МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1998

УДК 539.214;539.374

© 1998 г. М.А. ГУЗЕВ, В.П. МЯСНИКОВ

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА С ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРЫ

В работе показано, что обобщением евклидовой модели сплошной среды для материала с дефектами является модель пространства аффинной связности. Соответствующие геометрические характеристики аффиннометрических пространств оказываются естественными термодинамическими переменными, позволяющими последовательно строить замкнутые модели материалов, включая не только уравнения, но и постановки краевых задач. Рассмотренные модели с дефектами являются расширением классической модели упругопластического тела.

1. Геометрия евклидовой и неевклидовой модели сплошной среды. Геометрической моделью сплошной среды является трехмерное векторное пространство ([1–3]). Выбор такой модели определяется тем фактом, что в рамках классической механики точки (частицы) сплошной среды индивидуализированы, то есть отличны друг от друга, и каждой частице сопоставляется радиус-вектор $\mathbf{r}$, которому соответствует набор координат в некоторой системе отсчета.

Процесс деформирования материала сопровождается изменением взаимного расположения точек среды. Одним из фундаментальных кинематических предположений в евклидовой модели сплошной среды является гипотеза сплошности [1, 2]. Она заключается в том, что класс допустимых кинематических движений среды описывается диффеоморфным отображением начального состояния $\boldsymbol{\xi}$ в текущее состояние $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$. Это означает, что соответствие между координатами $x^i = x^i(\boldsymbol{\xi}, t)$ и ξ^i определяется гладкими функциями и является взаимооднозначным. В этом случае якобиан преобразования $\mathbf{x} \to \boldsymbol{\xi}$, совпадающий с детерминантом матрицы дисторсий $\det\left\|\partial\xi^\alpha / \partial x^i\right\|$, отличен от нуля.

Для количественного описания процесса деформирования в материале необходимо задавать метрическую структуру и структуру аффинной связности: первая позволяет измерять длины векторов и углы между ними, а вторая – сравнивать векторы в различных точках. Дифференциал длины ds (расстояние между двумя бесконечно близкими радиус-векторами) вычисляется через метрический тензор $g_{ij}(\mathbf{x}, t)$ в соответствующей системе координат с помощью квадратичной формы $ds^2 = g_{ij}(\mathbf{x}, t)dx^i dx^j$, где по повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование. Если ввести новые координаты z^i, определяемые через x^i с помощью диффеоморфного отображения, то метрические тензоры связаны преобразованием [1–3]:

$$g_{ij}(\mathbf{z}, t) = g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial x^\alpha \partial x^\beta}{\partial z^i \partial z^j} \tag{1}$$

При пренебрежении релятивистскими эффектами метрика наблюдателя всегда является евклидовой, то есть можно выбрать координаты, в которых

$$g_{ij}(\mathbf{z},t)=\delta_{ij},g_{ij}(\mathbf{x},t)=\frac{\partial z^{\alpha}\partial z^{\alpha}}{\partial x^{i}\partial x^{j}} \quad (2)$$

Метрику наблюдателя называют внешней метрикой [4] и ее представление в различных координатах дается формулой (1).

Рассмотрим состояние материала, в котором лагранжевы координаты ξ^k частицы среды совпадают с начальными координатами ее радиус-вектора. В евклидовой модели сплошной среды предполагается, что можно ввести такие координаты ξ^k, в которых метрический тензор $g_{ij}=\delta_{ij}$, то есть метрика материала (внутренняя метрика среды [4]) совпадает с внешней метрикой. При деформировании материала изменяется его термомеханическое состояние. В [2] вводится эффективный метрический тензор g_{ij}^{eff}, вычисляемый с помощью реологических соотношений через тензор напряжений и температуру среды. Функция g_{ij}^{eff} может рассматриваться в качестве внутренней геометрической характеристики материала и в общем случае имеет неевклидову структуру. Если предполагать, что материал описывается в рамках евклидовой модели сплошной среды, то внутренний метрический тензор g_{ij}^{eff} в переменных наблюдателя x^i совпадает с метрическим тензором, порождаемым отображением $\xi^{\alpha}(\mathbf{x},t)$, т.е. вычисляется [2] по формуле (2):

$$g_{ij}^{eff}(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\xi^{\alpha}\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{i}\partial x^{j}} \quad (3)$$

