

УДК 531.383

© 1998 г. А.А. КИРЕЕНКОВ

РАСЧЕТ СПЕКТРА ПОЛУСФЕРЫ НА НОЖКЕ

Разработан метод, позволяющий в Рэлеевском приближении определять собственные частоты колебаний полусферической оболочки, жестко закрепленной на упругой ножке. Метод основывается на сведении задачи для полной системы к уже решенным более простым задачам о колебаниях упругого стержня и колебаниях тонкой упругой полусферической оболочки. В рассматриваемой постановке задачи, в качестве параметров, характеризующих оболочку выступает только один – собственная частота колебаний полусферы, жестко закрепленной в полюсе, что соответствует абсолютно жесткому стержню. В результате такого подхода удалось получить явные формулы для собственных частот колебаний полусферы на ножке в зависимости от жесткости стержня и расположения полусферы на нем. Показано, что взаимодействие колебаний стержня и полусферы имеет место только для первой формы колебаний полусферы, которая определяет колебания полусферы как твердого тела. В результате такого взаимодействия происходит расщепление частот. Рассмотренная модель является основной расчетной схемой волнового твердотельного гироскопа (ВТГ). Разработанный метод позволяет в дальнейшем исследовать широкий круг задач, связанный с данной моделью.

1. Основная расчетная схема и уравнения движения. Основным предметом анализа будет являться тонкая упругая полусферическая оболочка на ножке, причем считается что ножка и полусфера составляют единое целое и один конец ножки жестко закреплен. Будем рассматривать два случая расположения оболочки на ножке: незакрепленный конец ножки плавно переходит в оболочку – первый случай (фиг. 1, а) и второй случай – оба конца ножки жестко закреплены, а оболочка плавно переходит в ножку недалеко от одного из закрепленных краев (фиг. 1, в).

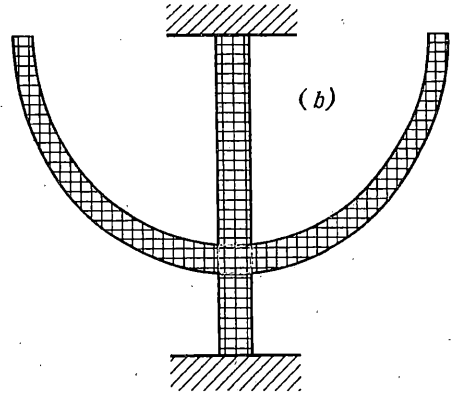
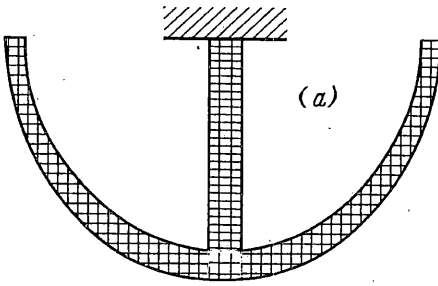
Подобная конструкция может быть представлена в виде двух подсистем: тонкого упругого стержня с грузом на свободном конце и тонкой упругой полусферической оболочки, один край которой свободен от усилий и моментов, а другой жестко закреплен, в первом случае, и тонкого упругого стержня с закрепленными концами и полусферической оболочки, один край которой свободен от усилий и моментов, а другой свободен от усилий и моментов во втором случае.

Способ составления уравнений движения таких систем для обоих случаев не имеет принципиальных отличий, а сами уравнения, имея одинаковую структуру, будут отличаться только количественными характеристиками входящих в них параметров.

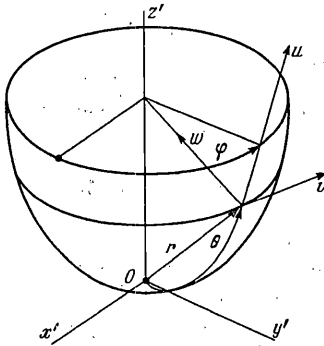
Функция Лагранжа такой системы есть сумма лагранжианов стержня и полусферы.

