МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1998

УДК 531.36

© 1998 г. А.П. МАРКЕЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ В ОДНОМ РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

Изучается движение автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности положения равновесия. Предполагается, что характеристическое уравнение матрицы линеаризованной системы имеет пару чисто мнимых корней и пару корней, близких к нулю. Решена задача о существовании периодических движений, рождающихся из положения равновесия и исследована их орбитальная устойчивость. Дан анализ условно-периодических движений. Исследован вопрос об ограниченности траекторий системы в окрестности ее неустойчивого положения равновесия в случае пары чисто мнимых и пары нулевых корней с непростыми элементарными делителями. В качестве примера рассмотрено движение тяжелой материальной точки по неподвижной абсолютно гладкой поверхности, которая в окрестности положения равновесия точки мало отличается от цилиндрической поверхности.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему с двумя степенями свободы, движение которой описывается уравнениями Гамильтона

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_j},\quad \frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_j}\quad (j=1,2) \tag{1.1}$$

где функция Гамильтона H не зависит от времени t. Считаем, что начало координат $q_j = p_j = 0$ ($j = 1, 2$) фазового пространства является положением равновесия системы, а функция H аналитическая в некоторой его окрестности.

Функция H может зависеть от одного или нескольких параметров. Полагаем, что один из них мал и обозначим его через ε ($0 \leqslant \varepsilon \ll 1$). Функцию H считаем аналитической относительно ε.

Предположим, что характеристическое уравнение матрицы линеаризованной относительно q_j, p_j системы (1.1) имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\Omega$, а корни другой пары стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Ограничиваясь случаем общего положения, полагаем, что этой паре корней при $\varepsilon = 0$ отвечают непростые элементарные делители.

В описанных предположениях координаты и импульсы q_j, p_j можно (см. [1–5] и п. 5 данной статьи) выбрать так, чтобы функция Гамильтона имела следующую (нормальную) форму:

$$H=\delta_1\Omega r+\tfrac{1}{2}\delta_2 p_2^2+\tfrac{1}{2}\varepsilon\varkappa q_2^2+\alpha q_2^3+\beta q_2 r+\gamma q_2^4+\delta q_2^2 r+\sigma r^2+O_5 \tag{1.2}$$

Здесь $q_1=\sqrt{2r}\sin\varphi$, $p_1=\sqrt{2r}\cos\varphi$, величины δ_1 и δ_2 равны 1 или −1, $\varkappa$, α, β, γ, δ, σ – постоянные, O_5 – сходящийся ряд, начинающийся с членов не ниже пятой степени относительно q_j, p_j ($j = 1, 2$).

Если в (1.2) величина $\varepsilon\varkappa$, входящая в коэффициент при r_2^2, равна нулю, то будем говорить, что в изучаемой системе имеет место точный резонанс. Если же $\varepsilon\varkappa \neq 0$, то имеем случай неточного резонанса.

Известно [3], что если в (1.2) коэффициент α отличен от нуля, то при точном резонансе положение равновесия $q_j = p_j = 0$ системы неустойчиво; если же $\alpha = 0$, то при выполнении неравенства $\delta_2\gamma > 0$, имеет место устойчивость, а при $\delta_2\gamma < 0$ неустойчивость.

В данной статье предполагается, что в (1.2) величина $\alpha \neq 0$, т.е. при точном резонансе положение равновесия $q_j = p_j = 0$ системы (1.1) неустойчиво и этот факт устанавливается по членам не выше третьей степени в разложении функции Гамильтона в ряд в окрестности точки $q_j = p_j = 0$ ($j = 1, 2$). Исследуются нелинейные колебания вблизи равновесия и решается задача о существовании и орбитальной устойчивости периодических движений, рождающихся из положения равновесия, как для точного, так и для неточного резонансов.

Отметим, что к рассмотренной в данной статье задаче о периодических движениях, рождающихся из положения равновесия, неприменима теорема Ляпунова о голоморфном интеграле [6]. Задача о существовании периодических движений и их линейной устойчивости в других резонансных случаях, когда у характеристического уравнения нет нулевых корней, исследована довольно подробно (см., например, работы [5, 7–9], в которых приведена и обширная библиография).

2. Об устойчивости и нелинейных колебаниях в случае точного резонанса. Пусть в гамильтониане (1.2) величина $\varepsilon\varkappa$ равна нулю, а $\alpha \neq 0$. Укороченная система уравнений движения, отвечающая гамильтониану (1.2), в котором отброшены члены выше третьей степени относительно q_j, p_j, имеет интеграл $r = r_0 = \text{const}$. Если $r_0 = 0$, то укороченная система сводится к двум дифференциальным уравнениям относительно q_2, p_2. Ее фазовый портрет показан на фиг. 1, *а*, где для определенности принято $\alpha > 0$, $\delta_2 = 1$.

Пусть далее r_0 – малая, но отличная от нуля, постоянная. Введем малый параметр μ ($0 < \mu \ll 1$), положив $r_0 = \mu^2\alpha^{-2}\rho_0$, где ρ_0 – величина порядка единицы. Для исследования полной системы в окрестности ее положения равновесия $q_j = p_j = 0$ сделаем предварительно каноническую замену переменных $\varphi, r, q_2, p_2 \to w_1, I_1, q, p$ по формулам

$$\varphi = w_1, \quad r = \mu^2\alpha^{-2}(\rho_0 + \mu^{1/2}I_1), \quad q_2 = \mu\alpha^{-1}q, \quad p_2 = \mu^{3/2}\alpha^{-1}p \tag{2.1}$$

