МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1998

УДК 539.214;339.374

© 1998 г. М.А. АРТЕМОВ, Д.Д. ИВЛЕВ

О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО БРУСА, ОСЛАБЛЕННОГО ПОЛОГИМИ ВЫТОЧКАМИ

В работе [1] А.Ю. Ишлинский в линеаризированной постановке рассмотрел плоское идеальнопластическое состояние растягиваемой полосы переменного сечения.

В работе [2] в аналогичной постановке рассмотрено предельное состояние плоской анизотропной идеальнопластической полосы, а также растягиваемых брусьев прямоугольного поперечного сечения при условии полной пластичности и условии пластичности Мизеса.

Ниже рассматривается пространственное идеальнопластическое состояние призматических тел переменного прямоугольного сечения при условии соответствия напряженного состояния граням и ребрам кусочнолинейных условий текучести.

1. Обозначим через σ_{ij}, ε_{ij} – компоненты тензоров напряжения и скорости перемещения соответственно. Условие предельного состояния запишем в виде

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \tag{1.1}$$

Согласно ассоциированному закону течения будем иметь

$$\varepsilon_{ij} = \mu \partial F / \partial \sigma_{ij}, \quad \mu \geqslant 0 \tag{1.2}$$

Припишем компонентам исходного состояния индекс градус наверху, компонентам возмущенного – индекс штрих наверху:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon'_{ij} \tag{1.3}$$

В качестве исходного примем однородное напряженно-деформированное состояние в декартовой системе координат x, y, z:

$$\sigma_x^0 = \sigma_1^0, \quad \sigma_y^0 = \sigma_2^0, \quad \sigma_z^0 = \sigma_3^0, \quad \tau_{xy}^0 = \tau_{yz}^0 = \tau_{xz}^0 = 0 \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_x^0 = \varepsilon_1^0, \quad \varepsilon_y^0 = \varepsilon_2^0, \quad \varepsilon_z^0 = \varepsilon_3^0, \quad \varepsilon_{xy}^0 = \varepsilon_{yz}^0 = \varepsilon_{xz}^0 = 0 \tag{1.5}$$

где σ_i^0, ε_i^0 – главные компоненты напряжения и скорости деформации.

Линеаризируя соотношения (1.1), (1.2), при условиях (1.3)–(1.5) получим

$$a_1\sigma'_1 + a_2\sigma'_2 + a_3\sigma'_3 = 0, \quad a_i = \partial F^0 / \partial \sigma_i = \text{const } (i = 1, 2, 3) \tag{1.6}$$

$$\varepsilon'_i = \mu^0 \left(\frac{\partial \psi_i^0}{\partial \sigma_1} \sigma'_1 + \frac{\partial \psi_i^0}{\partial \sigma_2} \sigma'_2 + \frac{\partial \psi_i^0}{\partial \sigma_3} \sigma'_3 \right) + \mu' a_i, \quad \psi_i = \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} \tag{1.7}$$

где индекс градус означает, что значения производных функций F, ψ_i взяты при $\sigma_i = \sigma_i^0$.

В дальнейшем будем полагать, что условие пластичности не зависит от среднего давления $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$. Тогда в формулах (1.6), (1.7):

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0, \quad \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 0 \tag{1.8}$$

Обозначим $\partial\psi_i^0 / \partial\sigma_j = b_{ij}$, согласно (1.7), (1.8) получим

$$\varepsilon_i' = \mu^0(b_{i1}\sigma_1' + b_{i2}\sigma_2' + b_{i3}\sigma_3') + \mu' a_i, \quad b_{ij} = b_{ji}, \quad b_{i1} + b_{i2} + b_{i3} = 0 \tag{1.9}$$

Соотношения связи между главными компонентами напряжений и скоростей деформации σ_i, ε_i и компонентами σ_{ij}, ε_{ij} в ортогональной системе координат xyz для изотропного тела запишем в виде

$$\sigma_x = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2, \quad \tau_{xy} = \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2 \tag{1.10}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 l_1^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_3 n_1^2, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_1 l_1 l_2 + \varepsilon_2 m_1 m_2 + \varepsilon_3 n_1 n_2 \tag{1.11}$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \tag{1.12}$$

$(1\,2\,3,\ xyz,\ lmn)$

где l_i, m_i, n_i – направляющие косинусы, обозначения (123, xyz, lmn) означают, что недостающие выражения получаются круговой перестановкой индексов 123, xyz и косинусов lmn.