С другой стороны, поскольку объект g_{ij}^{eff} вводится способом, независимым от геометрических измерений, то существование отображения, обладающего свойством (3), эквивалентно разрешимости системы уравнений (3) относительно дисторсий $\partial\xi^{\alpha}/\partial x^{i}$. В [1, 2] показано, что необходимым и достаточным условием разрешимости этой системы является обращение в нуль тензора Римана R_{ijq}^{l}:

$$R_{ijq}^{l}\equiv\frac{\partial\Gamma_{ij}^{l}}{\partial x^{q}}-\frac{\partial\Gamma_{iq}^{l}}{\partial x^{j}}+\Gamma_{\alpha q}^{l}\Gamma_{ij}^{\alpha}-\Gamma_{\alpha j}^{l}\Gamma_{iq}^{\alpha}=0 \quad (4)$$

Это соотношение представляет условие совместности в евклидовой модели сплошной среды. Для случая малых деформаций оно совпадает с условиями совместности Сен-Венана [1, 2].

Коэффициенты $\Gamma_{ik}^{j}=\Gamma_{ik}^{j}(\mathbf{x},t)$ называются символами Кристоффеля или коэффициентами связности. В евклидовой модели сплошной среды коэффициенты связности обладают свойствами, которые геометрически выделяют эту модель. Первое свойство – это симметрия функций Γ_{ik}^{j} по нижним индексам $\Gamma_{ik}^{j}=\Gamma_{ki}^{j}$. В [1] показано, что это свойство связано с существованием векторного поля, порождающего геометрический базис $\mathbf{e}_k$ сплошной среды в точке (x^1, x^2, x^3). Таким полем является радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки сплошной среды $\mathbf{e}_k=\partial\mathbf{r}/\partial x^k$. Второе свойство – согласованность связности и евклидовой метрики $g_{ij}(\mathbf{x},t)$ (2). По определению, связность Γ_{ik}^{j} называется согласованной с метрикой g_{ij}, если ковариантная производная метрического тензора равна нулю:

$$\partial g_{ij}/\partial x^{k}-\Gamma_{ik}^{s}g_{sj}-\Gamma_{jk}^{s}g_{si}=0 \quad (5)$$

Выражение, стоящее слева в этом тождестве, называется ковариантной производной $\nabla_k g_{ij}$ от метрического тензора. При выполнении условия (5) симметричная связность восстанавливается через метрику единственным способом по формулам

Кристоффеля [1–3]:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{ks} \left[\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^{i}} + \frac{\partial g_{si}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{s}} \right] \tag{6}$$

в которых $\left\| g^{ks} \right\|$ – обратная матрица к матрице $\left\| g_{ks} \right\|$: $g^{i\alpha} g_{\alpha j} = \delta_{j}^{i}$.

Рассмотрим деформацию среды, которая приводит к нарушению диффеоморфизма, то есть для одной точки из начального состояния существует, например, несколько образов. В этом случае говорят, что в среде возникают дефекты. В рамках евклидовой модели сплошной среды можно анализировать поведение сред, содержащих дефектные структуры. Общий подход состоит в том, чтобы строить решения, содержащие особенности на множествах размерности меньшей, чем размерность пространства. Такие множества отождествляют с местом локализации дефектов в материале [5, 6].

Модификация евклидовой модели сплошной среды для описания дефектных структур связана с изменением ее внутренних геометрических свойств. По-прежнему, мы будем полагать, что образом сплошной среды является множество точек M, и задано отображение такого множества точек на область трехмерного евклидова пространства R^3 с координатами x^1, x^2, x^3. Будем также полагать, что можно ввести любые другие координаты (z^1, z^2, z^3), связанные с (x^1, x^2, x^3) диффеоморфным отображением. В геометрии [3] множество M, снабженное набором диффеоморфных координат, называется дифференцируемым многообразием, точки (x^1, x^2, x^3) – точками этого многообразия. Будем понимать материал как трехмерное многообразие M, вложенное в трехмерное евклидово пространство R^3. Для описания его деформации введем понятие длины (расстояния) ds между точками многообразия M с помощью симметричной положительно определенной квадратичной формы

$$ds^2 = G_{ij} / (\mathbf{x}, t) dx^i dx^j \tag{7}$$

вычисляемой на касательном пространстве $T_3(\mathbf{x})$ к многообразию M в точке $\mathbf{x}$. Такое многообразие M называется римановым многообразием [3].

Проводя экспериментальное изучение реальной среды, наблюдатель, напрямую или косвенно, проводит измерение ее различных физических характеристик. Для таких величин следует выбрать подходящий геометрический объект в рамках предложенной модели среды как дифференцируемого многообразия. Возникающие при таком выборе тензорные поля отображают связь физических величин и точек многообразия M.