Деформацию полусферы радиуса R будем описывать в системе координат $\{x', y' z'\}$, жестко связанной с концом стержня. Точка на полусфере с координатами ϑ, φ , в так выбранной системе координат имеет, в проекциях на локальный трехгранник, относительную скорость $\{\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}\}$ (фиг. 2), где u, v, w – компоненты вектора перемещений срединной поверхности оболочки.

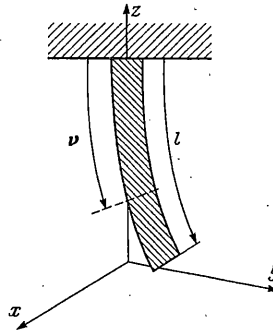
Пусть система координат $\{x', y' z'\}$ движется, имея V – скорость точки O и угловую скорость ω_{Γ} . Эти характеристики определяются движением поперечного сечения стержня, в месте расположения на нем полусферы. Если $x(t, v), y(t, v)$ – перемещения



Фиг. 1а, б



Фиг. 2



Фиг. 3

точки стержня с номером v , а s – расстояние от закрепленного конца стержня до полюса полусферы (фиг. 3), то

$$\mathbf{V} = \{\dot{x}(t, s), \dot{y}(t, s), 0\}$$

$$\omega_{tr} = \{\partial \dot{y} / \partial v, -\partial \dot{x} / \partial v, 0\} \equiv \{\dot{y}'(t, s), -\dot{x}'(t, s), 0\} \quad (1.1)$$

где штрих обозначает дифференцирование по независимой переменной v .

Связь трехгранников $\{x', y', z'\}$ и $\{u, v, w\}$ дается с помощью ортогональных матриц A и Φ :

$$\Theta = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{vmatrix}, \quad \Phi = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Матрица Φ описывает поворот вокруг оси z' на угол φ , а матрица A – поворот вокруг оси y' на угол ϑ (фиг. 4). Матрица перехода от системы координат $\{u, v, w\}$ получается перемножением этих матриц, что соответствует сложению поворотов

$$\Theta\Phi = \begin{vmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\sin \vartheta \cos \varphi & -\sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \end{vmatrix}$$

Относительная скорость в проекциях на $\{x', y', z'\}$, следовательно, имеет вид

$$\mathbf{V}_{rel} = A\Phi \begin{vmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{u} \cos \vartheta \cos \varphi - \dot{v} \sin \varphi - \dot{w} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \dot{u} \cos \vartheta \sin \varphi + \dot{v} \cos \varphi - \dot{w} \sin \vartheta \sin \varphi \\ \dot{u} \sin \vartheta + \dot{w} \cos \vartheta \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

Переносная скорость в рассматриваемой точке, с радиусом-вектором

$$\mathbf{r} = R \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ 1 - \cos \vartheta \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

определяется по формуле

$$\mathbf{V}_{tr} = \mathbf{V} + \omega_{tr} \times \mathbf{r} \quad (1.4)$$

Подстановка в (1.4) выражений для \mathbf{V} и ω_{tr} из (1.1) и для \mathbf{r} из (1.3) дает после вычисления векторного произведения

$$\mathbf{V}_{tr} = \begin{vmatrix} \dot{x}(t,s) - \dot{x}'(t,s)R(1 - \cos \vartheta) \\ \dot{y}(t,s) - \dot{y}'(t,s)R(1 - \cos \vartheta) \\ R \sin \vartheta (\dot{x}'(t,s) \cos \varphi + \dot{y}'(t,s) \sin \varphi) \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