Полагая наряду с (1.3):

$$l_i = l_i^0 + l_i', \quad m_i = m_i^0 + m_i', \quad n_i = n_i^0 + n_i'$$

$$l_1^0 = m_2^0 = n_3^0 = 1, \quad l_2^0 = l_3^0 = m_1^0 = m_3^0 = n_1^0 = n_2^0 = 0 \tag{1.13}$$

линеаризуя соотношения (1.10–1.12), получим

$$\sigma_x' = \sigma_1', \quad \sigma_y' = \sigma_2', \quad \sigma_z' = \sigma_3'$$

$$\tau_{xy}' = \sigma_1^0 l_2' + \sigma_2^0 m_1', \quad \tau_{yz}' = \sigma_2^0 m_3' + \sigma_3^0 n_2', \quad \tau_{xz}' = \sigma_3^0 n_1' + \sigma_1^0 l_3' \tag{1.14}$$

$$\varepsilon_x' = \varepsilon_1', \quad \varepsilon_y' = \varepsilon_2', \quad \varepsilon_z' = \varepsilon_3'$$

$$\varepsilon_{xy}' = \varepsilon_1^0 l_2' + \varepsilon_2^0 m_1', \quad \varepsilon_{yz}' = \varepsilon_2^0 m_3' + \varepsilon_3^0 n_2', \quad \varepsilon_{xz}' = \varepsilon_3^0 n_1' + \varepsilon_1^0 l_3' \tag{1.15}$$

$$l_1' = m_2' = n_3' = 0, \quad l_2' + m_1' = 0, \quad m_3' + n_2' = 0, \quad n_1' + l_3' = 0 \tag{1.16}$$

Из (1.14–1.16) найдем

$$\tau_{xy}' = a_{xy}\varepsilon_{xy}', \quad \tau_{xz}' = a_{xz}\varepsilon_{xz}', \quad \tau_{yz}' = a_{yz}\varepsilon_{yz}'$$

$$a_{xy} = \frac{\sigma_x^0 - \sigma_y^0}{\varepsilon_x^0 - \varepsilon_y^0}, \quad a_{yz} = \frac{\sigma_y^0 - \sigma_z^0}{\varepsilon_y^0 - \varepsilon_z^0}, \quad a_{xz} = \frac{\sigma_z^0 - \sigma_x^0}{\varepsilon_z^0 - \varepsilon_x^0} \tag{1.17}$$

где согласно ассоциированному закону течения a_{xy}, a_{yz}, $a_{xz} \geqslant 0$.

Для напряженно-деформированного состояния, определяемого соотношениями (1.3)–(1.5), согласно (1.14), (1.15) соотношения (1.6), (1.9) можно переписать в виде

$$a_1\sigma_x' + a_2\sigma_y' + a_3\sigma_z' = 0 \tag{1.18}$$

$$\varepsilon_x' = \mu^0(b_{11}\sigma_x' + b_{12}\sigma_y' + b_{13}\sigma_z') + \mu' a_1 \quad (1\,2\,3,\ x\,y\,z) \tag{1.19}$$

К семи соотношениям (1.18), (1.19), (1.17) следует присоединить три уравнения равновесия:

$$\frac{\partial\sigma'_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau'_{xz}}{\partial z}=0 \quad (xyz) \tag{1.20}$$

Перейдём в соотношениях (1.11), (1.12) к компонентам скоростей перемещений по формулам Коши

$$\varepsilon'_{ij}=\tfrac{1}{2}(u'_{i,j}+u'_{j,i}) \tag{1.21}$$

где u'_i – компоненты скорости перемещений.

Десять соотношений (1.17)–(1.20) определяют замкнутую систему десяти уравнений относительно десяти независимых переменных σ'_{ij}, u'_i, μ'.

Удовлетворим уравнениям равновесия при помощи функций напряжений Максвелла [3]:

$$\sigma'_x=\frac{\partial^2 X_2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 X_3}{\partial y^2}, \quad \tau'_{xy}=-\frac{\partial^2 X_3}{\partial x\partial y} \quad \begin{pmatrix} x & y & z\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \tag{1.22}$$

Решение будем искать в виде

$$X_i=A_i e^{mx}e^{ny}e^{\lambda z}, \quad \mu'=Be^{mx}e^{ny}e^{\lambda z}, \quad u'_i=C_i e^{mx}e^{ny}e^{\lambda z} \tag{1.23}$$

где $A_i, B, C_i, m, n, \lambda$ – const.

