**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1998**

УДК 539.375

© 1998 г. Ю.В. ПЕТРОВ, Н.В. ПОНИКАРОВ

О НАПРАВЛЕНИИ РОСТА ТРЕЩИНЫ В ОРТОТРОПНОМ МАТЕРИАЛЕ

Рассматривается задача о трещине в ортотропном материале (в частности, однонаправленно армированном хрупком композите). Для определения направления роста трещины используется критерий разрушения Новожилова [1, 2]. Учитывается анизотропия как упругих, так и прочностных свойств материала. Определяется критическая нагрузка, при которой трещина теряет устойчивость.

Рассмотрим трещину длиной $2l$ в ортотропном материале, расположенную в плоскости ортотропии (фиг. 1). На бесконечности приложена постоянная нагрузка σ_y^∞.

Пусть Oxy – прямолинейная декартова система координат с осями, совпадающими с осями симметрии ортотропного тела. Трещина расположена вдоль оси x. Закон Гука в этом случае запишется так

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy} \\
\varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy} \\
\varepsilon_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy}
\end{aligned} \tag{1}$$

Такая задача может быть решена с помощью комплексных потенциалов, следуя [3] или [4]. Пусть $z_1 = x + s_1 y$, $z_2 = x + s_2 y$, где s_i – корни характеристического уравнения

$$a_{11}s^4 + (2a_{12} + a_{66})s^2 + a_{22} = 0, \quad \operatorname{Im}(s) > 0 \tag{2}$$

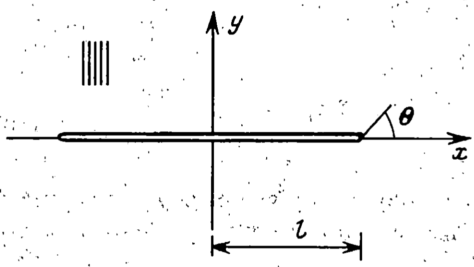
Напряжения определяются формулами

$$\begin{aligned}
&\sigma_x = 2\operatorname{Re}(s_1^2\Phi(z_1) + s_2^2\Psi(z_2)), \quad \sigma_y = 2\operatorname{Re}(\Phi(z_1) + \Psi(z_2)) \\
&\tau_{xy} = -2\operatorname{Re}(s_1\Phi(z_1) + s_2\Psi(z_2))
\end{aligned} \tag{3}$$

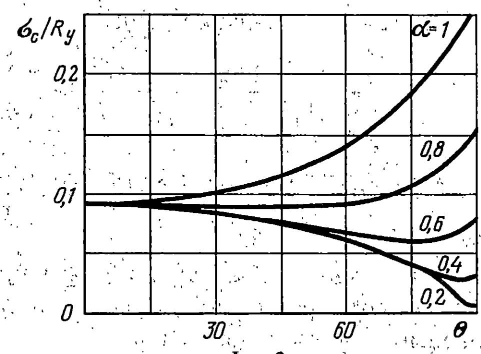
где Φ и Ψ – аналитические функции своих аргументов во всей плоскости за исключением разреза $y = 0, -l < x < l$.

Потенциалы Φ и Ψ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{s_2 - s_1}{s_2}\Phi(z_1) = \frac{\sigma_y^\infty}{2} + \frac{1}{2\pi i\sqrt{z_1^2 - l^2}}\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{\tau^2 - l^2}}{\tau - z_1}\sigma_y^\infty d\tau \\
&\frac{s_1 - s_2}{s_1}\Psi(z_2) = \frac{s_2 - s_1}{s_2}\Phi(z_2)
\end{aligned} \tag{4}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Выполнив в (4) интегрирование, получим выражения для потенциалов

$$\frac{s_2 - s_1}{s_2}\Phi(z_1) = \frac{\sigma_y^\infty z_1}{2\sqrt{z_1^2 - l^2}}$$

$$\frac{s_1 - s_2}{s_1}\Psi(z_2) = \frac{s_2 - s_1}{s_2}\Phi(z_2) \tag{5}$$

Формулы (3) и (5) дают решение поставленной задачи.