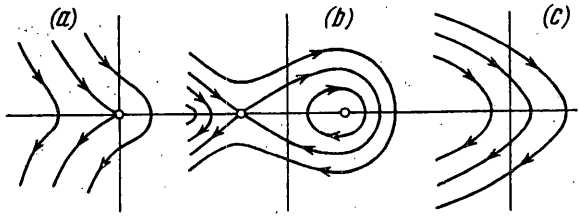
Уравнениям движения в новых переменных соответствует функция Гамильтона

$$H = \delta_1\Omega I_1 + \mu^{1/2}(\tfrac{1}{2}\delta_2 p^2 + q^3 + b\rho_0 q) + \mu b q I_1 + O(\mu^{3/2}) \quad (b = \alpha^{-1}\beta) \tag{2.2}$$

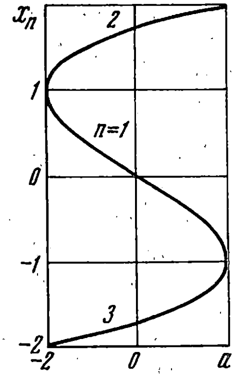
2.1. Нелинейные колебания. Рассмотрим сначала приближенную систему, описываемую гамильтонианом (2.2), в котором отброшены члены порядка μ и выше. Она представляет собой совокупность двух осцилляторов: линейного (ему соответствуют переменные w_1, I_1) и нелинейного (описываемого переменными q, p). В приближенной системе связь между этими осцилляторами осуществляется через постоянную ρ_0, отвечающую, согласно (2.1), первому осциллятору. В полной системе взаимодействие между осцилляторами описывается еще и посредством величин порядка μ и выше в (2.2).

В приближенной системе имеем $I_1 = \text{const}$, $w_1(t) = \delta_1\Omega\, t + w_1(0)$, а гамильтониан второго осциллятора представляет собой совокупность членов порядка $\mu^{1/2}$ из (2.2). При канонической замене $q, p \to -q, p$ и одновременном изменении знака у δ_2 этот гамильтониан не изменяется. Поэтому будем рассматривать только случай $\delta_2 = 1$ и запишем гамильтониан нелинейного осциллятора приближенной системы в виде

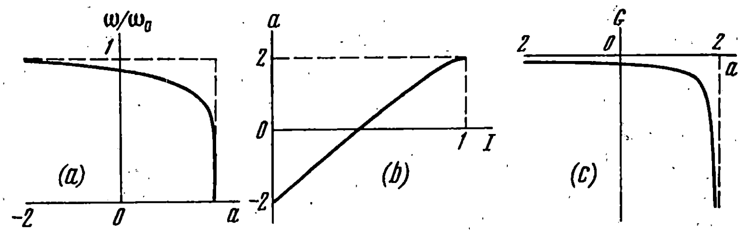
$$F = \mu^{1/2}(\tfrac{1}{2}p^2 + q^3 + b\rho_0 q) \tag{2.3}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Соответствующие (2.3) уравнения движения имеют вид

$$dq/dt = \mu^{1/2} p, \quad dp/dt = -\mu^{1/2}(3q^2 + b\rho_0) \tag{2.4}$$

Система уравнений (2.4) имеет интеграл $F = h = \text{const}$. Фазовый портрет в плоскости q, p показан на фиг. 1, *b* и 1, *c*, где принято соответственно $b < 0$ и $b > 0$. При $b = 0$ фазовый портрет аналогичен портрету на фиг. 1, *a*.

Рассмотрим подробнее траектории на фазовом портрете фиг. 1, *b*. Для удобства введем обозначения $\overset{+}{q}_0 = {}^1/_3\sqrt{-3b\rho_0}$, $h_c = -2\mu^{1/2}\overset{+}{q}_0{}^3$, $h_s = 2\mu^{1/2}\overset{+}{q}_0{}^3$. Если $h < h_c$ или $h > h_s$, то траектории являются незамкнутыми кривыми, уходящими при $t \to \pm\infty$ в область бесконечно больших значений $|q|$, $|p|$. Если же $h_c \leqslant h \leqslant h_s$, то, помимо такого типа траекторий, существуют траектории, расположенные в ограниченной области. Будем интересоваться только этими траекториями.

При $h = h_c$ существует равновесие $q = \overset{+}{q}_0$, $p = 0$, которому на фиг. 1, *b* соответствует особая точка типа центр. При значениях h из интервала (h_c, h_s) имеют место колебания в окрестности этого равновесия, на фиг. 1, *b* им соответствуют замкнутые траектории, окружающие особую точку $(\overset{+}{q}_0, 0)$.

При $h = h_s$ имеем либо равновесие $q = -\overset{+}{q}_0$, $p = 0$, которому на фиг. 1, *b* отвечает седловая особая точка $(-\overset{+}{q}_0, 0)$, либо двоякоасимптотическую к этой точке траекторию – сепаратрису. На фиг. 1, *b* сепаратриса разделяет области ограниченных и неограниченных траекторий. На ней выполняются неравенства $-\overset{+}{q}_0 < q(t) \leqslant 2\overset{+}{q}_0$. Если принять, что $q(0) = 2\overset{+}{q}_0$, то из (2.4) можно получить, что на сепаратрисе

$$q(t) = \overset{+}{q}_0(2 - 3\,\mathrm{th}^2\,\eta) \quad \left(\eta = \sqrt{{}^3/_2\,\mu\overset{+}{q}_0}\,t\right)$$

Максимальное значение величины p^2 на сепаратрисе достигается при $q = \overset{+}{q}_0$ и равно $8\overset{+}{q}_0^3$.