Согласно (1.23), (1.22), (1.21) из (1.17)–(1.20) найдем

$$a_1(A_2\lambda^2+A_3n^2)+a_2(A_3m_2+A_1\lambda^2)+a_3(A_1n^2+A_2m^2)=0 \tag{1.24}$$

$$C_1m=\mu^0(b_{11}(A_2\lambda^2+A_3n^2)+b_{12}(A_3m^2+A_1\lambda^2)+$$
$$+b_{13}(A_1n^2+A_2m^2))+Ba_1 \quad (xyz,\ 123,\ mn\lambda) \tag{1.25}$$

$$2A_3mn+a_{xy}(C_1n+C_2m)=0 \quad (xyz,\ 123,\ mn\lambda) \tag{1.26}$$

Подставляя в (1.26) значения C_i из (1.25), получим систему трех уравнений:

$$\mu^0\{A_1[n^2(b_{13}n^2+b_{23}m^2)+\lambda^2(b_{12}n^2+b_{22}m^2)]+$$
$$+A_2[\lambda^2(b_{11}n^2+b_{21}m^2)+m^2(b_{13}n^2+b_{23}m^2)]+$$
$$+A_3[m^2(b_{12}n^2+b_{22}m^2)+n^2(b_{11}n^2+b_{21}m^2)]\}+$$
$$+\frac{2A_3m^2n^2}{a_{xy}}+B(a_1n^2+a_2m^2)=0 \quad (xyz,\ 123,\ mn\lambda) \tag{1.27}$$

Присоединяя к трем уравнениям (1.27) уравнение (1.24), получим однородную систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных A_i, B. Приравнивая определитель этой системы к нулю, получим уравнение для определения зависимости значения λ от m, n, выражение которого вследствие громоздкости здесь опустим.

2. Рассмотрим случай задания условия пластичности (1.1) в виде плоскости в пространстве главных напряжений

$$a\sigma_1+b\sigma_2+c\sigma_3=0, \quad a+b+c=0 \quad (a,b,c-\text{const}) \tag{2.1}$$

Линеаризируя соотношения (2.1), учитывая (1.14), получим

$$a\sigma'_1+b\sigma'_2+c\sigma'_3=0, \quad a\sigma'_x+b\sigma'_y+c\sigma'_z=0 \tag{2.2}$$

Согласно ассоциированному закону пластического течения

$$\varepsilon^0_x=\mu^0a, \quad \varepsilon^0_y=\mu^0b, \quad \varepsilon^0_z=\mu^0c, \quad \mu^0>0 \tag{2.3}$$

$$\varepsilon'_x=\mu'a, \quad \varepsilon'_y=\mu'b, \quad \varepsilon'_z=\mu'c, \quad \mu'>0 \tag{2.4}$$

Отметим, что условия (2.2) согласно (2.4) можно записать в виде

$$\sigma'_x\varepsilon'_x + \sigma'_y\varepsilon'_y + \sigma'_z\varepsilon'_z = 0 \tag{2.5}$$

Обозначая компоненты перемещения u', v', w', удовлетворим соотношениям (2.4) полагая

$$u' = a\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y},\quad v' = b\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z},\quad w' = c\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y},\quad \mu' = \frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y\partial z} \tag{2.6}$$

Величины ε'_x, ε'_y, ε'_z определены согласно (2.4), (2.6). Из (2.6), (1.21) будем иметь

$$\varepsilon'_{xy} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(a\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + b\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)\quad (xyz,\ abc) \tag{2.7}$$

Из уравнений (1.20), (1.17), (2.7), получим

$$2\frac{\partial^2\sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\left[a_{xy}\left(b\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) + a_{xz}\left(c\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)\right] = 0\quad (xyz,\ abc) \tag{2.8}$$

Три уравнения (2.8) и соотношения (2.2) определяют замкнутую систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных σ'_x, σ'_y, σ'_z, Φ.