Асимптотику распределения напряжений вокруг вершины трещины можно получить, полагая $x = l + r\cos\theta$, $y = \sin\theta$. Полярные координаты означают соответственно расстояние от конца трещины по радиусу и угол между радиусом и линией трещины (фиг. 1). Следовательно, функцию Племеля $\sqrt{z_j^2 - l^2}$ можно записать в виде

$$\sqrt{z_j^2 - l^2} = \sqrt{2rl(\cos\theta + s_j\sin\theta)} + O(r^{3/2}) \tag{6}$$

Используя это, получим следующие асимптотические формулы для комплексных потенциалов:

$$\Phi(r,\theta) = \frac{\sigma_y^\infty\sqrt{l}s_2}{2\sqrt{2r}(s_2 - s_1)}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta + s_1\sin\theta}} + O(r^0)$$

$$\Psi(r,\theta) = \frac{\sigma_y^\infty\sqrt{l}s_1}{2\sqrt{2r}(s_1 - s_2)}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta + s_2\sin\theta}} + O(r^0) \tag{7}$$

Для расчета направления роста трещины далее потребуется выражение для окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}$:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_x\sin^2\theta + \sigma_y\cos^2\theta - 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}((s_1\sin\theta + \cos\theta)^2\Phi(z_1) + (s_2\sin\theta + \cos\theta)^2\Psi(z_2)) \tag{8}$$

Окончательно, если ограничиться главным членом асимптотики, окружное напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ определяется формулой

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_y^\infty\sqrt{l}}{\sqrt{2r}}F_\theta \tag{9}$$

где угловая часть функции равна

$$F_\theta = \mathrm{Re}\left(\frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left(\frac{(1/s_2 + s_2) + (1/s_2 - s_2)\cos 2\theta + 2\sin\theta}{\sqrt{\cos\theta + s_2 \sin\theta}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(1/s_1 + s_1) + (1/s_1 - s_1)\cos 2\theta + 2\sin 2\theta}{\sqrt{\cos\theta + s_1 \sin\theta}} \right)\right) \qquad (10)$$

Комплексные параметры s_1 и s_2 могут быть получены в явном виде из характеристического уравнения (2). Коэффициенты тензора податливости a_{jk} можно связать с главными упругими постоянными:

$$a_{11} = \frac{1}{E_x}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_y}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x} = -\frac{\nu_{yx}}{E_y}, \quad a_{66} = \frac{1}{\mu_{xy}} \qquad (11)$$

Если ввести обозначения

$$\alpha_0^2 = \frac{E_x}{E_y} = \frac{a_{22}}{a_{11}}, \quad \beta_0 = \frac{E_x}{2\mu_{xy}} - \nu_{xy} \qquad (12)$$

то уравнение (2) можно записать в виде

$$s^4 + 2\beta_0 s^2 + \alpha_0^2 = 0, \quad \mathrm{Im}(s) > 0 \qquad (13)$$

Решение этого уравнения:

$$s_1 = i\sqrt{\beta_0 + \sqrt{\beta_0^2 - \alpha_0^2}}, \quad s_2 = i\sqrt{\beta_0 - \sqrt{\beta_0^2 - \alpha_0^2}} \quad \text{при } \alpha_0 \leqslant \beta_0$$

$$s_1 = \frac{\sqrt{\alpha_0 - \beta_0}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{\alpha_0 + \beta_0}}{\sqrt{2}}, \quad s_2 = -\frac{\sqrt{\alpha_0 - \beta_0}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{\alpha_0 + \beta_0}}{\sqrt{2}} \quad \text{при } \alpha_0 > \beta_0 \qquad (14)$$

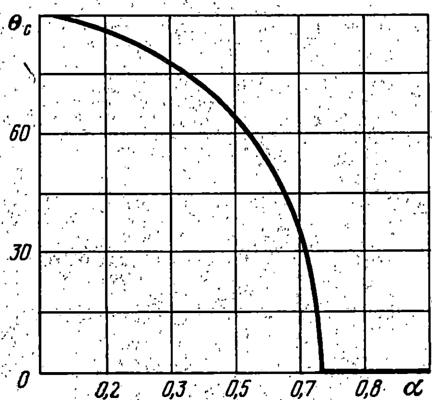
В изотропном материале трещины растут из дефекта вдоль нормали к направлению максимального растягивающего напряжения. В анизотропном материале, однако, кроме распределения напряжений вокруг вершины трещины, рост ее будет зависеть и от различной прочности в каждом направлении. Немат-Нассер и Хори [5], рассматривая задачу о трещине в металлокерамике, для выяснения направления роста трещины использовали различные критерии разрушения: максимум коэффициента интенсивности моды I в изотропной матрице; равенство нулю коэффициента интенсивности моды II в изотропной матрице; максимум окружного коэффициента интенсивности (коэффициента при старшем члене асимптотики окружного напряжения) для анизотропного однородного тела. Все критерии давали прямолинейное распространение трещины, первоначально расположенной по нормали к волокнам, то есть разрыв по площадкам наибольшей прочности.