Рассмотрим физическую величину с индексом и в качестве ее геометрического образа выберем одноконтравариантный тензор $A^i(\mathbf{x}, t)$ из касательного пространства – в самом многообразии векторов нет. Векторы можно сравнивать в одной точке многообразия или в разных точках, в последнем случае необходимы дополнительные соглашения, поскольку в разных точках соответствующие касательные пространства являются различными и необходимо определить закон изменения компонент тензора. Геометрически этому соответствует задание параллельного переноса как решения дифференциального уравнения [5]: $d_p A^i = {}^*\Gamma_{jk}^{i}(\mathbf{x},t) A^k(\mathbf{x},t) dx^j$, где ${}^*\Gamma_{jk}^{i}(\mathbf{x},t)$, – некоторые функции от $\mathbf{x}$, t. Эти функции называются объектами связности, а само многообразие превращается в пространство аффинной связности.

Аффинная связность ${}^*\Gamma_{ij}^{k}$ в отличие от метрической связности Γ_{ij}^{k}, вычисляемой по формулам Кристоффеля (6) не является в общем случае симметричной по нижним индексам. Кроме того, поскольку функции ${}^*\Gamma_{ij}^{k}$ введены независимо от метрического тензора G_{ij}, то, вообще говоря, ковариантная производная от него ${}^*\nabla_k G_{ij} =$

$= \partial G_{ij} / \partial x^k - {}^*\Gamma^q_{ik} G_{qj} - {}^*\Gamma^q_{jk} G_{qi} \neq 0$. Метрика и связность несогласованы. Однако можно показать, что метрическая связность входит в аффинную связность аддитивно [7, 8]:

$$ {}^*\Gamma_{jk,i} = \Gamma_{jk,i} - S_{jk,i} + {}^*C_{ki,j} + {}^*C_{ji,k} + {}^*C_{jk,i} \tag{8} $$

Функции ${}^*\Gamma_{jk,i}$ и $\Gamma_{jk,i}$ вычисляются через аффинную связность ${}^*\Gamma^p_{jk}$, и символы Кристоффеля Γ^p_{jk} с помощью соотношения

$$ {}^*\Gamma_{jk,i} = G_{ip}\,{}^*\Gamma^p_{jk}, \quad \Gamma_{jk,i} = G_{ip}\Gamma^p_{jk}, \quad \Gamma^i_{jk} = G^{ip}\Gamma_{j,p}, \quad G_{ip}G^{jp} = \delta^j_i \tag{9} $$

$$ \Gamma_{jk,i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial G_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial G_{jk}}{\partial x^i} \right) \tag{10} $$

Объект $S_{jk,i}$ называется тензором сегментарной кривизны

$$ S_{jk,i} = \tfrac{1}{2}\left({}^*\nabla_k G_{ij} + {}^*\nabla_j G_{ik} - {}^*\nabla_i G_{jk} \right) \tag{11} $$

Функции ${}^*C_{ij,k}$ являются ковариантными компонентами тензора кручения${}^*C^k_{ij}$:

$$ {}^*C_{ij,k} = G^*_{pk} C^p_{ij}, \quad {}^*C^p_{ij} = \tfrac{1}{2}\left({}^*\Gamma^p_{ij} - {}^*\Gamma^p_{ji} \right) \tag{12} $$

Введенные структуры позволяют учесть следующие свойства многообразия M. Рассмотрим вектор $\mathbf{a}$, принадлежащий касательному пространству $T_3(\mathbf{x})$. Пусть этот вектор переносится параллельно некоторой кривой γ. При возвращении в точку $\mathbf{x}$ вектор $\mathbf{a}$ переходит в вектор $\mathbf{a}'$, лежащий в том же касательном пространстве, но не совпадающий, вообще говоря, с вектором $\mathbf{a}$. Это несовпадение характеризуется следующими эффектами: вектор $\mathbf{a}'$ повернется относительно $\mathbf{a}$, изменится его длина, а образ контура γ в касательном пространстве окажется разомкнутым на ненулевой вектор. Эти эффекты определяются соответственно тензором кривизны связности (4), тензором сегментарной кривизны (11) и тензором кручения (12) (см., например, [8]).