Положим

$$\sigma'_x = C_1e^{mx}e^{ny}e^{\lambda z},\quad \sigma'_y = C_2e^{mx}e^{ny}e^{\lambda z},\quad \sigma'_z = C_3e^{mx}e^{ny}e^{\lambda z}$$

$$\Phi = Ae^{mx}e^{ny}e^{\lambda z},\quad (C_i, A, m, n, \lambda - \text{const}) \tag{2.9}$$

Из (2.8), (2.2) согласно (2.9) найдем

$$2mC_1 = -An\lambda[a_{xy}(an^2 + bm^2) +$$

$$+a_{xz}(a\lambda^2 + cm^2)]\quad (123,\ mn\lambda,\ xyz,\ abc) \tag{2.10}$$

$$aC_1 + bC_2 + cC_3 = 0 \tag{2.11}$$

Из (2.10), (2.11) получим уравнение

$$a_{xy}\lambda^2(an^2 + bm^2)^2 + a_{yz}m^2(b\lambda^2 + cn^2)^2 + a_{xz}n^2(cm^2 + a\lambda^2)^2 = 0 \tag{2.12}$$

или

$$\lambda^4(a^2a_{xz}n^2 + b^2a_{yz}m^2) + \lambda^2[2m^2n^2c(a_{xz}a + a_{yz}b) +$$

$$+a_{xy}\lambda^2(an^2 + bm^2)^2] + c^2m^2n^2(a_{xz}m^2 + a_{yz}n^2) = 0 \tag{2.13}$$

Согласно (2.7), (2.9) будем иметь

$$\varepsilon'_{xy} = \tfrac{1}{2}A\lambda(an^2 + b\lambda^2)e^{mx}e^{ny}e^{\lambda z}\quad (xyz,\ abc,\ mn\lambda) \tag{2.14}$$

Из (2.14), (2.12) будем иметь

$$a_{xy}\varepsilon'^2_{xy} + a_{yz}\varepsilon'^2_{yz} + a_{xz}\varepsilon'^2_{xz} = 0 \tag{2.15}$$

Выражение (2.15) согласно (1.17) можно переписать в виде

$$\tau'_{xy}\varepsilon'_{xy} + \tau'_{yz}\varepsilon'_{yz} + \tau'_{xz}\varepsilon'_{xz} = 0 \tag{2.16}$$

Из (2.5), (2.16) следует

$$\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} = \sigma'_x\varepsilon'_x + \sigma'_y\varepsilon'_y + \sigma'_z\varepsilon'_z + 2(\tau'_{xy}\varepsilon'_{xy} + \tau'_{yz}\varepsilon'_{yz} + \tau'_{xz}\varepsilon'_{xz}) = 0 \tag{2.17}$$

Таким образом, искомая связь (2.12), (2.13) между величинами m, n, λ может быть установлена из условия (2.17).

На фигуре уравнению (2.1) соответствует грань PQ в девиаторной плоскости.

Предположим, что

$$\sigma_z^0 \neq 0, \quad \sigma_y^0 = \sigma_x^0 = 0 \tag{2.18}$$

Согласно (2.18) исходное напряженное состояние соответствует точке P на фигуре.

Из (2.3) имеет место $\varepsilon_x^0 - \varepsilon_y^0 = \mu^0(a - b)$. При $a \neq b$, $\mu^0 \neq 0$ величина $\varepsilon_x^0 - \varepsilon_y^0$ отлична от нуля, тогда согласно (2.18), (1.17) $a_{xy} = 0, \tau'_{xy} = 0$, a_{xz}, $a_{yz} \neq 0$. В этом случае из (2.12) получим

$$b\lambda^2 + cn^2 = 0, \quad a\lambda^2 + cm^2 = 0 \tag{2.19}$$

Из (2.19) получим

$$\lambda^2 = -cm^2 / a = -cn^2 / b, \quad m^2 / a = n^2 / b \tag{2.20}$$

$$n = \pm\sqrt{b / a}m, \quad \lambda = \pm\sqrt{-c / a}m$$

При одноосном растяжении вдоль оси z имеет место $\varepsilon_z^0 > 0$, ε_x^0, $\varepsilon_y^0 < 0$, тогда $c > 0$, $a, b < 0$, следовательно, если m, n – мнимые величины, λ – также мнимая величина, и искомое решение может быть определено в виде

$$\sigma'_x = C_1 \cos mx \cos ny \cos \lambda z \quad (xyz,\ mn\lambda,\ 123)$$

$$\tau'_{xy} = 0, \quad 2\tau'_{xz} = a_{xz} Amn\lambda \cos mx \sin ny \cos \lambda z \quad (xy,\ mn)$$

$$u' = Aan\lambda \cos mx \sin ny \sin \lambda z \quad (u'v'w',\ abc,\ mn\lambda,\ xyz) \tag{2.21}$$

Граничные условия на боковых гранях тела будут иметь вид

$$\sigma_x l + \tau_{xy} p + \tau_{yz} q = 0 \quad (xyz,\ lpq) \tag{2.22}$$

где l, p, q – направляющие косинусы нормали к граням тела.

