbf{r}}(\varphi))^2 d\varphi \quad (2.1)$$

Из формул (1.4) следует

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}(\varphi) &= (A\omega / 4) [3 \cos(\varphi - 2\varphi_0) + \cos(3\varphi - 2\varphi_0)] \cos \omega(t - t_0) \\ \Delta \dot{y}(\varphi) &= (A\omega / 4) [-3 \sin(\varphi - 2\varphi_0) + \sin(3\varphi - 2\varphi_0)] \cos \omega(t - t_0) \\ \Delta \dot{z}(\varphi) &= (A\omega / 2) \cos(2\varphi - 2\varphi_0) \cos \omega(t - t_0) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Используя (2.2) можно вычислить

$$\begin{aligned} (\Delta \dot{\mathbf{r}}(\varphi))^2 &= (\Delta \dot{x}(\varphi))^2 + (\Delta \dot{y}(\varphi))^2 + (\Delta \dot{z}(\varphi))^2 = \\ &= (A^2 \omega^2 / 2) [3/2 + \cos 4(\varphi - \varphi_0)] \cos^2 \omega(t - t_0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Поскольку равномерное распределение масс можно не относить к дефектам, то можно считать, что

$$\int_0^{2\pi} \Delta m(\varphi) d\varphi = 0 \quad (2.4)$$

Тогда вычисления по формуле (2.1), с учетом выражения (2.3), дают

$$T_d = (A^2 \omega^2 / 4) (d_{4c} \cos 4\varphi_0 + d_{4s} \sin 4\varphi_0) \cos^2 \omega(t - t_0) \quad (2.5)$$

где d_{4c} , d_{4s} соответствуют обозначениям (1.7) при $k = 4$. С использованием же обозначений (1.10) при $k = 4$ выражение для T_d принимает вид

$$T_d = (A^2 \omega^2 / 4) d_4 \cos 4(\varphi_0 - \varphi_4) \cos^2 \omega(t - t_0) \quad (2.6)$$

Если за M_e обозначить общую массу резонатора, приведенную к кромке, то его полная кинетическая энергия, подсчитанная по формуле (2.1) с заменой $\Delta m(\varphi)$ на $M_e / 2\pi + \Delta m(\varphi)$, с учетом выражения (2.3) и условия (2.4), может быть представлена в виде

$$T = (A^2 \omega^2 / 4) [3M_e / 2 + d_4 \cos 4(\varphi_0 - \varphi_4)] \cos^2 \omega(t - t_0) \quad (2.7)$$

Пределы относительного изменения приведенной массы при изменении ориентации волны составляют

$$\Delta M^* / M^* = \mp 2d_4 / 3M_e \quad (2.8)$$

что соответствует пределам относительного изменения собственной частоты

$$\Delta \omega / \omega = \mp d_4 / (3M_e) \quad (2.9)$$

Минимальную собственную частоту $\omega - \Delta \omega$ имеет волна с ориентацией $\varphi_0 = \varphi_4$, а максимальную частоту $\omega + \Delta \omega$ имеет волна при $\varphi_0 = \varphi_4 + \pi/4$, когда суммарная приведенная масса минимальна. Определяя экспериментально ориентацию главных осей частот и величину разночастотности мы получаем возможность определить параметры четвертой гармоники дебаланса d_4 и φ_4 .

Приведенная к экваториальной кромке масса резонатора M_e может быть выражена через его исходные параметры из соотношения равенства кинетической энергии (2.7)

при $d_4 = 0$:

$$T = (A^2 \omega^2 / 4)(3M_e / 2) \cos^2 \omega(t - t_0) \quad (2.10)$$

и той же энергии, рассчитанной по полной формуле

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) \rho R^2 \sin \alpha d\alpha d\varphi \quad (2.11)$$

где R – радиус срединной поверхности резонатора, ρ – поверхностная плотность. Составляющие скорости надо получить дифференцированием по t равенств (1.1) при $B = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (A\omega / 2) \sin \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos 2(\varphi - \varphi_0) \cos \omega(t - t_0) \\ \dot{v} &= (A\omega / 2) \sin \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_0) \cos \omega(t - t_0) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\dot{w} = (A\omega / 2)(2 + \cos \alpha) \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos 2(\varphi - \varphi_0) \cos \omega(t - t_0)$$