2. Выбор термодинамических переменных. При использовании стандартного формализма [9] неравновесной термодинамики для записи уравнения состояния материала необходимо задавать внутреннюю энергию и диссипативную функцию. Внутреннюю энергию мы рассматриваем как функцию энтропии и некоторых дополнительных переменных, выбор которых зависит от физических условий процесса деформирования. В частности, в классической теории упругости такими переменными являются компоненты тензора обратимой деформации. По предположению, их обычно отождествляют с компонентами тензора полной деформации – тензора Альманси. Тогда геометрическая модель сплошной среды имеет евклидову структуру. Однако, в общем случае, при произвольном деформировании материала такое отождествление несправедливо, поскольку его полная деформация состоит из обратимой (упругой) и необратимой (пластической) части. Процессы необратимого деформирования связаны с диссипацией энергии в материале и, как отмечают многие исследователи (см., например, [10]) приводят к формированию диссипативных структур в среде. Их обычно рассматривают как области неоднородной деформации материала, в которых реализуется максимальная диссипация внешнего потока энергии. Экспериментально установлено [10], что структуры имеют несколько масштабных уровней. На каждом из них проявляется взаимодействие дефектов различных типов. Рассматривая непрерывное распределение дислокаций, Кондо и Билби, см. [11,с. 90], получили интерпретацию дефектов такого типа, привлекая представления неримановой геометрии. Фактически, они впервые предложили использовать аффинно-метрические объекты для описания дефектных структур. Классификация теорий, использующих аффинно-метрическую структуру, приведена в [8]. Соответствующие примеры физических систем с дефектами различных типов указаны в работе [12]. Принято сопоставлять дислокациям – тензор кручения, дисклинациям – тензор Римана, точечным дефектам – тензор сегментарной кривизны. Тогда эти тензоры вместе с метрическим тензором должны рассматриваться как возможные "кандидаты" в качестве внутренних термодинамических переменных [13].

План дальнейшего изложения таков. Рассмотрим две неевклидовы модели сплошной среды: для первой из них дополнительным набором переменных для внутренней энергии, кроме энтропии, являются неевклидовы дисторсии и тензор кручения, а для второй модели – тензор внутренней деформации и тензор Римана. Неевклидовы дисторсии возникают при обобщении соотношения между лагранжевыми ξ^i и эйлеровыми x^i координатами при наличии дефектов в среде: вместо соотношения

$$d\xi^i = p^i_k dx^k, \quad p^i_k = \partial\xi^i / \partial x^k \tag{13}$$

известного в евклидовой модели сплошной среды, задаем соответствующую связь координат в виде

$$d\xi^i = P^i_k dx^k \tag{14}$$

с помощью невырожденного матричного преобразования $P^i_k = P^i_k(\mathbf{x}, t)$ в переменных Эйлера. Представление (14) использовалось ранее Р. де Витом (см., [11, с. 186]). Дополнительно мы предполагаем, что в переменных наблюдателя метрический тензор $G_{ij}(\mathbf{x}, t)$ представляется через матрицу $\left\| P^k_i \right\|$ в следующем виде:

$$G_{ij} = P^\alpha_i P^\alpha_j \tag{15}$$

В теории дислокаций матрица $\left\| P^k_i \right\|$ определяет тензор Бюргерса [2, 5, 6, 11]:

$$B^i_k = -\varepsilon_{k\alpha\beta} \partial_\alpha P^i_\beta \tag{16}$$

где $\varepsilon_{k\alpha\beta}$ – символ Леви-Чивиты (антисимметричный по всем индексам тензор), $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$. Если в материале отсутствуют дефекты (тензор Бюргерса равен нулю), то преобразование $\left\| P^k_i \right\|$ удовлетворяет условию $\partial P^i_k / \partial x^j = \partial P^i_j / \partial x^k$, и для него существует порождающее поле $\psi^i = \psi^i(\mathbf{x}, t)$ такое, что $P^i_k = \partial\psi^i / \partial x^k$. Тогда функции P^i_k имеют структуру евклидовых дисторсий $\partial\xi^\alpha/\partial x^i$.

Для второй неевклидовой модели сплошной среды тензор внутренней деформации вводится как мера отклонения от начальной евклидовой метрической структуры

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\delta_{ij} - G_{ij}\right) \tag{17}$$

Эта формула представляет естественное обобщение меры деформации в евклидовой модели сплошной среды – тензора Альманси [1, 2]. Для обоих типов моделей дополнительно предполагаем, что и метрика согласована со связностью, то есть ковариантная производная $^*\nabla_k G_{ij} = 0$ и, как следствие (11), тензор сегментарной кривизны $S_{jk,i} = 0$. Условие согласованности метрики и связности записывается в виде

$$\partial G_{ij} / \partial x^l = {}^*\Gamma_{il,j} + {}^*\Gamma_{jl,i} \tag{18}$$

где функции, стоящие справа, определены в (9). Для второй неевклидовой модели сплошной среды мы рассмотрим связность, совпадающую с метрической $^*\Gamma_{jk,i} = \Gamma_{jk,i}$; тогда $\Gamma_{jk,i}$ вычисляется в соответствии с (10).