Если $h_c < h < h_s$, то в области колебаний, лежащей на фиг. 1, b внутри сепаратрисы, уравнения (2.4) интегрируются в эллиптических функциях. При этом

$$q = \overset{+}{q}_0[x_2 + (x_1 - x_2)\operatorname{sn}^2(u,k)], \quad u = \sqrt{\tfrac{1}{2}\mu \overset{+}{q}_0(x_2 - x_3)}\, t$$

$$k^2 = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)^{-1} \tag{2.5}$$

В (2.5) величины x_n $(n = 1, 2, 3)$ – корни уравнения $x^3 - 3x - a = 0$, где $h = \mu^{1/2}\overset{+}{q}_0^3 a$. При $h_c < h < h_s$ (т.е. при $-2 < a < 2$) все корни вещественны. Их нумерация выбрана так, чтобы выполнялись неравенства $x_3 < x_1 < x_2$. Можно показать, что $-2 < x_3 < -1$, $-1 < x_1 < 1$, $1 < x_2 < 2$. Графики функций $x_n(a)$ $(n = 1, 2, 3)$ представлены на фиг. 2.

Величина q периодически изменяется между $\overset{+}{q}_0 x_1$ и $\overset{+}{q}_0 x_2$. Частота колебаний ω вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{\pi\sqrt{3(x_2 - x_3)}}{6K(k)}\omega_0 \tag{2.6}$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, а через ω_0 обозначена частота малых колебаний в окрестности равновесия $q = \overset{+}{q}_0$, $p = 0$, равная $\sqrt{6\mu \overset{+}{q}_0}$.

Можно показать, что вблизи положения равновесия, когда $h \to h_c$, имеем

$$\omega = \omega_0[1 - 5(a+2)/144 + O((a+2)^{3/2})] \tag{2.7}$$

Вблизи же сепаратрисы, когда $h \to h_s$, величина ω стремится к нулю, причем

$$\omega \cong -2\pi\omega_0/\ln(2 - a) \tag{2.8}$$

График функции ω/ω_0 представлен на фиг. 3, a.

В области колебаний можно ввести переменные действие – угол I_2, w_2 положив [10]:

$$I_2(h) = \frac{1}{2\pi}\int p\, dq \tag{2.9}$$

где функция $p = p(q, h)$ определяется из интеграла $F = h$. Интегрирование в (2.9) проводится по замкнутым траекториям фиг. 1, b. Обращение функции (2.9) дает $h = \mu^{1/2}H^{(1)}(I_2)$, причем справедливо соотношение

$$\omega = \mu^{1/2}\partial H^{(1)}/\partial I_2 \tag{2.10}$$

Фиг. 3, b представляет зависимость h от I_2. По оси абсцисс откладывается величина $I = I_2/I_2^s$, где $I_2^s = 12\sqrt{6\overset{+}{q}_0}\, \overset{+}{q}_0^2/(5\pi)$ – значение переменной действие I_2 для h, равного его сепаратрисному значению h_s. Можно показать, что

$$I = \frac{5\sqrt{3}}{36}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{a - x^3 + 3x}\, dx$$

По оси ординат на фиг. 3, b откладывается величина a.

Из (2.7), (2.8) и (2.10) следует, что в окрестности равновесия $q = \overset{+}{q}_0$, $p = 0$ справедливо разложение

$$h = h_c + \omega_0 I_2 - \frac{5\mu^{1/2}}{48\overset{+}{q}_0^{2}} I_2^2 + O(I_2^3) \tag{2.11}$$

а вблизи сепаратрисы

$$(h_s - h)\ln\frac{(h_s - h)}{\mu^{1/2}\overset{+}{q}_0^{3}} \cong 2\pi\omega_0(I_2 - I_2^s) \tag{2.12}$$

Обратимся теперь к полной системе, описываемой функцией Гамильтона (2.2). В переменных I_1, I_2, w_1, w_2 имеем

$$H = H^{(0)}(I_1) + \mu^{1/2}H^{(1)}(I_2) + \mu H^{(2)}(I_1, I_2, w_1, w_2; \mu^{1/2}) \tag{2.13}$$

где $H^{(0)} = \delta_1\Omega I_1$, функция $H^{(1)}$ определена выше. В рассматриваемой области колебаний приближенной системы, где $\rho_0 \neq 0$, $h_c < h < h_s$, гамильтониан (2.13) 2π-периодичен по w_1, w_2 и аналитичен по всем переменным. При $\mu = 0$ гамильтониан зависит только от одной из переменных действие, поэтому имеет место случай собственного вырождения [11]. При этом выполняются неравенства

$$\frac{\partial H^{(0)}}{\partial I_1} \neq 0, \quad \frac{\partial H^{(1)}}{\partial I_2} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial I_2^2} \neq 0 \tag{2.14}$$

Справедливость первых двух неравенств очевидна. Проверим третье неравенство. Из (2.5), (2.6) и (2.10) с учетом выражений для производных полных эллиптических интегралов [12] получаем

$$\frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial I_2^2} = \frac{G(a)}{\overset{+}{q}_0^{2}}, \quad G(a) = \frac{3\pi^2\{K(1-k^2)[6 + x_1(x_2 - x_1)] - 6E\}}{4K^3(x_2 - x_1)^2(x_3 - x_1)^2} \tag{2.15}$$

где E – полный эллиптический интеграл второго рода. График функции $G(a)$ показан на фиг. 3, c. В соответствии с (2.10)–(2.12) при $a \to -2$ имеем $G(a) \to -5/24$, если же $a \to 2$, то функция $G(a)$ стремится к $-\infty$, причем

$$G(a) \cong \frac{24\pi^2}{(2-a)\ln^3(2-a)}$$

Так как $G(a) < 0$ при всех допустимых значениях a, то третье из неравенств (2.14) удовлетворяется и, следовательно, все условия (2.14) для гамильтониана (2.13) выполнены. Поэтому, согласно [11, 13], движение в полной системе для большинства начальных условий будет условно-периодическим с частотами Ω и ω; лишь доля $O(\exp(-c_1\mu^{-1/2}))$, $c_1 > 0$ – const фазового пространства не заполнена условно-периодическими траекториями. При этом для всех начальных условий величины $I_i(t)$ ($i = 1, 2$) в полной системе при всех t близки их начальным значениям: $|I_i(t) - I_i(0)| < c\mu^{1/2}$, ($c_2$ – const).