С учетом (2.12) выражение (2.11) принимает вид

$$\begin{aligned} T &= R^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \rho \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2} [\sin^2 \alpha + (2 + \cos \alpha)^2 \cos^2 2(\varphi - \varphi_0)] \sin \alpha d\alpha d\varphi \times \\ &\times (A^2 \omega^2 / 8) \cos^2 \omega(t - t_0) \end{aligned}$$

или, после интегрирования по φ :

$$T = 2\pi R^2 \int_0^{\pi/2} \rho \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2} [2 \sin^2 \alpha + (2 + \cos \alpha)^2] \sin \alpha d\alpha \left(\frac{A^2 \omega^2}{16} \right) \cos^2 \omega(t - t_0) \quad (2.13)$$

Для равнотолщинного резонатора ρ не зависит от α и произведение $2\pi R^2 \rho = M$ – масса резонатора. Учитывая, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2} \sin^3 \alpha d\alpha &= 8 \ln 2 - \frac{16}{3} \\ \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha (2 + \cos \alpha)^2 d\alpha &= 4 \ln 2 - \frac{5}{3} \end{aligned}$$

получим

$$T = (A^2 \omega^2 M / 48)(60 \ln 2 - 37) \cos^2 \omega(t - t_0) \quad (2.14)$$

сравнивая (2.10) с (2.14), находим, что

$$M_e = (M / 8)(60 \ln 2 - 37) \quad (2.15)$$

3. Реакция в опоре при произвольной форме волны. В общем случае колебаний резонатора по второй форме (1.1) радиальное смещение точек его кромки выражается формулой

$$w = A \cos 2(\varphi - \varphi_0) \sin \omega(t - t_0) + B \sin 2(\varphi - \varphi_0) \cos \omega(t - t_0) \quad (3.1)$$

которая может быть записана в виде

$$w = C \cos 2\varphi + S \sin 2\varphi \quad (3.2)$$

$$C = A \cos 2\varphi_0 \sin \omega(t - t_0) - B \sin 2\varphi_0 \cos \omega(t - t_0)$$

$$S = A \sin 2\varphi_0 \sin \omega(t - t_0) + B \cos 2\varphi_0 \cos \omega(t - t_0) \quad (3.3)$$

или

$$C = C_0 \sin \omega(t - t_c), \quad S = S_0 \sin \omega(t - t_s) \quad (3.4)$$

где амплитуды C_0, S_0 и фазовые сдвиги t_c, t_s могут быть выражены через величины A, B, φ_0, t_0 .

Реакция в опоре, соответствующая волне C может быть получена из (1.6) при $\varphi_0 = 0$ заменой A на C_0 и t_0 на t_c , поэтому

$$F_x^c = (\omega^2 / 4)(3d_{1c} + d_{3c})C(t) \quad (3.5)$$

$$F_y^c = (\omega^2 / 4)(-3d_{1s} + d_{3s})C(t), \quad F_z^c = (\omega^2 / 4)2d_{2c}C(t)$$

Чтобы получить выражения для реакции, соответствующей волне S надо положить $\varphi_0 = \pi/4$, так как в этом случае в третьем равенстве формулы (1.2) величина $\cos 2(\varphi - \varphi_0)$ станет равной $\sin 2\varphi$ и будет соответствовать волне S . Величину A в формулах реакции (1.6) надо заменить на S_0 и фазовый сдвиг t_0 на t_s . Тогда получим

$$F_x^s = (\omega^2 / 4)(3d_{1s} + d_{3s})S(t); \quad (3.6)$$

$$F_y^s = (\omega^2 / 4)(3d_{1c} - d_{3c})S(t), \quad F_z^s = (\omega^2 / 4)2d_{2s}S(t)$$

Таким образом, в общем случае колебаний резонатора по второй форме реакция в опоре может быть представлена в виде

$$F_x = (\omega^2 / 4)[(3d_{1c} + d_{3c})C(t) + (3d_{1s} + d_{3s})S(t)]$$

$$F_y = (\omega^2 / 4)[(-3d_{1s} + d_{3s})C(t) + (3d_{1c} - d_{3c})S(t)] \quad (3.7)$$

$$F_z = (\omega^2 / 4)[2d_{2c}C(t) + 2d_{2s}S(t)]$$

4. Влияние вибрации основания на вторую форму колебаний разбалансированного резонатора. Определение дебаланса по реакции волны на вибрацию основания. При движении основания с линейным ускорением

$$\mathbf{W} = \begin{Bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{Bmatrix}$$

силы инерции дефектных масс на перемещениях второй формы совершают работу, суммарное значение которой выражается интервалом

$$P_w = \int_0^{2\pi} (-\Delta m(\varphi) \mathbf{W}) \cdot \Delta \mathbf{r}(\varphi) d\varphi$$

