МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1998

УДК 531.383

© 1998 г. В.Н. КОШЛЯКОВ, В.А. СОБОЛЕВ

К ПРОБЛЕМЕ ДОПУСТИМОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕЦЕССИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ КОМПАСОВ

Настоящая работа посвящена использованию метода расщепляющих преобразований в проблеме допустимости перехода к упрощенным уравнениям прецессионной теории применительно к достаточно общему случаю, когда исходные уравнения содержат неконсервативные структуры. Рассмотрены примеры.

1. Постановка задачи. В основу дальнейшего рассмотрения положена линейная автономная гироскопическая система

$$J\ddot{\mathbf{x}} + (HG + D)\dot{\mathbf{x}} + C\mathbf{x} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{x}$ – вектор обобщенных координат, J и D – симметрические положительно определенные матрицы, G – кососимметрическая невырожденная матрица, H – большой параметр [1].

Соответствующая (1.1) прецессионная система имеет вид

$$(HG + D)\dot{\mathbf{x}} + C\mathbf{x} = 0 \tag{1.2}$$

Проблеме обоснования допустимости перехода от системы (1.1) к упрощенной системе (1.2) посвящено большое число исследований. Для сложных гироскопических систем метод составления прецессионных уравнений, использующий глубокие физические соображения, был наиболее полно разработан А.Ю. Ишлинским [2]. Проблема математического обоснования была поставлена Д.Р. Меркиным, который получил ее решение во многих важных случаях. Известны, однако, случаи, когда использование уравнений (1.2) приводит к неверным результатам. Примером такого рода являются уравнения гировертикали с радиальной коррекцией при отсутствии трения [1]:

$$A\ddot{\alpha} - H\dot{\beta} - s\beta = 0, \quad A\ddot{\beta} + H\dot{\alpha} + s\alpha = 0 \tag{1.3}$$

Тривиальное решение этих уравнений неустойчиво, в то время как тривиальное решение прецессионных уравнений, соответствующих (1.3):

$$H\dot{\beta} + s\beta = 0, \quad H\dot{\alpha} + s\alpha = 0 \tag{1.4}$$

асимптотически устойчиво.

В теории гироскопических компасов использование прецессионных уравнений традиционно считалось допустимым и эти уравнения применялись без обсуждений границ их применимости [3, 4]. Однако, в работе [5] на примере простого маятникового гирокомпаса Сперри с устройством для погашения колебаний было показано, что использование уравнений прецессионной теории приводит к неверным результатам. Погашение колебаний в таком гирокомпасе осуществляется при помощи эксцентрического соединения маятниковой системы с камерой гироскопа не в наинизшей ее точке, а в точке, отнесенной на некоторый малый угол ε к востоку. В обозначениях работы [5] прецессионные уравнения имеют вид

$$H(\dot\beta + U\cos\varphi\alpha) + M\varepsilon\beta = 0, \quad H\dot\alpha - M\beta = 0 \tag{1.5}$$

и описывают при $\varepsilon > 0$ (это соответствует отнесению точки соединения маятника с камерой гироскопа к востоку) затухающие колебания гирокомпаса. С учетом инерционных членов уравнения рассматриваемого гирокомпаса запишем в форме [5]:

$$A\ddot\alpha + H(\dot\beta + U\cos\varphi\alpha) + M\varepsilon\beta = 0, \quad B\ddot\beta - H\dot\alpha + M\beta = 0 \tag{1.6}$$

Тривиальное решение уравнений (1.6) оказывается, в отличие от уравнений (1.5), неустойчивым при $\varepsilon \neq 0$ и притом независимо от знака ε [5].