2.2. *О периодических движениях*. Положениям равновесия $q = -\overset{+}{q}_0$, $p = 0$ (седловая точка на фиг. 1, b) и $q = \overset{+}{q}_0$, $p = 0$ (особая точка типа центр на фиг. 1, b) системы (2.4) соответствуют однопараметрические семейства периодических движений приближенной системы периода $2\pi/\Omega$, параметром служит величина ρ_0. Можно показать (см. далее п. 4), что в полной системе эти периодические движения переходят в два аналитические относительно $\mu^{1/2}$ семейства, период которых стремится к $2\pi/\Omega$ при $\mu \to 0$.

Периодические движения семейства, которому при $\mu \to 0$ отвечает седловая особая точка на фиг. 1, b, орбитально неустойчивы, что следует из непрерывности характеристических показателей по параметру μ. Из упомянутых результатов [11, 13], применимость которых в изучаемой в данной статье задаче показана выше, следует, что периодические движения семейства, которому при $\mu \to 0$ отвечает особая точка типа центр на фиг. 1, b, будут орбитально устойчивы.

Таким образом, от неустойчивого положения равновесия $q_j = p_j = 0$ ($j = 1, 2$) системы (1.1) при $r_0 \neq 0$ и $b < 0$ ответвляется два однопараметрических семейства периодических движений. Периодические движения одного семейства орбитально неустойчивы, а другого – устойчивы.

2.3. Об ограниченности движения в окрестности неустойчивого равновесия. Рассмотрим подробнее устойчивость положения равновесия $q_j = p_j = 0$ ($j = 1, 2$) системы (1.1). Фазовый портрет, иллюстрирующий неустойчивость приближенной системы, показан на фиг. 1, a, где принято, что $r_0 = 0$. Пусть величина b в (2.2) отрицательна. Тогда, если начальные условия таковы, что $r_0 \neq 0$, то в приближенной системе неустойчивость не обнаруживается (фиг. 1, b). Таким образом, при $b < 0$ в приближенной системе есть условная устойчивость: неустойчивость начала координат реализуется лишь на двумерной поверхности $q_1 = 0, p_1 = 0$ четырехмерного фазового пространства q_j, p_j ($j = 1, 2$).

Для полной системы с гамильтонианом (2.2) такой вывод об устойчивости сделать нельзя. Но из результатов п. *2.1* следует, что, если $b < 0$, то для каждого фиксированного значения r_0 ($0 < r_0 \ll 1$) начальные значения величин $q_2(t), p_2(t)$ можно выбрать настолько малыми, что последующее движение будет происходить в ограниченной окрестности положения равновесия. Размеры этой окрестности стремятся к нулю при $r_0 \to 0$. В частности, для величин q, p из (2.1) имеем следующие (получаемые с учетом размеров области колебаний на фиг. 1, b) оценки: $|q(t)| < 2\overset{+}{q}_0$, $|\dot q(t)| < 2\sqrt{2}\,\overset{+}{q}_0\sqrt{\overset{+}{q}_0}$.

3. Пример. Рассмотрим движение материальной точки по абсолютно гладкой поверхности в однородном поле тяжести. Движение отнесем к неподвижной системе координат $Oxyz$, ось Oz которой направлена вертикально вверх. Поверхность задается уравнением

$$z(x, y) = {}^1/_2x^2 - x^2y + y^3 \tag{3.1}$$

В окрестности начала координат эта поверхность близка к цилиндрической поверхности. Единица длины выбрана так, чтобы отличная от нуля главная кривизна поверхности в начале координат равнялась единице. Введя еще масштабы измерения массы и времени так, чтобы масса точки и ускорение свободного падения также равнялись единице, можно записать уравнения движения в виде

$$\ddot x + (\ddot z + 1)z_x = 0, \quad \ddot y + (\ddot z + 1)z_y = 0 \tag{3.2}$$

где z – это функция $z(x, y)$ из (3.1). Начало координат $x = y = 0$ является положением равновесия материальной точки. Это положение равновесия неустойчиво. Действительно, из (3.1), (3.2) следует, что уравнения движения допускают частные решения, в которых $x(t) \equiv 0$, а $y(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1 + 9y^4)\ddot y + 18y^3\dot y^2 + 3y^2 = 0 \tag{3.3}$$

Эти частные решения описывают движение материальной точки в вертикальной плоскости Ozy по абсолютно гладкой кривой $z = y^3$. Для всех решений уравнения (3.3), кроме $y(t) \equiv 0$, имеем $y(t) \to -\infty$, если $t \to +\infty$. Отсюда следует, что положение равновесия $x = y = 0$ неустойчиво.

Однако если движение материальной точки начинается вблизи начала координат с малой начальной скоростью, причем $x^2(0) + \dot{x}^2(0) \neq 0$, то последующее ее движение может происходить в ограниченной окрестности положения равновесия $x = y = 0$.

Чтобы показать справедливость последнего утверждения, воспользуемся результатами п. 2. Введя обычным образом импульсы p_x и p_y, имеем равенства

$$\dot{x} = \Delta^{-1}[(1+z_y^2)\,p_x - z_x z_y p_y], \quad \dot{y} = \Delta^{-1}[-z_x z_y p_x + (1+z_x^2)\,p_y]$$

$$(\Delta = 1 + z_x^2 + z_y^2) \tag{3.4}$$

а для функции Гамильтона получаем следующее выражение:

$$H = \frac{1}{2\Delta}[(1+z_y^2)\,p_x^2 - 2z_x z_y p_x p_y + (1+z_x^2)\,p_y^2] + z(x,y)$$

В окрестности положения равновесия

$$H = \tfrac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \tfrac{1}{2}x^2 - x^2 y + y^3 + O_4 \tag{3.5}$$

где O_4 – сходящийся ряд по степеням x, y, p_x, p_y, начинающийся с членов не ниже четвертой степени.

