МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1998

УДК 531.383

 Р.П. КУЗЬМИНА

ГИРОСКОП И ПОЧТИ РЕГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА КОШИ

Быстрое вращение твердого тела при отсутствии трения (или при наличии малого трения) приводит к решению сингулярных дифференциальных уравнений, которые обычно решаются методом осреднения [1]. В публикуемой работе предлагается иной метод решения: уравнения предварительно приводятся к почти регулярной задаче Коши [2], а далее используется метод, являющийся модификацией метода Пуанкаре для регулярно возмущенных систем.

В качестве примера рассматривается быстрое вращение твердого тела вокруг центра масс при отсутствии момента внешних сил – случай Эйлера. В случае Эйлера задача вращения твердого тела с неподвижной точкой проинтегрирована с помощью эллиптических функций, что не снимает вычислительных трудностей при доведении результата до числа. Поэтому работа может представлять интерес и как иной способ вычисления известных результатов.

1. Построение математической модели. Рассмотрим вращение твердого тела вокруг центра масс при следующих значениях параметров:

$$I_x = 1{,}0006\ \text{кг}\cdot\text{м}^2,\quad I_y = 1{,}0002\ \text{кг}\cdot\text{м}^2,\quad I_z = 1\ \text{кг}\cdot\text{м}^2 \tag{1.1}$$
$$\Psi^\circ = -0{,}8109,\quad \Theta^\circ = -0{,}0269,\quad \Phi^\circ = 0{,}2443$$
$$\Omega_x^\circ = -0{,}0121\ \text{с}^{-1},\quad \Omega_y^\circ = 0{,}0042\ \text{с}^{-1},\quad \Omega_z^\circ = 26{,}6181\ \text{с}^{-1},\quad T_* = 3\ \text{с}$$

Здесь I_x, I_y, I_z – главные центральные моменты инерции твердого тела; $\Psi^\circ, \Theta^\circ, \Phi^\circ$, $\Omega_x^\circ, \Omega_y^\circ, \Omega_z^\circ$ – начальные значения углов Эйлера Ψ, Θ, Φ (в радианах) и проекций Ω_x, Ω_y, Ω_z угловой скорости на главные центральные оси инерции тела; T_* – интервал времени, на котором рассматривается движение.

Вращение твердого тела описывается кинематическими и динамическими уравнениями Эйлера. Перейдем к безразмерным переменным $t, \psi, \theta, \varphi, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ по формулам

$$T = T_*t,\quad \Psi = \Psi_*\Psi,\quad \Theta = \Theta_*\theta,\quad \Phi = \Phi_*\varphi \tag{1.2}$$
$$\Omega_x = \Omega_{x*}\omega_x,\quad \Omega_y = \Omega_{y*}\omega_y,\quad \Omega_z = \Omega_{z*}\omega_z$$
$$\Psi_* = 0{,}82,\quad \Theta_* = 0{,}027,\quad \Phi_* = 0{,}25$$
$$\Omega_{x*} = 0{,}013\ \text{с}^{-1},\quad \Omega_{y*} = 0{,}0043\ \text{с}^{-1},\quad \Omega_{z*} = 27\ \text{с}^{-1}$$

Здесь T – время; $T_*, \Psi_*, \Theta_*, \Phi_*, \Omega_{x*}, \Omega_{y*}, \Omega_{z*}$ – характерные значения соответствующих переменных.

В безразмерных переменных кинематические и динамические уравнения Эйлера имеют вид

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{c_1\omega_x \sin(\Phi_*\varphi) + c_2\omega_y \cos(\Phi_*\varphi)}{\sin(\Theta_*\theta)} \tag{1.3}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = c_3\omega_x \cos(\Phi_*\varphi) - c_4\omega_y \sin(\Phi_*\varphi)$$

$$d\varphi / dt = c_5\omega_x - \operatorname{ctg}(\Theta_*\theta)[c_6\omega_x \sin(\Phi_*\varphi) + c_7\omega_y \cos(\Phi_*\varphi)]$$

$$d\omega_x / dt = c_8\omega_y\omega_z, \quad d\omega_y / dt = -c_9\omega_x\omega_z, \quad d\omega_z / dt = c_{10}\omega_x\omega_y$$

$$c_1 = \frac{\Omega_{x*}T_*}{\Psi_*}, \quad c_2 = \frac{\Omega_{y*}T_*}{\Psi_*}, \quad c_3 = \frac{\Omega_{x*}T_*}{\Theta_*}, \quad c_4 = \frac{\Omega_{y*}T_*}{\Theta_*}$$

$$c_5 = \frac{\Omega_{z*}T_*}{\Phi_*}, \quad c_6 = \frac{\Omega_{x*}T_*}{\Phi_*}, \quad c_7 = \frac{\Omega_{y*}T_*}{\Phi_*}$$

$$c_8 = \frac{(I_y - I_z)\Omega_{y*}\Omega_{z*}T_*}{I_x\Omega_{x*}}, \quad c_9 = \frac{(I_x - I_z)\Omega_{x*}\Omega_{z*}T_*}{I_y\Omega_{y*}}, \quad c_{10} = \frac{(I_x - I_y)\Omega_{x*}\Omega_{y*}T_*}{I_z\Omega_{z*}}$$