Рассмотрим критерий разрушения, предложенный Новожиловым [1, 2]. Среднее значение напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ вблизи кончика трещины не должно превышать предел прочности материала. Осреднение проводится по некоему характерному для данного материала размеру. Итак, критерий разрушения имеет вид

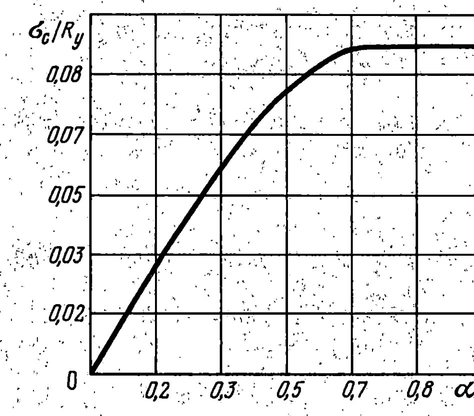
$$\frac{1}{D}\int_0^D \sigma_{\theta\theta} dr = R_\theta \qquad (15)$$

Здесь R_θ – прочность ортотропного материала на растяжение, если образец вырезан под углом θ к осям ортотропии. Для однонаправленно армированного материала можно считать, что

$$R_\theta = R_x \sin^2\theta + R_y \cos^2\theta \qquad (16)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

где R_x, R_y – прочность соответственно поперек и вдоль волокон. Для $2D$-ортогонально армированного композита эта зависимость будет более сложной, с тремя параметрами в правой части (см., напр. [6]). Будем также считать, что характерный размер D не зависит от угла θ и что он мал по сравнению с полудлиной l трещины. Это дает возможность использовать асимптотическое выражение для окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}$.

Если предположить, что трещина будет распространяться под некоторым углом θ к оси x, то критерий (15) будет определять нагрузку, необходимую для продвижения трещины в указанном направлении. Поскольку направление роста трещины может быть произвольным, для потери ее устойчивости будет достаточно минимальной по углу θ нагрузки. Она соответствует направлению, по которому будет расти трещина.

Подставив в (15) выражение для $\sigma_{\theta\theta}$ (9), получим

$$\sigma_y^\infty F_\theta \sqrt{2l} / \sqrt{D} = R_\theta \tag{17}$$

С учетом сказанного выше критическая нагрузка, при которой трещина теряет устойчивость, равна

$$\sigma_c = \min_\theta \sqrt{\frac{D}{2l}} \frac{R_\theta}{F_\theta} \tag{18}$$

Угол θ_c, при котором достигается минимум в (18), дает направление роста трещины.

В качестве примера рассматриваются материалы с показателем анизотропии α_0 и параметром $\beta_0 = 1$ (такое значение характерно для однонаправленно армированных материалов). Анизотропия прочностных свойств такая же, как и упругих $R_x/R_y = \alpha_0^2$. В материале имеется трещина длиной $2l = 30D$.

На фиг. 2 показана нагрузка, продвигающая трещину в направлении θ для материалов с различными показателями анизотропии. При $\alpha_0 < 0{,}7$ минимум требуемой нагрузки достигается при распространении трещины под некоторым углом к первоначальному направлению. На фиг. 3 и 4 показана соответственно зависимость угла θ_c и критической нагрузки σ_c от показателя анизотропии α_0. При $\alpha_0 \to 0$, что соответствует материалу из параллельных практически не связанных между собой волокон, трещина должна распространяться вдоль волокон, перпендикулярно первоначальному направлению. При этом критическая нагрузка, которую может выдержать материал, стремится к нулю. Прямолинейное распространение трещины оказывается характерным не только для изотропных, но и для близких к ним материалов ($\alpha_0 > 0{,}73$). Это направление роста трещины сохраняется и для материала, более прочного в направлении x, чем в направлении y.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 96-15-96838, 96-01–00391).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новожилов В.В.* К основам теории равновесных трещин в упругих телах // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 797–812.
2. *Морозов Н.Ф., Паукшто М.В.* Дискретные и гибридные модели механики разрушения. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1995. 157 с.
3. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение. Под ред. Г. Либовица. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 83–203.
4. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
5. *Nemat-Nasser S., Hori M.*Toughening by partial or full bridging of cracks in ceramics and fiber reinforced composites // Mech. Mater. 1987. V. 6. № 3. P. 245–269.
6. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. В.В. Васильева. М.: Машиностроение, 1980. 510 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
1.III.1997