2. Разделение движений. Для выяснения обстоятельств подобного расхождения, связанного с наличием в уравнениях (1.5) и (1.6) неконсервативных позиционных членов, обратимся к общему уравнению (1.1). Введем малый положительный скалярный параметр $\mu = 1/H$ и представим уравнение (1.1) в виде системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}, \quad \mu J\dot{\mathbf{y}} = -(G + \mu D)\mathbf{y} - \mu C\mathbf{x} \tag{2.1}$$

Для перехода к прецессионным уравнениям необходимым условием является, как известно, невырожденность матрицы G гироскопических сил [1]. В предположении выполнения этого условия и следуя работам [6, 7], применим к системе (2.1) расщепляющее преобразование

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mu P(\mu)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mu L(\mu)\mathbf{y}_1 \tag{2.2}$$

где матрицы P и L удовлетворяют уравнениям

$$\mu J(\mu P)^2 = -(G + \mu D)\mu P - \mu C, \quad -LJ^{-1}(G + \mu D + \mu J\mu P) = E + \mu P\mu L \tag{2.3}$$

(E – единичная матрица) и могут быть найдены из них в виде асимптотических разложений

$$P = P_1 + \mu P_2 + \mu^2 P_3 + O(\mu^3), \quad L = L_1 + \mu L_2 + \mu^2 L_3 + O(\mu^3) \tag{2.4}$$

Здесь символом $O(\mu^3)$ обозначена совокупность членов третьего порядка по μ^3 и выше. Используя уравнения (2.3), получаем нижеследующие выражения для составляющих матриц P и L:

$$P_1 = -G^{-1}C, \quad P_2 = -G^{-1}DP_1, \quad P_3 = -G^{-1}(DP_2 + JP_1^2) \tag{2.5}$$

$$L_1 = -G^{-1}J, \quad L_2 = G^{-1}DG^{-1}J, \quad L_3 = -\left(P_1L_1 + L_1P_1 + L_2J^{-1}D\right)G^{-1}J$$

Медленные прецессионные движения гироскопической системы описываются векторным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}_1 - \mu P(\mu)\mathbf{x}_1 = 0 \tag{2.6}$$

а быстрые нутационные движения – уравнением

$$\mu J\dot{\mathbf{y}}_1 + \left[G + \mu D + \mu^2 JP(\mu)\right]\mathbf{y}_1 = 0 \tag{2.7}$$

Эти уравнения, записанные в векторной или скалярной форме, назовем соответственно точными прецессионными и точными нутационными уравнениями.

Нетрудно убедиться, что уравнения прецессионной теории (1.2), разрешенные относительно производной отличаются от точных прецессионных уравнений (2.6) членами порядка $O(\mu^3)$. Следует также отметить зависимость точных прецессионных уравнений от инерционных членов (наличие в них матрицы J).

Условия затухания нутационных колебаний могут быть получены при помощи критерия Рауса – Гурвитца в стационарном случае. Достаточные условия затухания нутационных колебаний можно получить и прямым методом Ляпунова, выбрав в качестве функции Ляпунова определенно-положительную квадратичную форму $V(\mathbf{y}_1) = \frac{1}{2}\mathbf{y}_1^T J \mathbf{y}_1$, где знак $(\cdot)^T$ обозначает транспонирование. Для полной производной в силу уравнения (2.7) получаем

$$\dot{V} = -\mathbf{y}_1^T \left[D + \mu \tfrac{1}{2}\left(JP + P^T J \right) \right] \mathbf{y}_1 \tag{2.8}$$

Для определенной отрицательности формы (2.8) необходима положительная определенность матрицы

$$D + \mu \tfrac{1}{2}\left(JP + P^T J \right) \tag{2.9}$$

Если матрица диссипативных сил D положительно определена, то при достаточно малых значениях параметра μ слагаемое $JP + P^T J$ в (2.9) может оказать лишь несущественное влияние на знакоопределенность квадратичной формы (2.8).

Случай $D = 0$, что соответствует отсутствию диссипативных сил, является особым. Используя выражения (2.5), получаем, что для этого случая положительная определенность матрицы $W = C^T G^{-1} J - J G^{-1} C$ дает достаточное условие затухания нутационных колебаний.