Начальные значения безразмерных переменных обозначим соответственно ψ°, θ°, φ°, $\omega_x^\circ, \omega_y^\circ, \omega_z^\circ$.

Для примера примем за малый параметр $\varepsilon = 0{,}1$ и нормализуем постоянные $c_1 - c_{10}$, Θ_*, Φ_* и начальные значения по ε с коэффициентом нормализации $k = 1{,}01$.

Определение. Число $a \neq 0$ называется нормализованным по числу $\varepsilon > 0$ с коэффициентом нормализации $k > 0$, если оно представлено в виде $a = a' \cdot \varepsilon^n$, где n – целое число и $k\varepsilon < |a'| \leqslant k$.

После нормализации постоянные становятся функциями малого параметра

$$c_1 = c_1'\varepsilon, \quad c_2 = c_2'\varepsilon, \quad c_3 = c_3'\varepsilon^{-1}, \quad c_4 = c_4', \quad c_5 = c_5'\varepsilon^{-3} \tag{1.4}$$

$$c_6 = c_6', \quad c_7 = c_7'\varepsilon, \quad c_8 = c_8'\varepsilon^2, \quad c_9 = c_9'$$

$$c_{10} = c_{10}'\varepsilon^8, \quad \Theta_* = \Theta_*'\varepsilon, \quad \Phi_* = \Phi_*'$$

Начальные значения все имеют нулевой порядок по ε: $\psi^\circ = \psi^{\circ\prime}$, ... Малый параметр ε рассматриваем как параметр, не зависящий от t, параметры со штрихами – как постоянные, не зависящие от t, ε.

Уравнения (1.3), (1.4) с начальным условием представляют собой математическую модель поставленной задачи о вращении твердого тела. Таким образом, математической моделью является сингулярно возмущенная задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. θ, φ – быстрые переменные ($d\theta/dt \sim \varepsilon^{-1}$, $d\varphi/dt \sim \varepsilon^{-3}$), остальные переменные медленные. Умножив второе уравнение на ε, третье уравнение на ε^3, получим систему с малыми параметрами при старших производных. Эта система не удовлетворяет известной теореме Тихонова о сингулярных уравнениях.

2. Переход к почти регулярной задаче Коши. Перейдем к новым переменным, в которых поставленная задача является почти регулярной задачей Коши.

Определение [2]. *Задачу*

$$dx / dt = F(x, t, \varepsilon, f, (t, \varepsilon)), \quad x|_{t=0} = 0 \tag{2.1}$$

будем называть почти регулярной задачей Коши, если $F(x, t, \varepsilon, f)$ – гладкая функция на прямом произведении окрестности точки $x = 0$, отрезков $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}$ и ограниченной области D_f; f – гладкая функция на прямом произведении интервалов $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}$ со значениями в области D_f.

Задача (1.3), (1.4) не является почти регулярной задачей Коши. Перейдем к новым переменным. Для удобства рассмотрения переход сделаем в размерных переменных.

Формулы перехода

$$\Psi = \Psi^\circ - \frac{\Omega_x \cos\Phi - \Omega_y \sin\Phi}{\Omega_z^\circ \sin\Theta} + \frac{\Omega_x^\circ \cos\Phi^\circ - \Omega_y^\circ \sin\Phi^\circ}{\Omega_z^\circ \sin\Theta^\circ} + X_1 \tag{2.2}$$

$$\Theta = \Theta^\circ + \frac{\Omega_x^\circ}{\Omega_z^\circ}(\sin g_1 - \sin\Phi^\circ) + \frac{\Omega_y^\circ}{\Omega_z^\circ}(\cos g_1 - \cos\Phi^\circ) + X_2$$

$$\Phi = g_1 + \frac{\operatorname{ctg}\Theta}{\Omega_z^\circ}(\Omega_x \cos\Phi - \Omega_y \sin\Phi) - \frac{\operatorname{ctg}\Theta^\circ}{\Omega_z^\circ}(\Omega_x^\circ \cos\Phi^\circ - \Omega_y^\circ \sin\Phi^\circ) + X_3$$