Абсолютная скорость точки на полусфере с радиусом-вектором \mathbf{r} дается формулой

$$\mathbf{V}_{abs} = \mathbf{V}_{tr} + \mathbf{V}_{rel}$$

в которой \mathbf{V}_{tr} и \mathbf{V}_{rel} определяются по формулам (1.2) и (1.5) соответственно. Подставляя соответствующие выражения получаем

$$\mathbf{V}_{abs} = \begin{vmatrix} \dot{u} \cos \vartheta \cos \varphi - \dot{v} \sin \vartheta - \dot{w} \sin \vartheta \cos \varphi + \dot{x}(t,s) - \dot{x}'(t,s)R(1 - \cos \vartheta) \\ \dot{u} \cos \vartheta \sin \varphi + \dot{v} \cos \vartheta - \dot{w} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{y}(t,s) - \dot{y}'(t,s)R(1 - \cos \vartheta) \\ \dot{u} \sin \vartheta + \dot{w} \cos \vartheta + R \sin \vartheta (\dot{x}'(t,s) \cos \varphi + \dot{y}'(t,s) \sin \varphi) \end{vmatrix} \quad (1.6)$$

Функцию Лагранжа нашей системы определяется так

$$L = L_{rod} + T - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Pi d\varphi d\vartheta \quad (1.7)$$

где L_{rod} есть лагранжиан стержня длины l [1]:

$$L_{rod} = \int_0^l \left[\frac{p_1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{EJ}{2} (x''^2 + y''^2) \right] dv \quad (1.8)$$

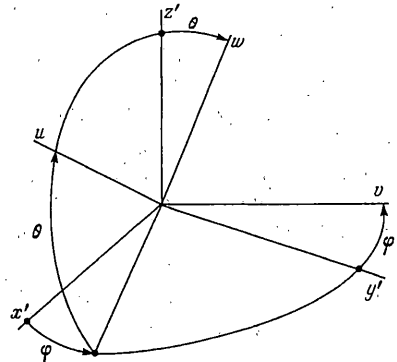
T – кинетической энергии полусферы

$$T = \frac{p_2 R^2}{2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} V_{abs}^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \quad (1.9)$$

где p_1, p_2 – линейная и поверхностная плотность материала стержня и полусферы соответственно, а Π – квадратичный функционал линейной теории упругости.

Для получения уравнений движения перейдем от рассмотрения непрерывной модели к дискретной. Для этого будем искать решения в виде рядов по собственным формам колебаний каждой отдельно взятой подсистемы, которые следует подставить в лагранжиан (1.7). Именно такой подход, дает возможность существенно упростить чрезвычайно трудную задачу нахождения собственных форм колебаний полной системы, сведя ее к изучению взаимодействия форм колебаний хорошо исследованных, значительно более простых подсистем.

Наибольший интерес представляет изучение взаимодействия первой формы изгибных коле-



Фиг. 4

баний ножки с низшими формами изгибных колебаний оболочки. Кроме того, исследуемая в данной работе модель является основной расчетной схемой волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) [2], в котором ножку стараются сделать максимально жесткой, и, поэтому, других форм просто не может возникнуть.

Так как, основной целью проводимого исследования является изучение частотных свойств системы, то будут использоваться приближенные выражения для первых форм колебаний ножки. Известно, что первая форма изгибных колебаний упругого стержня длины l , один конец которого закреплен, а другой либо тоже закреплен, либо свободен, имеет с точностью 4% вид [1] $1 - \cos(\pi v / 2l)$. На основании этой формулы получаем следующие представления для смещения точки стержня с номером v :

$$x = (1 - \cos(\pi v / 2l))q_1(t), \quad y = (1 - \cos(\pi v / 2l))q_2(t) \quad (1.10)$$

в которых $q_1(t)$ и $q_2(t)$ имеют смысл новых обобщенных координат стержня. Подстановка равенств (1.10) в (1.8) дает дискретную функцию Лагранжа стержня

$$L_{\text{rod}} = p_1 l \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{\pi} \right) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{\pi^4 EJ}{64l^3} (q_1^2 + q_2^2) \quad (1.11)$$

Переменные u, v, w описывающие деформацию оболочки представим в виде рядов по собственным формам колебаний полусферы один край которой жестко закреплен, а другой свободен от усилий и моментов