или, в силу независимости \mathbf{W} от φ :

$$P_w = -\mathbf{W} \cdot \int_0^{2\pi} \Delta m(\varphi) \Delta \mathbf{r}(\varphi) d\varphi \quad (4.1)$$

Интеграл в выражении (1.5) отличается от интеграла в (4.1) только множителем $(-\omega^2)$, поэтому, принимая во внимание результат интегрирования (1.5) в виде (3.7), для произвольной деформации по второй форме можно записать

$$P_w = [(3d_{1c} + d_{3c})C + (3d_{1s} + d_{3s})S]W_x / 4 + \\ + [(-3d_{1s} + d_{3s})C + (3d_{1c} - d_{3c})S]W_y / 4 + [2d_{2c}C + 2d_{2s}S]W_z / 4 \quad (4.2)$$

Или

$$P_w = Q_c C + Q_s S \quad (4.3)$$

$$Q_c = [(3d_{1c} + d_{3c})W_x + (-3d_{1s} + d_{3s})W_y + 2d_{2c}W_z] / 4 \quad (4.4)$$

$$Q_s = [(3d_{1s} + d_{3s})W_x + (3d_{1c} - d_{3c})W_y + 2d_{2s}W_z] / 4$$

При описании движения резонатора в переменных C, S . Величины Q_c, Q_s могут трактоваться как обобщенные силы, вызванные линейным ускорением основания.

Кинетическая энергия отбалансированного по четвертой гармонике резонатора, с помощью вычислений, аналогичных выполненным при выводе формулы (2.7), может быть представлена в виде

$$T = (3M_e / 8)(\dot{C}^2 + \dot{S}^2) \quad (4.5)$$

Величина

$$T^* = 3M_e / 4 \quad (4.6)$$

Играет роль приведенной массы резонатора.

При анализе удобно использовать обобщение силы (4.4) отнесенными к произведению приведенной массы на квадрат собственной частоты резонатора:

$$q_c'' = 4Q_c / 3M_e \omega^2, \quad q_s'' = 4Q_s / 3M_e \omega^2 \quad (4.7)$$

Общие уравнения движения резонатора по второй форме в переменных C, S и в безразмерном времени $\tau = \omega t$ имеют вид

$$\ddot{C} + C = q_c, \quad \ddot{S} + S = q_s \quad (4.8)$$

где q_c, q_s — суммарные обобщенные силы. Для идеального резонатора на неподвижном основании силы q_c, q_s обращаются в ноль. Переменные C, S в этом случае меняются по гармоническому закону в соответствии с (3.4), каждая со своей амплитудой и фазой. В плоскости C, S траектория имеет вид эллипса (фиг. 7). Удобно обозначить большую полуось A , малую K , наклон большой полуоси эллипса к оси C через 2Θ . Соответствующая такому эллипсу волна (1.1) в оболочке резонатора имеет пучность с амплитудой A по направлению $\varphi_0 = \Theta$ и $B = -K$. Аналитическая запись эллиптической траектории имеет вид

$$C = A \cos 2\Theta \sin(\tau + \psi) - K \sin 2\Theta \cos(\tau + \psi) \quad (4.9)$$

$$S = A \sin 2\Theta \sin(\tau + \psi) + K \cos 2\Theta \cos(\tau + \psi)$$

Для идеального резонатора на неподвижном основании величины A, K, Θ, ψ остаются постоянными. Они однозначно и полностью характеризуют форму волны в резонаторе.

При вращении резонатора вокруг оси симметрии возникают силы q_c, q_s . Действие этих сил приводит к изменению только угла Θ . Параметры A, K, ψ остаются неизменными. Эллиптическая траектория поворачивается относительно осей C, S . Волна в резонаторе, не меняя своей формы, поворачивается относительно физических осей прибора с угловой скоростью, пропорциональной абсолютной угловой скорости

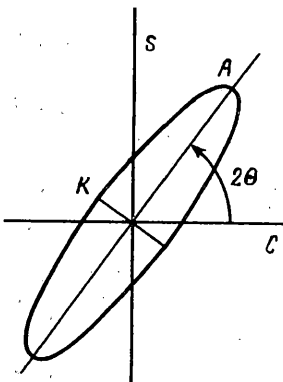
основания вокруг оси симметрии резонатора: $\dot{\Theta} = -k\Omega$. Угол Θ является выходной информацией прибора.