$$\Omega_x = A\sqrt{\frac{I_y}{I_x - I_z}}\cos g_2, \quad \Omega_y = A\sqrt{\frac{I_x}{I_y - I_z}}\sin g_2, \quad \Omega_z = \Omega_z^\circ + X_5$$

$$g_1 = \Phi^\circ + \Omega_z^\circ T, \quad g_2 = B - \sqrt{\frac{(I_x - I_z)(I_y - I_z)}{I_x I_y}}\,\Omega_z^\circ T + X_4$$

$$A = \sqrt{\frac{I_x - I_z}{I_y}(\Omega_x^\circ)^2 + \frac{I_y - I_z}{I_x}(\Omega_y^\circ)^2}, \quad \cos B = \frac{\Omega_x^\circ}{A}\sqrt{\frac{I_x - I_z}{I_y}}, \quad \sin B = \frac{\Omega_y^\circ}{A}\sqrt{\frac{I_y - I_z}{I_x}}$$

где $X_1 - X_5$ – новые переменные (число переменных уменьшилось с помощью первого интеграла). Перейдем к безразмерным переменным $x_1 - x_5$ по формулам

$$X_i = X_{i*}x_i, \quad X_{j*} = \varepsilon, \quad X_{5*} = \Omega_z^\circ \varepsilon^4 \quad (i = \overline{1,5}, \quad j = \overline{1,4}) \tag{2.3}$$

В новых переменных уравнения движения имеют следующий вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\cos\Theta}{\sin^2\Theta}[(-a_1\cos^2 g_2 + a_2\sin^2 g_2)\cos(2\Phi) + a_3\sin(2g_2)\sin(2\Phi)] + \tag{2.4}$$

$$+\frac{1}{\sin\Theta}[a_4 \sin g_2 \cos\Phi + a_5 \cos g_2 \sin\Phi - x_5(a_6 \cos g_2 \sin\Phi + a_7 \sin g_2 \cos\Phi)]$$

$$dx_2 / dt = a_8(\cos g_2 \cos\Phi - \cos B \cos g_1) - a_9(\sin g_2 \sin\Phi - \sin B \sin g_1)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{\sin^2\Theta}[a_1\cos^2 g_2(\cos^2\Phi - \cos^2\Theta\sin^2\Phi) + a_2\sin^2 g_2(\sin^2\Phi - \cos^2\Theta\cos^2\Phi) -$$

$$-0{,}5a_3\sin(2g_2)\sin(2\Phi)(1+\cos^2\Theta)] - \operatorname{ctg}\Theta(a_4\sin g_2\cos\Phi + a_5\cos g_2\sin\Phi) +$$

$$+a_{10}x_5 + x_5\operatorname{ctg}\Theta(a_6\cos g_2\sin\Phi + a_7\sin g_2\cos\Phi)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = -a_{11}x_5, \quad \frac{dx_5}{dt} = a_{12}\sin(2g_2), \quad x_i\big|_{t=0} = 0 \quad (i = \overline{1,5})$$

$$g_1 = \Phi^\circ + b_1 t, \quad g_2 = B - b_2 t + \varepsilon x_4$$

$$\Theta = \Theta^\circ + \varepsilon x_2 + b_3(\cos g_1 - \cos\Phi^\circ) + b_4(\sin g_1 - \sin\Phi^\circ)$$

$$\Phi = g_1 + \varepsilon x_3 + \operatorname{ctg}\Theta(b_5\cos g_2\cos\Phi - b_6\sin g_2\sin\Phi) -$$

$$-\operatorname{ctg}\Theta^\circ(b_5\cos B\cos\Phi^\circ - b_6\sin B\sin\Phi^\circ)$$

$$a_1 = \frac{10A^2 I_y T_*}{\Omega_z^\circ(I_x - I_z)}, \quad a_2 = \frac{10A^2 I_x T_*}{\Omega_z^\circ(I_y - I_z)}, \quad a_3 = \frac{10A^2 T_*}{q_1 q_2 \Omega_z^\circ}, \quad a_4 = 10AT_* q_2$$

$$a_5 = 10AT_* q_1, \quad a_6 = \frac{AT_*(-I_x + I_y + I_z)}{10^3 I_y q_1}, \quad a_7 = \frac{AT_*(I_x - I_y + I_z)}{10^3 I_x q_2}$$

$$a_8 = \frac{10AT_*}{q_1}, \quad a_9 = \frac{10AT_*}{q_2}, \quad a_{10} = \frac{\Omega_z^\circ T_*}{10^3}, \quad a_{11} = \frac{\Omega_z^\circ T_* q_1 q_2}{10^3}$$