Для каждого из наборов термодинамических переменных мы построим соответствующие уравнения переноса и запишем уравнения состояния материала. Ниже будет показано, что получаемые для этих случаев уравнения сплошной среды имеют различную дифференциальную структуру и для них необходимо задавать разные краевые условия. Поскольку выбор того или иного типа уравнений для описания механической и термической эволюции материала определяется природой дефектов, то получаемые решения будут характеризовать разные пространственно-временные структуры возникающие при деформировании материала с определенными физико-механическими свойствами.

3. Уравнение для обобщенных дисторсий и тензора кручения. Вычислим сначала коэффициенты связности $^*\Gamma_{jk,i}$ и компоненты тензора кручения $^*C_{ij}^k$ через обобщенные дисторсии P_i^k.

Продифференцируем уравнение (15) по x^k:

$$\partial_k G_{ij} = \partial_k P_i^\alpha P_j^\alpha + P_i^\alpha \partial_k P_j^\alpha \tag{19}$$

Выполним циклическую перестановку индексов k, i, j в (19), записывая

$$\partial_j G_{ki} = \partial_j P_k^\alpha P_i^\alpha + P_k^\alpha \partial_j P_i^\alpha, \quad \partial_i G_{jk} = \partial_i P_j^\alpha P_k^\alpha + P_j^\alpha \partial_i P_k^\alpha \tag{20}$$

и в соответствии с (10) определяем $\Gamma_{jk,i}$:

$$2\Gamma_{jk,i} = \left(\partial_k P_i^\alpha - \partial_i P_k^\alpha\right) P_j^\alpha + \left(\partial_j P_i^\alpha - \partial_i P_j^\alpha\right) P_k^\alpha + P_i^\alpha \left(\partial_k P_j^\alpha + \partial_j P_k^\alpha\right) \tag{21}$$

При сделанных предположениях из уравнения (8) следует

$$\Gamma_{jk,i} = {}^*\Gamma_{jk,i} - {}^*C_{ki,j} - {}^*C_{ji,k} - {}^*C_{jk,i} \tag{22}$$

Сравнивая правые части соотношений (21), (22), имеем

$$^*C_{ik,j} = -C_{ik}^\alpha P_j^\alpha, \quad C_{ik}^\alpha = \tfrac{1}{2}\left(\partial_i P_k^\alpha - \partial_k P_i^\alpha\right) \tag{23}$$

$$^*\Gamma_{jk,i} = P_i^\alpha \partial_k P_j^\alpha \tag{24}$$

Здесь введен тензор C_{ik}^α, называемый в геометрии объектом неголономности [7]. Поскольку матрицы $\|G_{ij}\|$, $\|P_k^i\|$ предполагаются невырожденными, то соответствие между функциями $^*C_{ij,k}$,$^*C_{ij}^k$, C_{ij}^k, является взаимооднозначным, поэтому уравнения переноса можно записать для любой из них. Мы рассмотрим объект неголономности C_{ij}^k.

Хорошо известно [2], что в евклидовой модели сплошной среды уравнения переноса для дисторсий p_i^k (13) имеет следующий вид:

$$\frac{dp_i^k}{dt} + p_l^k \frac{\partial \upsilon^l}{\partial x^i} = 0, \quad \frac{dp_i^k}{dt} = \frac{\partial p_i^k}{\partial t} + \upsilon^l \frac{\partial p_i^k}{\partial x^l} \tag{25}$$

Представим обобщенные дисторсии P_i^k в виде:

$$P_i^k = \frac{\partial \Psi^k}{\partial x^i} + \left(P_i^k - \frac{\partial \Psi^k}{\partial x^i}\right) \equiv \frac{\partial \Psi^k}{\partial x^i} + \phi_i^k \tag{26}$$

с произвольной функцией $\Psi^k = \Psi^k(\mathbf{x}, t)$. Функцию Ψ^k можно выбрать различными способами. Полагая $\Psi^k(\mathbf{x}, t) = \xi^k(\mathbf{x}, t)$ в (26), мы задаем соотношение между P_i^k и евклидовой дисторсией $p_i^k = \partial \xi^k(\mathbf{x}, t) / \partial x^k$ в аддитивной форме:

$$P_i^k(\mathbf{x}, t) = p_i^k(\mathbf{x}, t) + \phi_i^k(\mathbf{x}, t) \tag{27}$$