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^{\infty} U_k(\vartheta)(g_{ck}(t) \cos k\varphi + g_{sk}(t) \sin k\varphi) \\ v &= \sum_{k=1}^{\infty} V_k(\vartheta)(g_{ck}(t) \sin k\varphi - g_{sk}(t) \cos k\varphi) \\ w &= \sum_{k=1}^{\infty} W_k(\vartheta)(g_{ck}(t) \cos k\varphi + g_{sk}(t) \sin k\varphi) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Подстановка рядов (1.12) в выражение для кинетической энергии полусферы, в котором V_{abs} – квадрат скорости абсолютного движения определяемой по формуле (1.6), строго обосновывает интуитивно очевидный факт, что первая форма колебаний стержня взаимодействует только с первой формой колебаний полусферы. Таким образом, в рядах (1.12) остается только первый член, соответствующий колебаниям полусферы как твердого тела, с одной неподвижной точкой. Известно, что первая форма колебаний полусферической оболочки имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} u &= (1 - \cos \vartheta)(g_{c1}(t) \cos \varphi + g_{s1}(t) \sin \varphi) \\ v &= (1 - \cos \vartheta)(g_{c1}(t) \sin \varphi - g_{s1}(t) \cos \varphi) \\ w &= \sin \vartheta(g_{c1}(t) \cos \varphi + g_{s1}(t) \sin \varphi) \end{aligned} \quad (1.13)$$

где g_{c1} и g_{s1} имеют смысл новых обобщенных координат, в конфигурационном пространстве первой формы колебаний полусферы.

Вычисление соответствующих интегралов в (1.9), после подстановки в них равенств (1.13), дает выражение для кинетической энергии полусферы в первом случае, когда незакрепленный конец стержня плавно переходит в оболочку (фиг. 1, а):

$$T = \pi p_2 R^2 \left(\left(1 + \frac{\pi^2 R^2}{6l^2} - \frac{\pi R}{2l} \right) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{2}{3} (\dot{g}_{c1}^2 + \dot{g}_{s1}^2) + \left(\frac{2\pi R}{3l} - 1 \right) (\dot{q}_1 \dot{g}_{c1} + \dot{q}_2 \dot{g}_{s1}) \right) \quad (1.14)$$

и во втором случае, когда полусфера расположена на стержне с двумя закрепленными

концами (Фиг. 1.б)

$$T = \pi p_2 R^2 \left(\left(\frac{\pi^2 R^2}{6l^2} \sin^2 \frac{\pi s}{2l} + 4 \sin^4 \frac{\pi s}{4l} - \frac{\pi R}{l} \sin \frac{\pi s}{2l} \sin^2 \frac{\pi s}{4l} \right) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{2}{3} (\dot{g}_{c1}^2 + \dot{g}_{s1}^2) + \left(\frac{2\pi R}{3l} - 2 \sin^2 \frac{\pi s}{4l} \right) (\dot{q}_1 \dot{g}_{c1} + \dot{q}_2 \dot{g}_{s1}) \right) \quad (1.15)$$

Если в (1.15) положить $s = l$ то, как и следовало ожидать, получим (1.14). Общий множитель $\pi p_2 R^2$ имеет смысл массы оболочки.

Для получения функции Лагранжа всей системы необходимо подставить формы (1.13) в квадратичный функционал линейной теории упругости П. Но, так как нас интересуют только спектральные характеристики системы, то явный вид П не представляет интереса (он необходим только при решении задачи нахождения форм колебаний полной системы).

Существенна только независимость П от производных обобщенных координат g_{c1} и g_{s1} и то, что в нем не применяется дифференцирование по времени [4]. Таким образом, после подстановки равенств (1.13) в П и вычисления соответствующих интегралов получаем потенциальную энергию первой формы колебаний полусферы

$$\tilde{\Pi} = \frac{1}{2} C (q_1^2 + q_2^2) \quad (1.16)$$

где C константа – результат интегрирования функционала П. Именно в C содержится вся информация об упругих свойствах полусферы.