$$a_{12} = \frac{10^4 A^2 T_* (I_x - I_y)}{2 I_z \Omega_z^\circ q_1 q_2}, \quad b_1 = \Omega_z^\circ T_*, \quad b_2 = \Omega_z^\circ T_* q_1 q_2, \quad b_3 = \frac{\Omega_y^\circ}{\Omega_z^\circ}, \quad b_4 = \frac{\Omega_x^\circ}{\Omega_z^\circ}$$

$$b_5 = \frac{A}{\Omega_z^\circ q_1}, \quad b_6 = \frac{A}{\Omega_z^\circ q_2}, \quad q_1 = \sqrt{\frac{I_x - I_z}{I_y}}, \quad q_2 = \sqrt{\frac{I_y - I_z}{I_x}}$$

После нормализации по параметру ε с коэффициентом нормализации $k = 1{,}01$ постоянные становятся функциями от ε:

$$\Phi^\circ = \Phi^{\circ\prime}, \quad \Theta^\circ = \Theta^{\circ\prime}\varepsilon, \quad B = B'\varepsilon^{-1} \tag{2.5}$$

$$a_i = a_i'\varepsilon^3, \quad a_j = a_j'\varepsilon^4, \quad a_k = a_k', \quad a_{10} = a_{10}'\varepsilon$$

$$b_1 = b_1'\varepsilon^{-2}, \quad b_2 = b_2'\varepsilon, \quad b_l = b_l'\varepsilon^3 \quad (i = \overline{1,5}, \ j = 6, 7, 11, 12, \ k = 8, 9, \ l = \overline{3,6})$$

Уравнения (2.4), (2.5) представляют собой почти регулярную задачу Коши для вектора $x = (x_1, ..., x_5)$ с функцией $f = (\cos g_1, \sin g_1, \cos B, \sin B)$. Все переменные медленные ($dx_i/dt \sim \varepsilon$, $dx_j/dt \sim \varepsilon^4$, $i = \overline{1,3}$, $j = 4, 5$).

3. Построение асимптотического решения. Для построения решения задачи (2.4), (2.5) рассматривается задача с двумя малыми параметрами ε и μ [2]:

$$dy / dt = F(y, t, \varepsilon, f(t, \mu)), \quad y|_{t=0} = 0 \tag{3.1}$$

Относительно ε задача (3.1) является регулярно возмущенной задачей Коши. Ее решение строится в виде ряда

$$y(t, \varepsilon, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(t, \mu)\varepsilon^k$$

Соответственно решение задачи (2.4), (2.5) имеет вид

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(t, \varepsilon)\varepsilon^k \tag{3.2}$$

Приведем результаты вычислений

$$x_1 = O(\varepsilon^2), \quad x_2 = O(\varepsilon^3), \quad x_3 = O(\varepsilon^2)$$

$$x_4 = -\tfrac{1}{2} a_{11}' a_{12}' \varepsilon^8 \sin(2B) t^2 + O(\varepsilon^9), \quad x_5 = a_{12}'\varepsilon^4 \sin(2B) t + O(\varepsilon^5)$$

Используя формулы (2.2), (2.3), получим приближенное решение задачи в исходных переменных

$$\Psi = \tilde{\Psi} + O(\varepsilon^3), \quad \Theta = \tilde{\Theta} + O(\varepsilon^4), \quad \Phi = \tilde{\Phi} + O(\varepsilon^3) \tag{3.3}$$

$$\Omega_x = \tilde{\Omega}_x + \Omega_x^\circ O(\varepsilon^{12}), \quad \Omega_y = \tilde{\Omega}_y + \Omega_z^\circ O(\varepsilon^{12}), \quad \Omega_z = \tilde{\Omega}_z + \Omega_z^\circ O(\varepsilon^9)$$

$$\tilde{\Psi} = \Psi^\circ - \frac{\Omega_x^\circ}{\Theta^\circ \Omega_z^\circ}(\cos g_1 - \cos\Phi^\circ) + \frac{\Omega_y^\circ}{\Theta^\circ \Omega_z^\circ}(\sin g_1 - \sin\Phi^\circ)$$

$$\tilde{\Theta} = \Theta^\circ + \frac{\Omega_x^\circ}{\Omega_z^\circ}(\sin g_1 - \sin\Phi^\circ) + \frac{\Omega_y^\circ}{\Omega_z^\circ}(\cos g_1 - \cos\Phi^\circ)$$