Однако выполнение этого условия отнюдь не служит гарантией возможности практического использования гироскопических приборов. Действительно, обращаясь к уравнениям гировертикали с радиальной коррекцией, имеем для этого случая

$$W = -2AsE/H \tag{2.10}$$

Поскольку в уравнениях (1.3) принято $A > 0$, $H > 0$, то положительность матрицы (2.10) имеет место лишь в случае $s < 0$. Но при этом тривиальное решение прецессионных уравнений (1.4) оказывается неустойчивым, причем в силу быстрого возрастания экспоненты с положительным показателем прибор как указатель вертикали вообще непригоден.

3. Системы с малым трением. Рассмотрим случай малой диссипации, полагая

$$D = \varkappa D_1 \tag{3.1}$$

где $\varkappa$ – малый положительный коэффициент. Уравнение, описывающее прецессионные движения (точное прецессионное уравнение), запишем в следующей форме:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 + \mu\left[G^{-1}C + \mu\varkappa G^{-1} D_1 G^{-1} C + \mu^2 G^{-1} J \left(G^{-1} C \right)^2 + O\left(\mu^3 + \mu^2 \varkappa \right) \right] \mathbf{x}_1 = 0 \tag{3.2}$$

Уравнение нутационных движений (точное нутационное уравнение) примет вид

$$\mu J \dot{\mathbf{y}}_1 + \left[G + \mu\varkappa D_1 - \mu^2 J G^{-1} C + O\left(\mu^3 + \mu^2 \varkappa \right) \right] \mathbf{y}_1 = 0 \tag{3.3}$$

При малой диссипации инерционные члены могут оказывать ощутимое влияние на устойчивость системы. Более того, уравнение (3.3) можно использовать для оценки величин сил сопротивления, гарантирующих допустимость перехода к уравнениям прецессионной теории. Условие затухания нутационных колебаний сводится к требованию положительной определенности формы (2.9), где следует считать D определяющейся согласно (3.1).

В качестве примера рассмотрим снова уравнения гировертикали с радиальной коррекцией. Точное прецессионное уравнение можно представить в виде (2.6), полагая

$$P = \begin{Vmatrix} -s & 0 \\ 0 & -s \end{Vmatrix} + O(\mu^2)$$

а точное нутационное уравнение – в виде (2.7), где $J = \mathrm{diag}(A, A)$:

$$\left[G + \mu^2 J P(\mu) \right] = \begin{Vmatrix} -\mu^2 sA & -1 \\ 1 & -\mu^2 sA \end{Vmatrix} + O(\mu^3)$$

Тривиальное решение точного прецессионного уравнения при $s > 0$ асимптотически устойчиво, а нутационного – неустойчиво. Если, однако, добавить в уравнения (1.3) члены $\varkappa b\dot{\alpha}$, $\varkappa b\dot{\beta}$, соответствующие силам малого вязкого трения, то нутационные движения описываются уравнением вида (3.3), в котором следует считать

$$\left[G+\mu\varkappa D_1-\mu^2 JG^{-1}C\right]=\begin{Vmatrix}\mu(\varkappa b-\mu sA) & -1\\ 1 & \mu(\varkappa b-\mu sA)\end{Vmatrix}$$

Устойчивость нутационных движений имеет место при условии [1]: $\varkappa bH > sA$, которое в предположении достаточно большой величины собственного кинетического момента H может служить критерием допустимости перехода к прецессионным уравнениям.