Подстановка выражений (1.14)–(1.16) в (1.7) дает дискретную функцию Лагранжа всей системы, уравнения движения которой есть обычные уравнения Лагранжа. Применяя стандартную процедуру получаем систему уравнений, описывающую взаимодействие первой формы колебаний стержня с первой формой колебаний полусферы

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{g}_{c1} + b_1 q_1 &= 0, & a_{12} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{g}_{c1} + C g_{c1} &= 0 \\ a_{11} \ddot{q}_2 + a_{12} \ddot{g}_{s1} + b_1 q_2 &= 0, & a_{12} \ddot{q}_2 + a_{22} \ddot{g}_{s1} + C g_{s1} &= 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

где $b_1 \equiv \pi^4 EJ / 32l^3$, а коэффициенты матрицы кинетической энергии определяются для случая, когда полусфера находится на конце ножки по формулам

$$a_{11} = \pi p_2 R^2 \left(2 - \frac{\pi R}{l} + \frac{\pi^2 R^2}{3l^2} \right) + p_1 l \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \quad (1.18)$$

$$a_{12} = \pi p_2 R^2 \left(\frac{2\pi R}{3l} - 1 \right), \quad a_{22} = \frac{4}{3} \pi p_2 R^2$$

и для случая, когда оба конца ножки закреплены, а полусфера находится на расстоянии s от одного из концов по формулам

$$\begin{aligned} a_{11} &= p_1 l \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) + \pi p_2 R^2 \left(\frac{\pi^2 R^2}{3l^2} \sin^2 \frac{\pi s}{2l} + 8 \sin^4 \frac{\pi s}{4l} - \frac{2\pi R}{l} \sin \frac{\pi s}{2l} \sin^2 \frac{\pi s}{4l} \right) \\ a_{12} &= \pi p_2 R^2 \left(\frac{2\pi R}{3l} - 2 \sin^2 \frac{\pi s}{4l} \right), \quad a_{22} = \frac{4}{3} \pi p_2 R^2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Из-за симметрии исследуемой системы, система уравнений (1.17) распалась на две одинаковые независимые подсистемы. Поэтому дальше будут изучаться только первые два уравнения (1.17).

2. Собственные частоты колебаний. Собственные частоты колебаний полусферы

на ножке по первой форме определяются из первых двух уравнений (1.17):

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{g}_{c1} + b_1q_1 = 0, \quad a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{g}_{c1} + Cg_{c1} = 0. \quad (2.1)$$

коэффициенты которых вычисляются по формулам (1.18) для полусферы расположенной на конце ножки и по формулам (1.19) для полусферы на ножке, оба конца которой закреплены.

Система уравнений (2.1) содержит один неизвестный параметр C . Для его нахождения предположим, что ножка неподвижна. Это предположение соответствует абсолютно жесткому стержню (именно это стараются достичь при изготовлении ВТГ). При сделанном предположении $\ddot{q}_1 \equiv 0$ и система уравнений (2.1) приобретает вид

$$a_{22}\ddot{g}_{c1} + Cg_{c1} = 0 \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) есть уравнение колебаний полусферы со свободным краем, жестко закрепленной в полюсе. На основании этого факта можно сделать вывод, что отношение C/a_{22} есть квадрат собственной частоты колебаний ω_1 полусферы по первой форме с указанными выше краевыми условиями. Итак

$$C/a_{22} \equiv \omega_1^2 \Rightarrow C = a_{22}\omega_1^2$$

Таким образом система уравнений (2.1) приобретает вид

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{g}_{c1} + b_1q_1 &= 0 \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{g}_{c1} + a_{22}\omega_1^2 g_{c1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для нахождения спектра системы (2.3) будем применять обычные частотные методы [5], в соответствии с которыми собственная частота ω находится из решения частотного уравнения

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_{11}\omega^2 & -a_{12}\omega^2 \\ -a_{12}\omega^2 & a_{22}(\omega_1^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель получаем для нахождения собственной частоты биквадратное уравнение

$$(a_{22}a_{11} - a_{12}^2)\omega^4 - a_{22}(b_1 + a_{11}\omega_1^2)\omega^2 + a_{22}b_1\omega_1^2 = 0$$