$$\tilde{\Phi} = g_1 + \frac{\Omega_x^\circ}{\Theta^\circ \Omega_z^\circ}(\cos g_1 - \cos\Phi^\circ) - \frac{\Omega_y^\circ}{\Theta^\circ \Omega_z^\circ}(\sin g_1 - \sin\Phi^\circ)$$

$$\tilde{\Omega}_x = \frac{\Omega_x^\circ}{\cos B}\cos\tilde{g}_2, \quad \tilde{\Omega}_y = \frac{\Omega_y^\circ}{\sin B}\sin\tilde{g}_2$$

$$\tilde{\Omega}_z = \Omega_z^\circ + \frac{(I_x - I_y)\Omega_x^\circ\Omega_y^\circ}{I_z}T, \quad \tilde{g}_2 = B - \sqrt{\frac{(I_x - I_z)(I_y - I_z)}{I_x I_y}}\,\Omega_z^\circ T$$

Для более точного решения задачи нужно проинтегрировать большее число слагаемых в уравнениях (2.4), чем это сделано.

4. Применение теорем о почти регулярной задаче Коши. Задача (2.4), (2.5) удовлетворяет условиям теорем 1, 5 и не удовлетворяет условиям теорем 2–4, 6–8 из [2]. Приведем утверждения, следующие из теорем 1, 5.

Для любых $\bar{t} > 0$, $n \geqslant 0$ найдутся постоянные $\varepsilon_* > 0$, C_*, не зависящие от t, ε, зависящие от $\bar{t}, n$ и такие, что на множестве $0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$: *a*) решение задачи (2.4), (2.5) существует, единственно и удовлетворяет неравенству $\| x(t,\varepsilon) - x^{(n)}(t,\varepsilon) \| \leqslant \leqslant C_* t\varepsilon^{n+1}$; *b*) ряд (3.2) сходится равномерно к решению задачи (2.4), (2.5). Здесь $x^{(n)}(t,\varepsilon)$ – частичная сумма ряда (3.2) (k меняется от 0 до n), $x^{(0)}(t,\varepsilon) = y^{(0)}(t,\varepsilon) = 0$.

В рассматриваемой задаче ε – число ($\varepsilon = 0,1$), поэтому приведенные утверждения теорем носят лишь утешительный характер.

Задача (2.4), (2.5) удовлетворяет условиям теоремы 9 из [2] при $\bar{\varepsilon} > 0{,}1$. Из теоремы 9 следует: существует такая постоянная $t_* > 0$, что на множестве $0 \leqslant t \leqslant t_*$ при $\varepsilon = 0{,}1$: *a*) решение задачи (2.4), (2.5) существует и единственно; *b*) ряд (3.2) сходится равномерно к решению этой задачи.

5. О точности асимптотического решения. Оценку точности асимптотического решения задачи (9)–(11) можно получить, используя алгоритм доказательства теоремы 2.1 из работы [3]. Приведем результаты исследования.

Пусть $\delta_1^{(n)}, \delta_3^{(n)}, \delta_4^{(n)}, \delta_5^{(n)}, t^{(n)}$ – произвольные положительные числа, а при $\delta_2 = \delta_2^{(n)}$ выполняются неравенства

$$0 < \delta_2 < \bar{\delta}_2 = \varepsilon^{-1}\min(\Theta_* - \Theta_{**},\ \pi + \Theta_* + \Theta_{**}) \tag{5.1}$$

$$\Theta_* = -\operatorname{arctg}\sqrt{\tfrac{1}{2}[b_5^2 + b_6^2 + (b_5^2 - b_6^2)w_1]} - \sqrt{b_3^2 + b_4^2}$$

$$\Theta_{**} = \Theta^\circ - b_3\cos\Phi^\circ - b_4\sin\Phi^\circ, \quad w_1 = \min_{\alpha\in D_1}\cos\alpha$$

$$D_1 = \{\alpha : 2(B - b_2 t^{(n)} - \varepsilon\delta_4) \leqslant \alpha \leqslant 2(B + \varepsilon\delta_4)\}$$