Для получения нормальной формы гамильтониана сделаем унивалентную каноническую замену переменных, задаваемую производящей функцией

$$S = x p_1 + y p_2 - \tfrac{1}{2} x y p_1 - \tfrac{1}{4} p_1^2 p_2$$

Из соотношений

$$q_1 = \frac{\partial S}{\partial p_1}, \quad q_2 = \frac{\partial S}{\partial p_2}, \quad p_x = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y}$$

имеем явный вид замены переменных

$$x = q_1 + \frac{q_1(4q_2 + p_1^2) + 4p_1 p_2}{8 - 4q_2 - p_1^2}, \quad y = q_2 + \frac{1}{4}p_1^2 \tag{3.6}$$

$$p_x = p_1 - \frac{1}{8}p_1(4q_2 + p_1^2), \quad p_y = p_2 - \frac{2p_1(2q_1 + p_1 p_2)}{8 - 4q_2 - p_1^2}$$

Разложив правые части в ряды, получим

$$x = q_1 + \tfrac{1}{2}(q_1 q_2 + p_1 p_2) + O_3, \quad y = q_2 + \tfrac{1}{4}p_1^2 \tag{3.7}$$

$$p_x = p_1 - \tfrac{1}{2}q_2 p_1 + O_3, \quad p_y = p_2 - \tfrac{1}{2}q_1 p_1 + O_3$$

Подстановка выражений (3.7) в (3.5) дает функцию Гамильтона, нормализованную до членов третьей степени включительно:

$$H = \tfrac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \tfrac{1}{2}p_2^2 + q_2^3 - \tfrac{1}{2}q_2(q_1^2 + p_1^2) + O_4$$

В обозначениях п. 2 имеем $b = -1 < 0$. Согласно п. *2.3*, отсюда и из равенств (3.4), (3.6) следует справедливость сформулированного выше утверждения об ограниченности движения точки в окрестности ее неустойчивого положения равновесия $x = y = 0$.

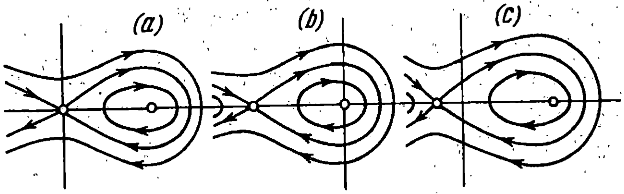
4. Периодические движения в случае неточного резонанса. Пусть величина $\varepsilon\varkappa$ в (1.2) отлична от нуля. Если в (1.2) отбросить члены четвертой и более высоких степеней относительно q_j, p_j, то, как и в п. 2, укороченная система имеет интеграл

$r = r_0 = \text{const}$. При $r_0 = 0$ укороченная система уравнений движения сводится к системе двух уравнений относительно q_2, p_2. Фазовые портреты этой системы в плоскости q_2, p_2 показаны на фиг. 4, *a* и 4, *b*, на которых $\varkappa < 0$ и $\varkappa > 0$ соответственно. Далее постоянную r_0 будем считать малой, но отличной от нуля величиной, полагая $r_0 = \varepsilon^2\alpha^{-2}\rho_0$ где, как и в п. 2, ρ_0 величина порядка единицы.

Введем новые переменные w_1, I_1, q, p по формулам (2.1), заменив в них μ на ε и, как в п. 2, положим $\delta_2 = 1$. Тогда, вместо (2.2), будем иметь функцию Гамильтона

$$H_* = \delta_1\Omega I_1 + \varepsilon^{1/2}(\tfrac{1}{2}p^2 + q^3 + \tfrac{1}{2}\varkappa q^2 + b\rho_0 q) + \varepsilon bqI_1 + O(\varepsilon^{3/2}) \tag{4.1}$$

Приближенная система, описываемая гамильтонианом (4.1), если в нем отбросить



Фиг. 4

члены порядка ε и выше, как и в п. 2, представляет собой совокупность двух осцилляторов, причем гамильтониан нелинейного осциллятора имеет вид

$$F_* = \varepsilon^{1/2}(\tfrac{1}{2}p^2 + q^3 + \tfrac{1}{2}\varkappa q^2 + b\rho_0 q) \tag{4.2}$$

и, вместо уравнений движения (2.4), имеем такие уравнения

$$dq / dt = \varepsilon^{1/2}p, \quad dp / dt = -\varepsilon^{1/2}(3q^2 + \varkappa q + b\rho_0) \tag{4.3}$$

Рассмотрим положения равновесия $q = q_0, p = p_0$ системы (4.3). При выполнении неравенства $b > \varkappa^2/(12\rho_0)$ равновесий нет. Если же $b < \varkappa^2/(12\rho_0)$, то существует два однопараметрических семейства равновесий (параметром служит величина ρ_0). Для этих равновесий $p_0 = 0$, а $q_0 = q_0^-$ или q_0^+, где $q_0^- = \tfrac{1}{6}(-\varkappa - \sqrt{\varkappa^2 - 12b\rho_0})$, $\quad q_0^+ = \tfrac{1}{6}(-\varkappa + \sqrt{\varkappa^2 - 12b\rho_0})$.

Анализ показывает, что если $\varkappa + 6q_0 < 0$, то равновесие $q = q_0, p = 0$ неустойчиво, если же $\varkappa + 6q_0 > 0$, то устойчиво. Следовательно, равновесия первого семейства $q = q_0^-, p = 0$ неустойчивы, а равновесия второго семейства $q = q_0^+, p = 0$ устойчивы.