Уравнение граней зададим в виде

$$x = \pm(h_1 + f_1(y,z)), \quad f_1 / h_1 \ll 1 \tag{2.23}$$

$$y = \pm(h_2 + f_2(x,z)), \quad f_2 / h_2 \ll 1 \tag{2.24}$$

Из (2.23), (2.24), (2.21) при $\tau'_{xy} = 0$ будем иметь

$$\sigma'_x = 0, \quad \tau'_{xz} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\sigma_z^0 = 0, \quad \text{при } x = h_1 \tag{2.25}$$

$$\sigma'_y = 0, \quad \tau'_{yz} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\sigma_z^0 = 0, \quad \text{при } y = h_2 \tag{2.26}$$

Из (2.25), (2.26), (2.21) получим

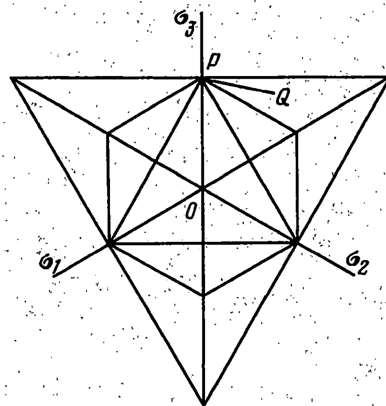
$$mh_1 = \pi / 2 + \pi k_1, \quad nh_2 = \pi / 2 + \pi k_2, \quad k_1, k_2 = \pm 0, 1, 2\ldots \tag{2.27}$$

Откуда при $k_1 = k_2 = 0$ будет $m = \pi/(2h_1)$, $h_2/h_1 = \sqrt{a / b}$.

Функции f_1, f_2, при которых имеет место решение, определяются согласно (2.25), (2.26), (2.21).

Таким образом, решение в классе мнимых значений m, n, λ возможно при определенных соотношениях сторон бруса. В общем случае решение следует искать в классе комплексных чисел, определяемых согласно (2.13).

Отметим, что грани условия пластичности Треска $\sigma_3 - \sigma_1 = 1$ соответствуют зна-



чения $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$. Из (2.19) получим $n = 0$, $\lambda = \pm m$. Таким образом, деформирование происходит в плоскости x, z и решение совпадает с данными А.Ю. Ишлинским [1].

3. Рассмотрим ребро, определяемое пересечением двух плоскостей текучести

$$a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 = 1,\quad b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3\sigma_3 = 1,\quad a_i, b_i - \text{const}$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = 0,\quad b_1 + b_2 + b_3 = 0 \tag{3.1}$$

Линеаризуя (3.1) получим

$$a_1\sigma'_x + a_2\sigma'_y + a_3\sigma'_z = 0,\quad b_1\sigma'_x + b_2\sigma'_y + b_3\sigma'_z = 0 \tag{3.2}$$

Из (3.2) следует

$$\sigma'_x = \sigma'_y = \sigma'_z = \sigma' \tag{3.3}$$

Согласно ассоциированному закону течения

$$\varepsilon_1 = \mu_1 a_1 + \mu_2 b_1,\quad \varepsilon_2 = \mu_1 a_2 + \mu_2 b_2,\quad \varepsilon_3 = \mu_1 a_3 + \mu_2 b_3,\quad \mu_1, \mu_2 \geqslant 0$$
$$\varepsilon'_x = \mu'_1 a_1 + \mu'_2 b_1,\quad \varepsilon'_y = \mu'_1 a_2 + \mu'_2 b_2,\quad \varepsilon'_z = \mu'_1 a_3 + \mu'_2 b_3,\quad \mu_1, \mu_2 \geqslant 0 \tag{3.4}$$

Из (3.4), (3.3), (3.1) найдем

$$\sigma'_x\varepsilon'_x + \sigma'_y\varepsilon'_y + \sigma'_z\varepsilon'_z = 0 \tag{3.5}$$

Уравнения равновесия (1.20) согласно (3.3), (1.17), (1.21) примут вид

$$2\frac{\partial\sigma'}{\partial x} + a_{xy}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right) + a_{xz}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}\right) = 0 \quad (xyz,\ 123) \tag{3.6}$$

К трем уравнениям (3.6) следует присоединить условие несжимаемости

$$\partial u'/\partial x + \partial v'/\partial y + \partial w'/\partial z = 0 \tag{3.7}$$