В рабочем режиме формируется дополнительное силовое воздействие на резонатор, поддерживающее постоянную нужную амплитуду колебаний $A = \text{const}$ и стягивающее эллипс в прямолинейный отрезок ($K = 0$). Это дополнительное воздействие формируется так, чтобы не повлиять на ориентацию волны, т.е. на угол Θ .

При нормальной работе управляющих цепей переменные C, S меняются по закону

$$C = A \cos 2\Theta \sin \tau, \quad S = A \sin 2\Theta \sin \tau \quad (4.10)$$

если начало отсчета времени выбрано соответствующим образом.



Фиг. 7

Если правые части уравнений (4.8) будут гармоническими функциями с частотой рабочих колебаний резонатора

$$q_c = q_{0c} \cos(\tau - \tau_0), \quad q_s = q_{0s} \cos(\tau - \tau_0) \quad (4.11)$$

то соответствующее им частное решение

$$C = (\tau/2)q_{0c} \sin(\tau - \tau_0), \quad S = (\tau/2)q_{0s} \sin(\tau - \tau_0)$$

сложенное с решением (4.10) даст зависимость (4.9) с линейным изменением во времени переменных A , K , Θ , ψ :

$$\begin{aligned} A &= (1/2)(q_{0c} \cos 2\Theta + q_{0s} \sin 2\Theta) \cos \tau_0 \\ K &= (1/2)(-q_{0c} \sin 2\Theta + q_{0s} \cos 2\Theta) \sin \tau_0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\Theta = (1/2A)(-q_{0c} \sin 2\Theta + q_{0s} \cos 2\Theta) \cos \tau_0$$

$$\psi = (1/2A)(q_{0c} \cos 2\Theta + q_{0s} \sin 2\Theta) \sin \tau_0$$

пока значения K/A и ψ невелики.

При вибрации основания на рабочей частоте резонатора с линейным перемещением

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cos(t - t_0)$$

обобщенные силы (4.7), с учетом выражений (4.4) и соотношения

$$W_\alpha = -\omega^2 a_\alpha \cos \omega(t - t_0) \quad \text{при } \alpha = x, y, z$$

принимают вид (4.11) с амплитудами

$$q_{0c} = -[(3d_{1c}^e + d_{3c}^e)a_x + (-3d_{1s}^e + d_{3s}^e)a_y + 2d_{2c}^e a_z] / 3 \quad (4.13)$$

$$q_{0s} = -[(3d_{1s}^e + d_{3s}^e)a_x + (3d_{1c}^e - d_{3c}^e)a_y + 2d_{2s}^e a_z] / 3$$

где верхний индекс e означает, что дебаланс отнесен к массе, приведенной к экватору $d_{k\alpha}^e = d_{k\alpha} / M_e$ ($k = 1, 2, 3$; $\alpha = c, s$).

Измеряя эволюцию одного или нескольких переменных из (4.12), при различных ориентациях волны и вибрации, при различной фазировке вибрации по отношению к фазе волны, можно получить достаточно соотношений для расчета всех параметров дебаланса. Например:

Вибрация вдоль оси x создает силы

$$q_{0c}^x = -(3d_{1c}^e + d_{3c}^e)a_x / 3, \quad q_{0s}^x = -(3d_{1s}^e + d_{3s}^e)a_x / 3 \quad (4.14)$$

Если вибрация сфазирована с C , S , т.е. $\tau_0 = 0$, то эволюция волны имеет вид

$$\dot{A} = (q_{0c}^x \cos 2\Theta + q_{0s}^x \sin 2\Theta) / 2 \quad (4.15)$$

$$\dot{\Theta} = (-q_{0c}^x \sin 2\Theta + q_{0s}^x \cos 2\Theta) / 2A$$

При фазировке вибрации с процессами C , S , т.е. при $\tau_0 = \pi/2$, эволюция состоит в изменении K и ψ :

$$\dot{K} = (-q_{0c}^x \sin 2\Theta + q_{0s}^x \cos 2\Theta) / 2 \quad (4.16)$$

$$\dot{\psi} = (q_{0c}^x \cos 2\Theta + q_{0s}^x \sin 2\Theta) / 2A$$

Наблюдая эволюцию волны при двух ее ориентациях, например при $\Theta = 0$ и при $\Theta = \pi/4$, можно определить обе величины q_{0c}^x , q_{0s}^x по измерениям любого из четырех параметров волны – A , K , Θ , ψ .