На фиг. 4, *c* представлен фазовый портрет системы (4.3) для случая $\varkappa < 0$, $b < 0$. Неустойчивому семейству равновесий на фиг. 4, *c* соответствует седловая особая точка, а устойчивому – центр.

Равновесиям системы (4.3) соответствуют периодические движения приближенной системы. Полагая величину I_1 (являющуюся интегралом в приближенной системе) равной нулю, получаем, что в исходных переменных q_j, p_j эти периодические движения можно описать формулами

$$q_1 = \varepsilon\alpha^{-1}\sqrt{2\rho_0}\sin\varphi, \quad p_1 = \varepsilon\alpha^{-1}\sqrt{2\rho_0}\cos\varphi \quad (\varphi = \delta_1\Omega t + \varphi_0) \tag{4.4}$$

$$q_2 = \varepsilon\alpha^{-1}q_0, \quad p_2 = 0$$

Рассмотрим теперь полную систему, описываемую функцией Гамильтона (4.1). Покажем, что при выполнении неравенства $\varkappa + 6q_0 \neq 0$ в полной системе существуют два однопараметрические аналитические относительно $\varepsilon^{1/2}$ семейства периодических движений, стремящиеся при $\varepsilon \to 0$ к семействам (4.4).

Для этого будем изучать движение полной системы на ее изоэнергетическом уровне $H_* = c_*$. Так как изменение константы c_* сводится к изменению величины I_1, постоянной в приближенной системе, или, в конечном счете, к изменению параметра ρ_0 рассматриваемых семейств периодических движений, то без ограничения общности можно считать, что $c_* = \varepsilon^{1/2}(q_0^3 + {}^1\!/_2 \varkappa q_0^2 + b\rho_0 q_0)$, т.е. отвечает периодическим движениям приближенной системы. Разрешив уравнение $H_* = c_*$ относительно I_1, получим

$$I_* = -K = -\delta_1 \Omega^{-1} F_* + O(\varepsilon^{3/2}) \tag{4.5}$$

где F_* – это функция (4.2), а не зависящие от q, p, w_1 члены порядка $\varepsilon^{1/2}$ отброшены. Величина $O(\varepsilon^{3/2})$ в (4.5) – 2π-периодическая относительно w_1 и аналитическая относительно q, p функция.

На изоэнергетическом уровне $H_* = c_*$ уравнения движения (уравнения Уиттекера [14]) имеют гамильтонову форму. Роль функции Гамильтона играет функция K из (4.5), независимой переменной является w_1. Эти уравнения имеют вид

$$dq / dw_1 = \varepsilon^{1/2} \delta_1 \Omega^{-1} p + O(\varepsilon^{3/2}) \tag{4.6}$$

$$dp / dw_1 = -\varepsilon^{1/2} \delta_1 \Omega^{-1} (3q^2 + \varkappa q + b\rho_0) + O(\varepsilon^{3/2})$$

Найдем 2π-периодическое по w_1 решение системы (4.6). Ищем его в виде рядов

$$q = q_0 + \varepsilon^{1/2} q^{(1)} + \varepsilon q^{(2)} + \ldots, \quad p = \varepsilon^{1/2} p^{(1)} + \varepsilon q^{(2)} + \ldots \tag{4.7}$$

Подставив эти ряды в (4.6) и приравняв коэффициенты при $\varepsilon^{k/2}$, найдем дифференциальные уравнения для $q^{(k)}, p^{(k)}$. Для $q^{(1)}, p^{(1)}$ получаем уравнения

$$dq^{(1)} / dw_1 = 0, \quad dp^{(1)} / dw_1 = 0$$

общее решение которых есть $q^{(1)} = c^{(1)}, p^{(1)} = d^{(1)}$, где $c^{(1)}, d^{(1)}$ – постоянные, определяемые на следующем шаге.

Для $q^{(2)}, p^{(2)}$ имеем уравнения

$$\frac{dq^{(2)}}{dw_1} = \delta_1 \Omega^{-1} d^{(1)}, \quad \frac{dp^{(2)}}{dw_1} = -\delta_1 \Omega^{-1} (\varkappa + 6q_0) c^{(1)}$$

Чтобы $q^{(2)}, p^{(2)}$ были периодическими по w_1, надо положить $c^{(1)} = d^{(1)} = 0$ и тогда $q^{(2)} = c^{(2)}, p^{(2)} = d^{(2)}$, где постоянные $c^{(2)}$, и $d^{(2)}$ определяются на следующем шаге при нахождении периодического решения системы уравнений для $q^{(3)}, p^{(3)}$:

$$\frac{dq^{(3)}}{dw_1} = \delta_1 \Omega^{-1} d^{(2)} + Q^3(w_1), \quad \frac{dp^{(3)}}{dw_1} = -\delta_1 \Omega^{-1} (\varkappa + 6q_0) c^{(2)} + P^{(3)}(w_1) \tag{4.8}$$

Здесь $Q^{(3)}, P^{(3)}$ – 2π-периодические функции w_1, не содержащие $d^{(2)}, c^{(2)}$. Для периодичности $q^{(3)}$ и $p^{(3)}$ величины $d^{(2)}$ и $c^{(2)}$ нужно выбрать так, чтобы в разложениях правых частей уравнений (4.8) в ряды Фурье отсутствовали постоянные члены. При условии $\varkappa + 6q_0 \neq 0$ такой выбор всегда возможен. И тогда $q^{(3)} = f^{(3)} + c^{(3)}$, $p^{(3)} = g^{(3)} + d^{(3)}$, где $f^{(3)}, g^{(3)}$ – 2π-периодические функции w_1, а $c^{(3)}, d^{(3)}$ – постоянные, определяемые на следующем шаге.