Пусть $t_*^{(n)}$ – максимальное значение t, удовлетворяющее неравенствам

$$G_i(\delta^{(n)}, t^{(n)})t \leqslant \delta_i^{(n)}; \quad G_{21}(\delta^{(n)}, t^{(n)})t^2 + G_{22}(\delta^{(n)}, t^{(n)})t \leqslant \delta_2^{(n)} \tag{5.2}$$

$$t \leqslant t^{(n)} \quad (i = 1, \overline{3,5})$$

$$G_1(\delta, t) = Q_1 W_1 + Q_2 W_2 + \delta_5 Q_2 W_3, \quad G_{21}(\delta, t) = 0{,}5|\,b_2\,|\,W_4$$

$$G_{22}(\delta, t) = \varepsilon\delta_4 W_4 + \sqrt{(a_8^2 - a_9^2)w_3^2 + a_9^2}\,[\varepsilon\delta_3 + Q_3\sqrt{(b_5^2 - b_6^2)w_3^2 + b_6^2} +$$

$$+ |\operatorname{ctg}\Theta^\circ(b_4\cos\Phi^\circ - b_3\sin\Phi^\circ)|\,]$$

$$G_3(\delta, t) = 0{,}5|(a_1 - a_2)w_3^2 + a_2| + (Q_4 - 0{,}5)W_1 + Q_3 W_2 + |\,a_{10}\,|\,\delta_5 + \delta_5 Q_3 W_3$$

$$G_4(\delta, t) = |\,a_{11}\,|\,\delta_5, \quad G_5(\delta, t) = |\,a_{12}\,|\,w_4$$

$$Q_1 = \max_{\Theta_1\leqslant\Theta\leqslant\Theta_2}\left|\frac{\cos\Theta}{\sin^2\Theta}\right|, \quad Q_2 = \max_{\Theta_1\leqslant\Theta\leqslant\Theta_2}\left|\frac{1}{\sin\Theta}\right|, \quad Q_3 = \max_{\Theta_1\leqslant\Theta\leqslant\Theta_2}|\operatorname{ctg}\Theta|,$$

$$Q_4 = \max_{\Theta_1 \leqslant \Theta \leqslant \Theta_2} \frac{1}{\sin^2 \Theta}$$

$$W_1 = [0,25(a_1 + a_2)^2 - a_3^2]w_1^2 + 0,5(a_1^2 - a_2^2)w_1 + 0,25(a_1 - a_2)^2 + a_3^2]^{1/2}$$

$$W_2 = \sqrt{(a_5^2 - a_4^2)w_2^2 + a_4^2}, \quad W_3 = \sqrt{(a_6^2 - a_7^2)w_3^2 + a_7^2}, \quad W_4 = \sqrt{(a_9^2 - a_8^2)w_2^2 + a_8^2}$$

$$\Theta_1 = \Theta^\circ - \varepsilon\delta_2 - \sqrt{b_3^2 + b_4^2} - b_3 \cos\Phi^\circ - b_4 \sin\Phi^\circ$$

$$\Theta_2 = \Theta^\circ + \varepsilon\delta_2 + \sqrt{b_3^2 + b_4^2} - b_3 \cos\Phi^\circ - b_4 \sin\Phi^\circ$$

$$w_2 = \max_{\alpha \in D_2} |\cos\alpha|, \quad w_3 = \min_{\alpha \in D_2} |\cos\alpha|, \quad w_4 = \max_{\alpha \in D_1} |\sin\alpha|$$

$$D_2 = \{\alpha : B - b_2 t - \varepsilon\delta_4 \leqslant \alpha \leqslant B + \varepsilon\delta_4\}$$

Справедливо утверждение: задача (2.4), (2.5) имеет решение на отрезке $0 \leqslant t \leqslant$ $\leqslant t_*^{(n)}$, это решение единственно, аналитично по t и удовлетворяет неравенствам

$$|x_i(t)| \leqslant \delta_{i*}^{(n)}, \quad \delta_{j*}^{(n)} = G_j(\delta^{(n)}, t^{(n)}) t_*^{(n)} \tag{5.3}$$

$$\delta_{2*}^{(n)} = G_{21}(\delta^{(n)}, t^{(n)})[t_*^{(n)}]^2 + G_{22}(\delta^{(n)}, t^{(n)}) t_*^{(n)} \quad (i = \overline{1,5}, \ j = 1, \overline{3,5})$$

Система (5.2), (5.3) решалась численно относительно чисел $t_*^{(n)}, \delta_{1*}^{(n)}, \ldots, \delta_{5*}^{(n)}$. При этом использовались следующие значения и формулы:

$$t^{(0)} = 10, \quad \delta_j^{(0)} = 10, \quad \delta_2^{(0)} = 0,999\bar{\delta}_2, \quad t^{(n+1)} = 0,9t^{(n)} + 0,1t_*^{(n)} \tag{5.4}$$

$$\delta_i^{(n+1)} = 0,5[\delta_i^{(n)} + \delta_{i*}^{(n)}], \quad (i = \overline{1,5}, \ j = 1, \overline{3,5}, \ n = \overline{0,100})$$