Решение системы четырех уравнений (3.6), (3.7) относительно четырех неизвестных σ', u', v', w' ищем в виде

$$u' = C_1 e^{mx} e^{ny} e^{\lambda z},\quad v' = C_2 e^{mx} e^{ny} e^{\lambda z},\quad w' = C_3 e^{mx} e^{ny} e^{\lambda z}$$
$$\sigma' = A e^{mx} e^{ny} e^{\lambda z} \tag{3.8}$$

В дальнейшем положим

$$C_1 = an\lambda,\quad C_2 = b\lambda m,\quad C_3 = cmn \tag{3.9}$$

В данном случае здесь и ниже величины a, b, c – произвольные постоянные.

Из (3.8), (3.9), (3.7) получим

$$a+b+c=0 \tag{3.10}$$

Из (3.8), (3.9), (3.6) найдем три уравнения

$$2Am+\lambda n(a_{xy}(an^2+bm^2)+a_{zx}(a\lambda^2+cm^2))=0$$

$$(xyz,\ \ mn\lambda,\ \ abc) \tag{3.11}$$

Умножая соответственно уравнения (3.11) на $an\lambda$, $b\lambda m$, cmn, складывая их, учитывая (3.10), получим уравнение

$$a_{xy}\lambda^2(an^2+bm^2)^2+a_{yz}m^2(b\lambda^2+cn^2)^2+a_{xz}n^2(cm^2+a\lambda^2)^2=0 \tag{3.12}$$

Уравнения (2.12), (3.12) по форме совпадают между собой.

В случае грани (2.1), (2.12) величины a, b, c – являются физическими величинами, в случае ребра (3.12) величины a, b, c, согласно (3.9), – произвольные постоянные.

Определяя из (2.9) постоянные C_i, согласно (3.9) из (2.9), (3.8) найдем соответствие между напряженным и деформированным состоянием для случаев грани и ребра

$$\sigma'_x \leftrightarrow u',\quad \sigma'_y \leftrightarrow v',\quad \sigma'_z \leftrightarrow w',\quad \Phi' \leftrightarrow \sigma' \tag{3.13}$$

Отметим, что согласно (3.8), (3.9), (1.21), (1.17) соотношение (3.12) можно переписать в виде (2.16), принимая во внимание (3.5), получим, что и в данном случае имеет место (2.17).

В случае $\sigma'_x=\sigma'_y=\sigma'_z=\sigma'$, $\tau'_{xy}=0$ согласно (1.22) будем иметь

$$\frac{\partial^2 X_2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 X_3}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 X_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X_1}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 X_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 X_3}{\partial x\partial y}=0 \tag{3.14}$$

Полагая X_i в виде (1.23), из (3.14) найдем

$$A_2\lambda^2+A_3n^2=A_3m^2+A_1\lambda^2=A_1n^2+A_2m^2,\quad A_3mn=0 \tag{3.15}$$

Полагая далее $m, n\neq 0$, получим

$$A_1=A_2,\quad A_3=0,\quad \lambda^2=m^2+n^2 \tag{3.16}$$

Согласно (1.23), (3.16) искомое решение может быть определено в виде

$$\sigma'_x=\sigma'_y=\sigma'_z=\sigma'=A\lambda^2\cos mx\cos ny\cos\lambda z,\quad \lambda=\pm\sqrt{m^2+n^2}$$

$$\tau'_{xy}=0,\quad \tau'_{xz}=-Am\lambda\sin mx\cos ny\sin\lambda z\quad (xy,mn) \tag{3.17}$$

Согласно (3.17), (2.26), (2.27) будем иметь

$$mh_1=\pi/2+\pi k_1,\quad nh_2=\pi/2+\pi k_2,\quad k_1,k_2=\pm 0,1,2\ldots \tag{3.18}$$

При $k_1=k_2=0$ $m/n=h_2/h_1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Растяжение бесконечно длинной идеально пластической полосы переменного сечения // Докл. АН УССР. 1958. № 1. С. 12–15.
2. *Васильева А.М., Ивлев Д.Д., Михайлова М.В.* О растяжении полосы и бруса переменного прямоугольного сечения из идеальнопластического материала // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 5. С. 79–87.
3. *Ляв А.Е.* Математическая теория упругости. М.: ОНТИ. 1935. 674 с.

Воронеж, Чебоксары

Поступила в редакцию
20.V.1997