Описанный процесс можно продолжить. При этом уравнения для $q^{(k)}, p^{(k)}$ $(k \geqslant 4)$ аналогичны уравнениям (4.8) для $q^{(3)}, p^{(3)}$. При достаточно малых ε ряды (4.7) сходятся [15] и представляют собой 2π-периодические функции w_1, содержащие величину ρ_0 как параметр.

Зависимость w_1 от времени находится из уравнения

$$dw_1 / dt = \frac{\partial H_*}{\partial I_1} = \delta_1 \Omega + \varepsilon d q + O(\varepsilon^{3/2})$$

Величины q, p, I_1, входящие в правую часть этого уравнения, должны быть выражены через w_1 по формулам (4.5) и (4.7). Период полученных решений по t равен промежутку времени, за который величина w_1 возрастает на 2π. С погрешностью порядка $\varepsilon^{3/2}$ он равен $2\pi|\Omega + \varepsilon\delta_1 bq_0|^{-1}$.

Аналогично п. 2 можно показать, что в полной системе с гамильтонианом (4.1) периодические движения семейства, которому на фиг. 4, *c* соответствует седловая особая точка $q = q_0^-$, $p = 0$ уравнений (4.3), орбитально неустойчивы, а периодические движения из семейства, которому соответствует особая точка $q = q_0^+$, $p = 0$ типа центр, орбитально устойчивы.

В заключение отметим, что построенные в данном п. периодические движения для случая неточного резонанса при $\varkappa = 0$ и $\varepsilon = \mu$ переходят в периодические движения п. 2.2, где рассматривался случай точного резонанса.

5. О нормализации функции Гамильтона. Расчетные формулы. Пусть ξ_j, η_j ($j = 1, 2$) – канонически сопряженные переменные автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Предположим, что начало координат $\xi_j = \eta_j = 0$ ($j = 1, 2$) является положением равновесия, а функция Гамильтона Г аналитична в некоторой его окрестности:

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 \ldots \tag{5.1}$$

где Γ_k – форма степени k относительно ξ_j, η_j ($j = 1, 2$).

Пусть квадратичная форма Γ_2 представима в виде ряда по малому параметру $\varepsilon(0 \leqslant \varepsilon \ll 1)$:

$$\Gamma_2 = \Gamma_2^{(0)} + \varepsilon\Gamma_2^{(1)} + \varepsilon^2\Gamma_2^{(2)} \ldots \tag{5.2}$$

$$\Gamma_2^{(0)} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}, \mathbf{\Gamma}_0\mathbf{a}), \quad \Gamma_2^{(m)} = \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=2} \gamma_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}^{(m)} \xi_1^{\nu_1}\xi_2^{\nu_2}\eta_1^{\mu_1}\eta_1^{\mu_2}$$

Здесь $\mathbf{a} = (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)^{\text{т}}$, а $\mathbf{\Gamma}_0$ – вещественная симметрическая матрица.

Если $\varepsilon = 0$, то линеаризованные уравнения движения имеют вид

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{J}\Gamma_0\mathbf{a}, \quad \mathbf{J} = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{Vmatrix} \tag{5.3}$$

Предположим, что характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{J\Gamma}_0$ системы (5.3) имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\Omega_0$ и пару нулевых корней, которым соответствуют непростые элементарные делители.

Для получения нормальной формы (1.2) функции Гамильтона (5.1) надо сначала нормализовать ее квадратичную часть (5.2). Для этого предварительно приведем к нормальной форме функцию $\Gamma_2^{(0)}$ из (5.2).

Пусть $\beta = (u_1, u_2, v_1, v_2)^{\text{т}}$ – вектор новых переменных. Известно [1–5], что в рассматриваемом случае пары чисто мнимых и пары нулевых корней с непростыми элементарными делителями существует вещественная линейная унивалентная каноническая замена переменных $\mathbf{a} = \mathbf{Nb}$ такая, что функция $\Gamma_2^{(0)}$ преобразуется в функцию $F_2^{(0)}$ вида

$$F_2^{(0)} = \tfrac{1}{2}\delta_1\Omega_0(u_1^2 + v_1^2) + \tfrac{1}{2}\delta_2 v_2^2 \tag{5.4}$$

где величины δ_j равны 1 или –1, их конкретные значения определяются в процессе построения матрицы $\mathbf{N}$.

Матрица $\mathbf{N}$ может быть построена, например, следующим образом [4]. Пусть $\mathbf{r}_*$ и $\mathbf{s}_*$ – действительная и мнимая части собственного вектора, соответствующего собственному значению $i\delta_1\Omega_0$ матрицы $\mathbf{J}\Gamma_0$, а $\mathbf{h}_*$ и $\mathbf{g}_*$ – ее собственный и присоединенный векторы, отвечающие нулевому собственному значению. Эти векторы являются решениями системы уравнений

$$\mathbf{J}\Gamma_0\mathbf{r}_* = -\delta_1\Omega_0\mathbf{s}_*, \quad \mathbf{J}\Gamma_0\mathbf{s}_* = \delta_1\Omega_0\mathbf{r}_*$$

$$\mathbf{J}\Gamma_0\mathbf{h}_* = 0, \quad \mathbf{J}\Gamma_0\mathbf{g}_* = \delta_2\mathbf{h}_*$$

Тогда $\delta_1 = \operatorname{sign}(\mathbf{r}_*, \Gamma_0\mathbf{r}_*)$, $\delta_2 = \operatorname{sign}(\mathbf{g}_*, \Gamma_0\mathbf{g}_*)$. Если положить $\varkappa_1 = (\mathbf{r}_*, \mathbf{J}\mathbf{s}_*)^{-1/2}$, $\varkappa_2 = (\mathbf{h}_*, \mathbf{J}\mathbf{g}_*)^{-1/2}$, то для столбцов $\mathbf{n}_k = (n_{1k}, n_{2k}, n_{3k}, n_{4k})^{\mathrm{T}}$ матрицы $\mathbf{N}$ имеем выражения

$$\mathbf{n}_1 = \varkappa_1\mathbf{r}_*, \quad \mathbf{n}_2 = \varkappa_2\mathbf{h}_*, \quad \mathbf{n}_3 = \varkappa_1\mathbf{s}_*, \quad \mathbf{n}_4 = \varkappa_2\mathbf{g}_*$$