Предполагая в начальный момент времени t_0 состояние среды евклидовым, имеем $P_i^k(\mathbf{x}, t_0) = p_i^k(\mathbf{x}, t_0) = \partial \xi^k(\mathbf{x}, t_0) / \partial x^i = \delta_i^k$ и функции ϕ_i^k удовлетворяют нулевому начальному условию:

$$\phi_i^k(\mathbf{x}(\xi,t),t)\big|_{t=t_0}=0 \qquad (28)$$

Запишем для $\phi_i^k=\phi_i^k(\mathbf{x},t)$ уравнение переноса, аналогичное уравнению для классических дисторсий (25). В соответствии с (25) представим его в виде

$$d\phi_i^k/dt+\phi_s^k\partial\upsilon^s/\partial x^i=-I_i^k \qquad (29)$$

с начальным условием (28). В правой части (29) введен источник $I_i^k=I_i^k(\mathbf{x},t)$. Поскольку уравнение (29) – линейное, то при условии (28) оно имеет нетривиальное решение, если $I_i^k\neq 0$. Из (25), (29) следует уравнение для обобщенных дисторсий P_i^k:

$$\frac{dP_i^k}{dt}+P_s^k\frac{\partial\upsilon^s}{\partial x^i}=-I_i^k,\quad P_i^k\big|_{t=t_0}=\delta_i^k \qquad (30)$$

Чтобы получить уравнение переноса для тензора C_{ij}^k, продифференцируем (29) по x^i:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x^i}\phi_j^k+\upsilon^l\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial}{\partial x^i}\phi_j^k+\frac{\partial\upsilon^l}{\partial x^i}\frac{\partial\phi_j^l}{\partial x^l}+\frac{\partial\phi_l^k}{\partial x^i}\frac{\partial\upsilon^l}{\partial x^j}+\phi_l^k\frac{\partial^2\upsilon^l}{\partial x^i\partial x^j}=-\frac{\partial I_j^k}{\partial x^i} \qquad (31)$$

Переставим индексы $i\to j$ в (31) и вычтем полученное выражение из (31), это дает уравнение на тензор C_{ij}^k (23) в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}C_{ij}^k+C_{il}^k\frac{\partial\upsilon^l}{\partial x^j}+\frac{\partial\upsilon^l}{\partial x^i}C_{lj}^k=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial I_j^k}{\partial x^i}-\frac{\partial I_i^k}{\partial x^j}\right),\quad C_{ij}^k\big|_{t=t_0}=0 \qquad (32)$$

Поскольку уравнение (32) является линейным, то для нулевой правой части (32) (нулевой ротор источника по нижним индексам) тензор $C_{ij}^k=0$. С другой стороны, структура уравнения (32) такова, что функции $C_{ij}^k=0$ не изменяются при градиентном преобразовании $I_i^k\to I_i^k+\partial\tau^k/\partial x^i$. Такие преобразования порождают некоторый класс решений для обобщенных дисторсий, для которых характеристика дефектности C_{ij}^k не изменяется. Тогда они не должны выводить из класса диффеоморфных отображений, связывающих различные состояния деформируемого материала. Справедливо следующее утверждение: если источник допускает представление в градиентном виде

$$I_i^k(\mathbf{x},t)=\partial f^k(\mathbf{x},t)/\partial x^i \qquad (33)$$

с некоторой функцией $f^k=f^k(\mathbf{x},t)$, то существует векторное поле $\mathbf{y}=\mathbf{y}(\mathbf{x},t)=$ $=(y^1,y^2,y^3)$, порождающее функции P_i^k:

$$P_i^k=\partial y^k/\partial x^i \qquad (34)$$

Смысл этого утверждения состоит в том, что для процесса деформации в среде с источником градиентного вида (33) геометрическая структура дисторсий P_i^k остается евклидовой.

Действительно, пусть существует векторное поле $\mathbf{y}$, обладающее свойством (34). Получим уравнение для определения y^i через заданные функции f^i, υ^i. Из (30), (34) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}+\upsilon^l\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}+\frac{\partial\upsilon^l}{\partial x^i}\frac{\partial y^k}{\partial x^l}=-\frac{\partial f^k}{\partial x^i} \qquad (35)$$

Второе и третье слагаемые слева в (35) группируются в $\partial\left[v^l dy^k / \partial x^l\right] / \partial x^i$ и (35) переписывается в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial y^k}{\partial t}+v^l\frac{\partial y^k}{\partial x^l}\right]=-\frac{\partial f^k}{\partial x^i}$$