Кроме того, оценивалась точность асимптотического решения задачи на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ по формулам

$$|x_i(t)| \leqslant \delta_{i**}^{(n)}, \quad \delta_{j**}^{(n)} = G_j(\delta^{(n)}, t^{(n)}) t_{**}^{(n)}, \quad \delta_{2**}^{(n)} = G_{21}(\delta^{(n)}, t^{(n)})[t_{**}^{(n)}]^2 + G_{22}(\delta^{(n)}, t^{(n)}) t_{**}^{(n)}$$

$$t^{(0)} = 10, \quad \delta_j^{(0)} = 10, \quad \delta_2^{(0)} = 0,999\bar{\delta}_2, \quad t_{**}^{(n)} = \min(1, t^{(n)}), \quad t^{(n+1)} = 0,9t^{(n)} + 0,1t_{**}^{(n)}$$

$$\delta_i^{(n+1)} = 0,5[\delta_i^{(n)} + \delta_{i**}^{(n)}] \quad (i = \overline{1,5}, \ j = 1, \overline{3,5}, \ n = \overline{0,200})$$

Вычисления показали, что при $n \geqslant 5$ $t_{**}^{(n)} = 1$. Приведем результаты вычислений.
Решение задачи (2.4), (2.5) существует, по крайней мере, на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1,397$.
На отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ справедливы неравенства

$$|x_1| < 0,380, \quad |x_2| < 0,039, \quad |x_3| < 0,380, \quad |x_4| < 0,717 \cdot 10^{-9}, \quad |x_5| < 0,260 \cdot 10^{-4}$$

Используя формулы (2.2), (2.3), можно получить следующие результаты для исходных переменных.

6. Результаты. *1*. Решение задачи существует, по крайней мере, на отрезке $0 \leqslant$ $\leqslant T \leqslant 4,191$ с.

2. На отрезке $0 \leqslant T \leqslant 3$ с справедливы неравенства

$$|\Psi - \tilde{\Psi}| < 0,0449, \quad |\Theta - \tilde{\Theta}| < 0,0039, \quad |\Phi - \tilde{\Phi}| < 0,0450$$

$$|\Omega_x - \tilde{\Omega}_x| < 0,885 \cdot 10^{-12} \text{ с}^{-1}, \quad |\Omega_y - \tilde{\Omega}_y| < 0,154 \cdot 10^{-11} \text{ с}^{-1}$$

$$|\Omega_z - \tilde{\Omega}_z| < 0,155 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$$

где $\tilde{\Psi}, \tilde{\Theta}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Omega}_x, \tilde{\Omega}_y, \tilde{\Omega}_z$ – функции (3.3).

7. Замечания. *a*). Из формул (1.3) следует, что в переменных ψ, θ, φ, ω_x, ω_y, ω_z задача о вращении твердого тела вокруг центра масс является сингулярной из-за большого интервала времени ($0 \leqslant T \leqslant T_* = 3$ с). Если движение твердого тела рассматривать на интервале $0 \leqslant T \leqslant T_{*1} \approx 0{,}0094$ с, то предлагаемый метод введения малого параметра приводит к регулярно возмущенной задаче Коши, которая может быть решена методом малого параметра Пуанкаре.

b). Выбор характерных значений (1.2) означает переход к рассмотрению класса движений в окрестности начальной точки (1.1). Далее оказывается, что такие движения описываются сингулярными уравнениями (1.3), (1.4), и характер сингулярности таков, что в пространстве исходных переменных точка быстро выходит из окрестности начального положения. Однако рассмотрение выделенного в *п*. 1 класса движений оказывается не бесполезным, так как с помощью сингулярных уравнений (1.3), (1.4) далее находится замена переменных (2.2), (2.3), которая означает переход в пространстве исходных переменных к рассмотрению окрестности движущейся точки.

В пространстве новых переменных $x_1 - x_5$ точка не покидает окрестности нуля на конечном интервале времени, так как новые переменные являются решением почти регулярной задачи Коши (2.4), (2.5).

c). Формулы перехода к новым переменным (2.2) получены с помощью интегрирования по частям правых частей уравнений (1.3). Например, из первого уравнения (1.3) следуют формулы

$$\psi = \psi^\circ + \int_0^t \frac{c_1\omega_x \sin(\Phi_*\varphi) + c_2\omega_y \cos(\Phi_*\varphi)}{\sin(\Theta_*\theta)}\,dt = \tag{7.1}$$

$$= \psi^\circ - \left.\frac{c_1\omega_x \cos(\Phi_*\varphi) - c_2\omega_y \sin(\Phi_*\varphi)}{\sin(\Theta_*\theta)\Phi_* d\varphi / dt}\right|_0^t +$$

$$+ \int_0^t \left\{ \frac{c_1}{\Phi_*}\cos(\Phi_*\varphi)\frac{d}{dt}\left[\frac{\omega_x}{\sin(\Theta_*\theta)d\varphi / dt}\right] - \frac{c_2}{\Phi_*}\sin(\Phi_*\varphi)\frac{d}{dt}\left[\frac{\omega_y}{\sin(\Theta_*\theta)d\varphi / dt}\right]\right\} dt$$