4. Системы на подвижных основаниях. Для гироскопических систем, установленных на подвижных основаниях, (к ним, в частности, относятся гирокомпасы), в уравнениях (1.1) следует поменять HG на $HG + G_1$, а C на $HC_0 + C_1$ [8]. Для таких систем расщепляющее преобразование имеет вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + P(\mu)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mu L(\mu)\mathbf{y}_1$$

Здесь матрицы P и L удовлетворяют уравнениям

$$\mu JP^2 = -(G + \mu G_1 + \mu D)P - C_0 - \mu C_1$$
$$-LJ^{-1}(G + \mu G_1 + \mu D_1 + \mu JP) = E + \mu PL \tag{4.1}$$

и могут быть найдены с помощью асимптотических разложений, аналогичных (2.4):

$$P = P_0 + \mu P_1 + \mu^2 P_2 + O(\mu^3), \quad L = L_1 + \mu L_2 + \mu^2 L_3 + O(\mu^3)$$

Имеем, в частности

$$P_0 = -G^{-1}C_0, \quad P_1 = -G^{-1}\left(JP_0^2 + C_1P_0 + DP_0 + C_1\right), \quad L_1 = -G^{-1}J \tag{4.2}$$

Точное прецессионное уравнение для системы, установленной на подвижном основании, имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}_1 - P(\mu)\mathbf{x}_1 = 0 \tag{4.3}$$

а точное нутационное уравнение будет

$$\mu J\dot{\mathbf{y}}_1 + [G + \mu G_1 + \mu D + \mu JP(\mu)]\mathbf{y}_1 = 0 \tag{4.4}$$

Достаточность условия допустимости перехода к уравнениям прецессионной теории гарантируется требованием положительной определенности матрицы $D + 1/2\left[JP + P^T J\right]$.

Уравнения (1.6) гирокомпаса Сперри получаются, при учете выражений (4.1) и (4.2), из уравнений (4.3) и (4.4), если положить

$$J = \begin{Vmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{Vmatrix}, \quad G = \begin{Vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{Vmatrix}, \quad D = 0, \quad G_1 = 0$$

$$C_0 = \begin{Vmatrix}U\cos\varphi & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix}, \quad C_1 = \begin{Vmatrix}0 & M\varepsilon\\ 0 & M\end{Vmatrix}$$

Прецессионные движения гироскопического компаса описываются уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}_1 - \left[P_0 + \mu P_1 + O(\mu^2)\right]\mathbf{x}_1 = 0 \tag{4.5}$$

$$P_0 + \mu P_1 = \begin{Vmatrix}0 & \mu M\\ -U\cos\varphi & -\mu M\varepsilon\end{Vmatrix} \tag{4.6}$$

а нутационные движения соответственно уравнением

$$\mu J\dot{\mathbf{y}}_1 + \left[G + \mu J(P_0 + \mu P_1) + O(\mu^3)\right]\mathbf{y}_1 = 0 \tag{4.7}$$

$$\left[G + \mu J(P_0 + \mu P_1)\right] = \begin{Vmatrix} 0 & 1 + \mu^2 AM \\ -1 - \mu BU\cos\varphi & -\mu^2 BM\varepsilon \end{Vmatrix} \tag{4.8}$$

Из уравнений (4.5) и (4.7) следует, при учете выражений (4.6) и (4.8), что при $\varepsilon > 0$ устойчивы прецессионные движения, но неустойчивы нутационные. Это служит препятствием для перехода к прецессионной теории. Если же $\varepsilon < 0$, то, наоборот, нутационные колебания погашаются, но прецессионные движения неустойчивы. Естественно, в такой ситуации гироскопический компас не может служить в качестве надежного навигационного средства.

Иной результат получается при учете в уравнениях гирокомпаса Сперри диссипативных сил. Допустим, что матрица D является диагональной с элементами Q_1, Q_2 на диагонали. Тогда нутационные колебания описываются уравнением

$$\mu J\dot{\mathbf{y}}_1 + \left[G + \mu D + \mu J(P_0 + \mu P_1) + O(\mu^3)\right]\mathbf{y}_1 = 0$$

$$\left[G + \mu D + \mu J(P_0 + \mu P_1)\right] = \begin{Vmatrix} \mu Q_1 & 1 + \mu^2 AM \\ -1 - \mu BU\cos\varphi & \mu Q_2 - \mu^2 BM\varepsilon \end{Vmatrix}$$