Отсюда имеем уравнение для определения функций $y^i = y^i(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial y^k}{\partial t}=\frac{\partial y^k}{\partial t}+v^l\frac{\partial y^k}{\partial x^l}=-f^k;\quad y^k\Big|_{t=t_0}=x^k=\xi^i \tag{36}$$

Его решение представляется в виде суммы соответствующего решения однородного уравнения с начальным условием (36) и частного решения неоднородного с нулевым начальным условием. Решение однородного совпадает с функцией $\xi^k(\mathbf{x}, t)$, а решение неоднородного дается квадратурой от $f^k(\mathbf{x}, t)$ вдоль траекторий $x^k(\boldsymbol{\xi}, t)$, которые определяются из уравнения

$$\partial x^k(\boldsymbol{\xi},t)/\partial t=v^k(\mathbf{x},t),\quad x^k\Big|_{t=t_0}=\xi^k$$

4. Термодинамика материала с дислокациями и уравнения состояния. Согласно намеченной программе рассмотрим полные дисторсии P_i^k и объект неголономности C_{ij}^k в качестве термодинамических переменных. Пусть внутренняя энергия $U=U\left(s,P_i^k,C_{ij}^k\right)$, где s – энтропия. Будем следовать стандартной схеме неравновесной термодинамики [9]. Запишем уравнения законов сохранения массы, импульса, первый и второй законы термодинамики:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v_k}{\partial x^k}=0,\quad \rho\frac{dv_i}{dt}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x^j}+\rho f_i$$

$$\rho\frac{dU}{dt}=-\frac{\partial J_k^{(q)}}{\partial x^k}+\sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x^j},\quad \rho\frac{ds}{dt}=-\frac{\partial J_k^{(s)}}{\partial x_k}+D,\quad D\geqslant 0 \tag{37}$$

Здесь $J_k^{(q)}$ и $J_k^{(s)}$ – составляющие потоков тепла и энтропии, D – диссипативная функция, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, f_i – ускорения внешних массовых сил, ρ – плотность. Вдоль траектории частицы выполняется тождество Гиббса [9]:

$$\frac{dU}{dt}=T\frac{ds}{dt}+\frac{\partial U}{\partial P_i^k}\frac{dP_i^k}{dt}+\frac{\partial U}{\partial C_{ij}^k}\frac{dC_{ij}^k}{dt} \tag{38}$$

Подставляя в (38) выражения для производных по времени от внутренней энергии и энтропии из (37), получим

$$-\frac{\partial J_k^{(s)}}{\partial x^k}+D=-\frac{1}{T}\frac{\partial J_k^{(q)}}{\partial x^k}+\frac{1}{T}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x^j}-\rho\frac{\partial U}{\partial P_i^k}\frac{dP_i^k}{dt}-\rho\frac{\partial U}{\partial C_{ij}^k}\frac{dC_{ij}^k}{dt}\right) \tag{39}$$

Исключим в правой части (39) производные по времени от P_i^k и C_{ij}^k, используя уравнения переноса (30), (32), тогда после ряда преобразований имеем

$$\sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\rho\frac{\partial U}{\partial P_i^k}\frac{dP_i^k}{dt}-\rho\frac{\partial U}{\partial C_{ij}^k}\frac{dC_{ij}^k}{dt}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij}+\rho P_i^k\frac{\partial U}{\partial P_j^k}-2\rho C_{il}^k\frac{\partial U}{\partial C_{lj}^k}\right)+$$

$$+I_j^k\left(\rho\frac{\partial U}{\partial P_j^k}-\frac{\partial}{\partial x^i}\rho\frac{\partial U}{\partial C_{ij}^k}\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho I_j^k\frac{\partial U}{\partial C_{ij}^k}\right) \tag{40}$$

Подставим (40) в (39) и выделим потоковые слагаемые так, чтобы в правой части остались только те слагаемые, которые образуют билинейную форму термодинамических сил и потоков. В результате придем к следующему соотношению:

$$-\frac{\partial}{\partial x^i}\left[J_i^{(s)}-\frac{1}{T}J_i^{(q)}+\frac{\rho}{T}I_j^k\frac{\partial U}{\partial C_{ij}^k}\right]+D=\frac{1}{T}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij}+\rho P_i^k\frac{\partial U}{\partial P_j^k}-2\rho C_{il}^k\frac{\partial U}{\partial C_{lj}^k}\right)+$$
$$+\frac{I_j^k}{T}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial P_j^k}-\frac{\partial}{\partial x^i}\rho\frac{\partial U}{\partial C_{ij}^k}\right)-\frac{1}{T^2}\left(J_i^{(q)}+I_j^k\rho\frac{\partial U}{\partial C_{ji}^k}\right)\frac{\partial T}{\partial x^i} \tag{41}$$