Продифференцировав функции в силу уравнений (1.3), можно убедиться в малости (по модулю) интеграла при малых значениях $\varepsilon > 0$. Кроме того, из уравнений (1.3) видно, что ω_z – медленно меняющаяся переменная, а главный член в уравнении для $d\varphi/dt$ – первый ($c_5\omega_z$). Эти обстоятельства позволяют выделить в (7.1) быстро меняющуюся составляющую и получить формулу (2.2) для Ψ. В формуле учтено также, что новая переменная X_1 должна иметь нулевое начальное значение, чтобы можно было использовать теоремы из [2].

Аналогично получены формулы (2.2) для других переменных.

Отметим, что в (7.1) фактически интегрируются по частям произведения быстро осциллирующих гармонических функций на медленно меняющиеся функции.

d). Параметры (1.1) соответствуют параметрам и положению Луны на 10 марта 1990 г. (пересчет в соответствии с теорией размерности). Для Луны

$$I_x = 0{,}88836978 \cdot 10^{35}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_y = 0{,}88800195 \cdot 10^{35}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2 \tag{7.2}$$

$$I_z = 0{,}88781798 \cdot 10^{35}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2, \quad \Psi^\circ = -0{,}8109, \quad \Theta^\circ = -0{,}0269, \quad \Phi^\circ = 0{,}2443$$

$$\Omega_x^\circ = -0{,}121 \cdot 10^{-8}\ \text{с}^{-1}, \quad \Omega_y^\circ = 0{,}423 \cdot 10^{-9}\ \text{с}^{-1}, \quad \Omega_z^\circ = 0{,}266 \cdot 10^{-5}\ \text{с}^{-1}$$

$$T_* = 3 \cdot 10^7\ \text{с} = 347{,}22\ \text{суток}, \quad T_{*1} = 1{,}08\ \text{суток}$$

T_{*1} – интервал времени, на котором в переменных ψ, θ, φ, ω_x, ω_y, ω_z задача является регулярно возмущенной.

Таким образом, рассматриваемая задача о вращении твердого тела является задачей о вращении Луны на интервале времени порядка одного года в приближенной физической постановке, когда не учитывается момент сил, действующих на Луну со стороны небесных тел.

Делая пересчет численных значений *п*. 6 в соответствии с теорией размерности, получим следующие результаты.

1. Решение задачи о движении Луны существует, по крайней мере, на отрезке $0 \leqslant T \leqslant 485$ суток.

2. На отрезке $0 \leqslant T \leqslant 347$ суток справедливы следующие неравенства для углов Эйлера и проекций угловой скорости Луны:

$$|\Psi-\tilde{\Psi}|<0{,}0449, \quad |\Theta-\tilde{\Theta}|<0{,}0039, \quad |\Phi-\tilde{\Phi}|<0{,}0450$$

$$|\Omega_x-\tilde{\Omega}_x|<0{,}885\cdot 10^{-19}\ \text{c}^{-1}, \quad |\Omega_y-\tilde{\Omega}_y|<0{,}154\cdot 10^{-18}\ \text{c}^{-1}$$

$$|\Omega_z-\tilde{\Omega}_z|<0{,}155\cdot 10^{-13}\ \text{c}^{-1}$$

$\tilde{\Psi}, \tilde{\Theta}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Omega}_x, \tilde{\Omega}_y, \tilde{\Omega}_z$ – функции (3.3).

е). Известно, что решение задачи Эйлера – Пуансо существует при $t \geqslant 0$, так как движение систем, траектории которых лежат в компактных областях фазового пространства, существует на всей оси времени. Поэтому результат 1 нужно рассматривать как демонстрацию возможностей предложенного метода решения.

Благодарю проф. И.В. Новожилова за ценные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00219).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кобрин А.И., Мартыненко Ю.Г., Новожилов И.В.* О прецессионных уравнениях гироскопических систем // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 231–237.
2. *Кузьмина Р.П.* О почти регулярной задаче Коши // Успехи математических наук. 1995. Т. 50. Вып. 4. С. 161–162.
3. *Кузьмина Р.П.* Метод малого параметра в регулярно возмущенной задаче Коши. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. 86 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.XI.1996