Непосредственная проверка показывает, что условие затухания нутационных колебаний в этом случае принимает вид

$$H(BQ_1 + AQ_2) > ABM\varepsilon \tag{4.9}$$

где следует считать $\varepsilon > 0$. В случае выполнения неравенства (4.9), налагающего определенное условие на величины коэффициентов диссипации Q_1 и Q_2 переход к прецессионным уравнениям при достаточно большом собственном кинетическом моменте гирокомпаса оказывается оправданным, поскольку последние при $\varepsilon > 0$ асимптотически устойчивы. Условию (4.9) при учете диссипации энергии, равно как и условию (3.4) всегда можно удовлетворить выбором достаточно большой величины собственного кинетического момента H.

Применительно к реальным значениям параметров гирокомпаса Сперри и моментов сопротивления в подвесе чувствительного элемента условие (4.9) выполняется с достаточным запасом [9].

Отметим, что вышеперечисленные явления, относящиеся к гирокомпасу Сперри, имеют место и в пространственном двухроторном гирокомпасе Аншютца при наличии дебалансов по обеим экваториальным осям чувствительного элемента [10].

5. Выводы. Остановимся на некоторых общих положениях. Известно, что наличие в уравнениях движения динамических систем с гироскопическими силами неконсервативных структур в позиционных членах способно оказать существенное влияние на обстоятельства устойчивости (неустойчивости) таких систем. В этом случае обоснование законности перехода к упрощенным уравнениям прецессионной теории усложняется, так как ни условие невырожденности матрицы G, ни условие погашения нутационных колебаний не могут служить здесь обоснованием допустимости использования прецессионных уравнений применительно к конкретным гироскопическим приборам.

Использованный в данной работе метод расщепляющих преобразований позволяет преодолеть указанные затруднения. Действительно, в уравнениях (2.3), из которых с помощью асимптотических разложений по степеням μ определяются матрицы P и L, присутствует позиционная матрица C, а в случае подвижного основания, соответственно матрица $HC_0 + C_1$. Эти матрицы всегда можно представить в виде сумм симметрической матрицы консервативных сил и кососимметрической матрицы неконсервативных сил. На обстоятельства устойчивости (неустойчивости) рассматриваемой системы существенно влияет именно матрица неконсервативных сил, если, конечно, она выделяется из уравнений возмущенного движения. В рассмотренных выше примерах это имеет место. Обозначая через C_{1-} кососимметрическую матрицу неконсервативных сил, получаем, что в случае гировертикали с радиальной коррекцией и гирокомпаса Сперри соответственно будет

$$C_{1-} = s\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C_{1-} = \frac{M\varepsilon}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

При наличии неконсервативных структур следует учесть диссипацию энергии и, пользуясь вышеизложенной методикой, обеспечить устойчивость как в точных нутационных уравнениях, так и в точных прецессионных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
2. *Ишлинский А.Ю.* Механика гироскопических систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 482 с.
3. *Кошляков В.Н.* Теория гироскопических компасов. М.: Наука, 1972. 344 с.
4. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
5. *Кошляков В.Н.* Об одном случае неустойчивости быстровращающегося твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 45–50.
6. *Соболев В.А.* Быстрые и медленные движения гироскопических систем // Periodica Polytechnica. Electrical Engineering. 1985. V. 29. No. 1. P. 59–66.
7. *Sobolev V.A.* Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems // Syst. and Control Lett. 1984. No 5. P. 169–179.
8. *Стрыгин В.В., Соболев В.А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988. 256 с.
9. *Булгаков Б.В.* Прикладная теория гироскопов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. 400 с.
10. *Онищенко С.М., Полищук А.Н.* О поведении гирогоризонткомпаса при экваториальном дебалансе чувствительного элемента // Навигационные гироскопические системы. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1973. С. 186–219.

Киев, Самара

Поступила в редакцию
3.VI.1998