В новых переменных функция (5.2) имеет вид

$$F_2 = F_2^{(0)} + \varepsilon F_2^{(1)} + \ldots, \quad F_2^{(m)} = \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=2} f^{(m)}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} u_1^{\nu_1} u_2^{\nu_2} v_1^{\mu_1} v_2^{\mu_2}$$

Функция $F_2^{(0)}$ определена равенством (5.4). Коэффициенты $f^{(m)}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ выражаются через коэффициенты $\gamma^{(m)}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ функций $\Gamma_2^{(m)}$ из (5.2).

Для дальнейшей нормализации квадратичной части гамильтониана используем классическую теорию возмущений [16, 17]. Можно построить близкое к тождественному аналитическое по ε линейное каноническое преобразование $u_j, v_j \to x_j, y_j$, приводящее гамильтониан F_2 к нормальной форме H_2 вида

$$H_2 = \tfrac{1}{2}\delta_1\Omega(x_1^2 + y_1^2) + \tfrac{1}{2}\delta_2 y_2^2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon\varkappa x_2^2 \tag{5.5}$$

Вычисления показывают, что

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon\delta_1(f^{(1)}_{2000} + f^{(1)}_{0020} + O(\varepsilon^2), \quad \varkappa = 2f^{(1)}_{0200} + O(\varepsilon)$$

В переменных x_j, y_j функция Гамильтона (5.1) принимает вид

$$H = H_2 + \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=3}^{\infty} h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2} \tag{5.6}$$

где H_2 имеет нормальную форму (5.5), коэффициенты $h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ выражаются через коэффициенты соответствующих форм Γ_k из (5.1).

Нормализация членов третьей и более высоких степеней в (5.6) может быть осуществлена при помощи канонического преобразования $x_j, y_j \to q_j, p_j$, получаемого, например, методом Депри-Хори [4, 16, 17]. Нормализованная до членов четвертой степени функция Гамильтона имеет вид (1.2). Коэффициенты $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$ нормальной формы (1.2) выражаются через коэффициенты гамильтониана (5.6) по следующим формулам:

$$\alpha = h_{0300} + \varepsilon\delta_2 f^{(1)}_{0200} h_{0102} + O(\varepsilon^2), \quad \beta = h_{2100} + h_{0120}$$

$$\gamma = h_{0400} - \frac{\delta_1}{2\Omega}(h_{0210}^2 + h_{1200}^2) + \frac{3}{2}\delta_2 h_{0300}h_{0102} - \tfrac{1}{2}\delta_2 h_{0201}^2 + O(\varepsilon)$$

$$\delta = h_{2200} + h_{0220} - \delta_2 h_{0201}(h_{2001} + h_{0021}) + \tfrac{1}{2}\delta_2 h_{0102}(h_{2100} + h_{0120}) -$$

$$-\frac{\delta_1}{2\Omega}[(h_{2100} - h_{0120})^2 + h_{1110}^2] - \frac{\delta_1}{\Omega}[h_{0210}(3h_{0030} + h_{2010}) +$$

$$+h_{1200}(3h_{3000} + h_{1020})] + \frac{2\delta_2}{\Omega^2}(h_{0210}^2 + h_{1200}^2) + \frac{2\delta_1}{\Omega}(h_{1200}h_{0111} - h_{0210}h_{1101}) + O(\varepsilon)$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(3h_{4000} + h_{2020} + 3h_{0040}) - \frac{3\delta_1}{4\Omega}(5h_{3000}^2 + 5h_{0030}^2 + h_{1020}^2 + h_{2010}^2 + 2h_{2010}h_{0030} +$$

$$+2h_{1020}h_{3000}) - \frac{1}{2}\delta_2(h_{2001} + h_{0021})^2 + \frac{\delta_2}{16\Omega^2}[(h_{2100} - h_{0120})^2 + h_{1110}^2] +$$

$$+\frac{\delta_1}{4\Omega}h_{1011}(h_{2100} - h_{0120}) + \frac{\delta_1}{4\Omega}h_{1110}(h_{0021} - h_{2001}) + O(\varepsilon)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00220).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галин Д.М.* Версальные деформации линейных гамильтоновых систем // Тр. Семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во МГУ, 1975. Вып. 1. С. 63–74.
2. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
3. *Сокольский А.Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 1. С. 24–33.
4. *Маркеев А.П., Медведев С.В., Сокольский А.Г.* Методы и алгоритмы нормализации дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МАИ, 1985. 74 с.
5. *Брюно А.Д.* Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990. 295 с.
6. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–263.
7. *Henrard J.* Lyapunov's center theorem for resonant equilibrium // J. Different. Equat. 1973. Vol. 14. No. 3. P. 431–441.
8. *Schmidt D.S.* Periodic solutions near resonant equilibrium of a hamiltonian system // Celestial Mechanics. 1974. Vol. 9. N 1. P. 81–103.
9. *Meyer K.R.* Bibliographe notes on generic bifurcation in Hamiltonian systems // Contemp. Math. 1986. Vol. 56. P. 373–381.
10. *Борн М.* Лекции по атомной механике. Харьков-Киев: Гостехиздат, 1934. 312 с.
11. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
12. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
13. *Нейштадт А.И.* Оценки в теореме Колмогорова о сохранении условно-периодических движений // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1016–1025.
14. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 414 с.
15. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
16. *Джакалья Г.Е.* О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.
17. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.II.1997