Принимая во внимание, что частотное уравнение имеет только вещественные [5] корни получаем

$$\omega^2 = \frac{a_{22}(b_1 + a_{11}\omega_1^2) \pm \sqrt{a_{22}^2(b_1 - a_{11}\omega_1^2)^2 + 4a_{22}a_{12}^2b_1\omega_1^2}}{2(a_{22}a_{11} - a_{12}^2)} \quad (2.4)$$

Формула (2.4) показывает, что взаимодействие первой формы колебаний стержня с первой формой колебаний полусферы приводит к появлению двух частот колебаний полной системы по первой форме. Физический смысл расщепления частот очень прост. Одна из частот, знак плюс в формуле (2.4) соответствует случаю, когда полусфера и стержень колеблются в одну сторону. Другая, знак минус в формуле (2.4) соответствует случаю, когда полусфера и стержень колеблются в разных направлениях.

Формула (2.4) находит непосредственное применение в теории волнового твердотельного гироскопа. Численный пример приведем для расчетной схемы ВТГ, использованной в [2], в соответствии с которой получаем задачу о расчете колебаний по первой форме полусферической оболочки плавно переходящей в ножку (случай 1). Если считать ножку идеально жесткой, то собственная частота такой полусферической оболочки по первой форме, рассчитанная по алгоритму [2] равна 12889 Гц. Подставляя теперь в формулу (2.4) параметры ножки, представляющей из себя

цилиндрический стержень постоянного поперечного сечения обнаруживаем, что появляются две частоты колебаний по первой форме 8294 Гц и 25882 Гц, причем оказалось, что одна из частот близка к собственной частоте колебаний ВТГ по основной форме 8458 Гц. В результате при данных параметрах прибора из-за неабсолютной жесткости ножки возможно нежелательное возникновение "паразитной" частоты, близкой к частоте основной формы.

Итак, в результате исследований описанных в публикуемой статье, разработана методика качественного аналитического исследования частотного спектра сложных упругих систем представляющих из себя комбинацию тонкой упругой оболочки и упругого стержня. Показано, что с высокой степенью точности задача о нахождении собственной частоты колебаний таких систем сводится к изучению взаимодействия форм колебаний отдельно взятых подсистем, с соответствующими краевыми условиями. Такой прием позволяет значительно упростить исходную задачу, так как не требует нахождения собственных форм колебаний полной системы. Кроме того, вся информация которая требуется об упругих свойствах оболочки состоит в знании ее собственных частот колебаний. Поэтому формулы расчета собственных колебаний системы по первой форме применимы не только для полусферической оболочки, но и для других типов тонких оболочек. Более того, именно этот факт оказывает существенное влияние на упрощения очень громоздкой задачи, позволяя получить явные выражения для частот, избегнув при этом необходимости рассмотрения структуры функционала линейной теории упругости.

Приведенный численный пример показывает применение полученных результатов в теории и практике волнового твердотельного гироскопа. Полученные формулы в совокупности с результатами работы [2] позволяют быстро и эффективно, не прибегая к использованию метода конечных элементов, делать вывод о частотных характеристиках ВТГ и их зависимости от геометрических и упругих параметров прибора.

Автор благодарит В.Ф. Журавлева за неоднократное обсуждение результатов работы, советы которого оказали значительное влияние на приведенный выше материал и способствовали появлению данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Roseau M.* Vibrations des systèmes mécaniques. Paris, etc.: Masson, 1984. 492 p.
2. *Киреевков А.А.* Алгоритм расчета собственной частоты волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) // Изв. АН. МТТ. 1997. № 3. С. 3–9.
3. *Стретт Дж. В. (лорд Релей).* Теория звука. Т1. М.: Гостехиздат, 1955. 504 с.
4. *Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н.* Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 374 с.
5. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.X.1997