Аналогично для вибрации, создаваемой вдоль оси y . Создаваемые силы

$$q_{0c}^y = (3d_{1s}^e - d_{3s}^e)a_y / 3, \quad q_{0s}^y = (-3d_{1c}^e + d_{3c}^e)a_y / 3 \quad (4.17)$$

Эволюция волны имеет вид (4.15) и (4.16) с заменой верхнего индекса x и y . Соответствующие измерения позволяют определить значения амплитуд q_{0c}^y , q_{0s}^y . Равенства (4.14) и (4.17) по экспериментально определенным значениям сил позволяют рассчитать параметры дебалансов d_{1c}^e , d_{1s}^e , d_{3c}^e , d_{3s}^e . Наблюдение за эволюцией волны при вибрации вдоль оси z позволяет найти параметры второй гармоники дебаланса d_{2c}^e , d_{2s}^e , так как создаваемые такой вибрацией силы имеют вид

$$q_{0c}^z = -2d_{2c}^e a_z / 3, \quad q_{0s}^z = -2d_{2s}^e a_z / 3 \quad (4.18)$$

Создаваемые вибрацией силы q_{0c}^α , q_{0s}^α при $\alpha = x, y, z$ (4.14), (4.17), (4.18) могут быть определены не только по вызываемой ими эволюции волны (4.12), но и по параметрам установившейся волны, поддерживаемой силами вибрации при отключенных контурах управления ее формой. При дополнительном учете внутренней диссипации в резонаторе уравнения (4.8) должны быть записаны в виде

$$\ddot{C} + h\dot{C} + C = q_c, \quad \ddot{S} + h\dot{S} + S = q_s \quad (4.19)$$

и если

$$q_c = q_{0c} \cos \tau, \quad q_s = q_{0s} \cos \tau \quad (4.20)$$

то стационарное решение имеет вид

$$C = (q_{0c} / h) \sin(\tau - \tau_h), \quad S = (q_{0s} / h) \sin(\tau - \tau_h) \quad (4.21)$$

так что по амплитудам переменных C и S сразу определяются амплитуды сил q_{0c} и q_{0s} .

При наличии типичных для резонатора дефектов в виде разнодобротности и разночастотности уравнения его движения немного сложнее:

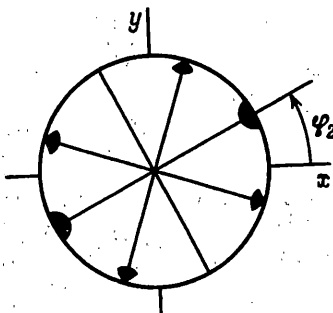
$$\begin{aligned} & \left\| \ddot{C} \right\| + h \left\| \dot{C} \right\| + \left\| C \right\| + \Delta h \begin{vmatrix} \cos 4\Theta_h & \sin 4\Theta_h \\ \sin 4\Theta_h & -\cos 4\Theta_h \end{vmatrix} \left\| \dot{C} \right\| + \\ & + \Delta v \begin{vmatrix} \cos 4\Theta_v & \sin 4\Theta_v \\ \sin 4\Theta_v & -\cos 4\Theta_v \end{vmatrix} \left\| C \right\| = \left\| q_c \right\| \\ & \left\| S \right\| \end{aligned} \quad (4.22)$$

где Δh , Δv – величины разнодобротности и разночастотности, а углы Θ_h , Θ_v задают ориентацию в теле резонатора главных осей добротности и частот. Усложняются и соотношения, связывающие параметры установившейся волны с поддерживающими эту волну силами, но возможность определения сил по измеренным параметрам волны остается. Соотношения (4.15), (4.17), (4.18) позволяют найти параметры гармоник дебаланса по величинам созданных вибрацией сил, независимо от способа их измерения.

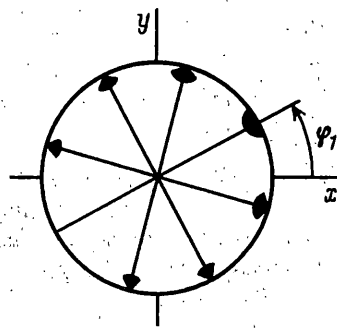
5. Устранение дебалансов. Балансировка. После определения всех компонент дебаланса d_{kc} , d_{ks} ($k = 1 - 4$) балансировка осуществляется удалением точечных масс с поверхности вблизи кромки резонатора. Способов расчета и порядка удаления масс несколько. Один из них следующий:

1. По значениям d_{1c} , d_{1s} определяются параметры d_1 , φ_1 :

$$d_1 = \sqrt{d_{1c}^2 + d_{1s}^2}, \quad \sin \varphi_1 = d_{1s} / d_1, \quad \cos \varphi_1 = d_{1c} / d_1$$



Фиг. 8



Фиг. 9

В точке φ_1 удаляется масса d_1 . Вычисляются поправки к определенным ранее величинам d_{kc}, d_{ks} ($k = 2 - 4$):

$$\Delta d_{kc} = -d_1 \cos k\varphi_1, \quad \Delta d_{ks} = -d_1 \sin k\varphi_1$$

2. По обновленным значениям d_{2c}, d_{2s} вычисляются d_2, φ_2 :

$$d_2 = \sqrt{d_{2c}^2 + d_{2s}^2}, \quad \sin 2\varphi_2 = d_{2s} / d_2, \quad \cos 2\varphi_2 = d_{2c} / d_2$$

В точках φ_2 и $\varphi_2 + \pi$ удаляются массы $d_2/2$.

Вычисляются вторые поправки к сформированным ранее величинам d_{4c}, d_{4s} :

$$\Delta d_{4c} = -d_2 \cos 4\varphi_2, \quad \Delta d_{4s} = -d_2 \sin 4\varphi_2$$

3. По обновленным ранее значениям d_{3c}, d_{3s} вычисляются d_3, φ_3 :

$$d_3 = \sqrt{d_{3c}^2 + d_{3s}^2}, \quad \sin 3\varphi_3 = d_{3s} / d_3, \quad \cos 3\varphi_3 = d_{3c} / d_3$$

По дважды обновленным значениям d_{4c}, d_{4s} вычисляются d_4, φ_4 :

$$d_4 = \sqrt{d_{4c}^2 + d_{4s}^2}, \quad \sin 4\varphi_4 = d_{4s} / d_4, \quad \cos 4\varphi_4 = d_{4c} / d_4$$

В точках $\varphi_3, \varphi_3 \pm 2\pi/3$ удаляются массы $d_3/3$.

В точках $\varphi_4, \varphi_4 \pm \pi/2$ и $\varphi_4 + \pi$ удаляются массы $d_4/4$.

При таком способе в общем случае требуется удаление масс в 10 различных точках.

Может быть использован другой способ балансировки, состоящий в следующем: после определения d_{kc}, d_{ks} для $k = 1 - 4$ вычисляются величины d_k, φ_k для всех k .

Балансируются все четыре гармоники сразу удалением масс в точках $\varphi_i = \varphi_4 + (i - 1)\pi/4$ ($i = 1 - 8$). Удаляемые массы Δm_i рассчитываются по формуле:

$$\Delta m_i = \frac{1}{8} d_4 \cos(i-1)\pi + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^3 d_k \cos k \left[\varphi_4 - \varphi_k + (i-1) \frac{\pi}{4} \right] - \min \Delta m_i$$

В этом случае балансировка сводится в общем случае к удалению массы в 7-ми точках.

Может быть использован и третий способ, когда балансировка каждой гармоники не нарушает балансировки остальных.

В этом случае 3-я и 4-ая гармоники балансируются так, как описано в первом способе, но в расчете удаляемых масс используются исходные величины d_k, φ_k $k = 3, 4$.

Балансировка второй гармоники с параметрами d_2, φ_2 выполняется удалением масс по схеме фиг. 8, т.е. удаляются массы:

в точках $\varphi_2, \varphi_2 + \pi$ по $d_2/2$,

в точках $\varphi_2 \mp \pi/4, \varphi_2 \mp 3\pi/4$ по $d_2/4$.

Балансировка по 1-ой гармонике выполняется удалением масс по схеме фиг. 9, т.е.

удаляются массы:

в точке φ_1 по $d_1/2$,

в точках $\varphi_1 \mp \pi/4$ по $d_1(1+1/\sqrt{2})/4$,

в точках $\varphi_1 \mp \pi/2$ по $d_1/4$,

в точках $\varphi_1 \mp 3\pi/4$ по $d_1(1-1/\sqrt{2})/4$.

Такой способ балансировки в общем случае требует наибольшего количества обрабатываемых точек, но он может оказаться удобным при чистой балансировке, когда может потребоваться подкорректировать какую-нибудь одну гармонику дебаланса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В.Ф. Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) // Изв. АН. МТТ. 1993. № 3. С. 6–19.

Москва

Поступила в редакцию
5.V.1998