Стандартный анализ в рамках предположений неравновесной термодинамики [9] приводит к следующему выражению для потока энтропии

$$J_i^{(s)}=\frac{J_i^{(q)}}{T}+\frac{1}{T}I_j^k\rho\frac{\partial U}{\partial C_{ji}^k} \tag{42}$$

Для диссипативной функции получим

$$D=\frac{1}{T}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij}+\rho P_i^k\frac{\partial U}{\partial P_j^k}-2\rho C_{il}^k\frac{\partial U}{\partial C_{lj}^k}\right)+\frac{I_j^k}{T}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial P_j^k}-\frac{\partial}{\partial x^i}\rho\frac{\partial U}{\partial C_{ij}^k}\right)-$$
$$-\frac{1}{T^2}\left(J_i^{(q)}+I_j^k\rho\frac{\partial U}{\partial C_{ji}^k}\right)\frac{\partial T}{\partial x^i} \tag{43}$$

В такой форме диссипативная функция представлена билинейной формой термодинамических сил и потоков:

$$D(X)=X_iY_i,\quad D(X)\geqslant 0 \tag{44}$$

Примем для теплового потока приближение линейных связей

$$J_i^{(q)}=-\lambda_1\frac{\partial T}{\partial x^i}-I_j^k\rho\frac{\partial U}{\partial C_{ji}^k} \tag{45}$$

Феноменологический коэффициент $\lambda_1\geqslant 0$ обеспечивает неотрицательность диссипативной функции. В соответствии с обобщенными принципами Кюри и Онзагера, можно ввести не только линейные, но и нелинейные связи между ними. Естественным обобщением линейной неравновесной термодинамики является конструкция диссипативного потенциала [14]. Пусть справедливо соотношение (44), тогда существует диссипативный потенциал $\Phi_1(X)$ такой, что

$$\Phi_1(X)=\int_0^1 D(\lambda X)\frac{d\lambda}{\lambda},\quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial X_i}=Y_i \tag{46}$$

Структура диссипативной функции D и диссипативного потенциала $\Phi_1(X)$ должны при этом удовлетворять необходимым ограничениям тензорной инвариантности.

Будем предполагать, что внутренняя энергия и диссипативный потенциал заданы. Тогда в соответствии с (37), (42)–(46) запишем полную систему уравнений движения материала с дефектами дислокационного типа в рамках рассматриваемой неевклидовой модели сплошной среды

$$U=U\left(s,P_i^k,C_{ij}^k\right),\quad \Phi_1=\Phi_1\left(I_i^k,e_{ij},T\right),\quad T=\partial U/\partial s$$
$$dP_i^k/dt+P_s^k\partial v^s/\partial x^i=-I_i^k$$
$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x^j}\left(-\rho P_i^k\frac{\partial U}{\partial P_j^k}+2\rho C_{il}^k\frac{\partial U}{\partial C_{lj}^k}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial e_{ij}}\right)+\rho f_i,\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v_k}{\partial x^k}=0 \tag{47}$$

$$\rho\frac{\partial U}{\partial P_j^k}-\frac{\partial}{\partial x^i}\rho\frac{\partial U}{\partial C_{ij}^k}=\frac{\partial \Phi_1}{\partial I_j^k}$$

$$\rho T\frac{ds}{dt}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_1\frac{\partial T}{\partial x^i}\right)+e_{ik}\frac{\partial \Phi_1}{\partial e_{ik}}+I_k^i\frac{\partial \Phi_1}{\partial I_k^i}$$

Система уравнений (47) является замкнутой и при заданных начальных и краевых условиях должна описывать механическую и термическую эволюцию материала. Число таких условий зависит от порядка уравнения. По временной переменной уравнения системы (47) являются уравнениями переноса, поэтому необходимо задавать в начальный момент времени плотность ρ, скорость $\mathbf{v}$, температуру T и обобщенные дисторсии P_i^k. Предполагаем, что начальное состояние является евклидовым, то есть обобщенные дисторсии совпадают с евклидовыми:

$$P_i^k\Big|_{t=t_0}=\delta_i^k \tag{48}$$

Фактически, это означает, что отсчет внутренних деформаций осуществляется от начального выбранного состояния.

Краевые условия на границе S среды должны выделять физически осмысленные решения. На поверхности S могут ставиться обычные силовые условия [1]:

$$\sigma_{ij}n_j\big|S=F_i \tag{49}$$

где n_j – компоненты единичного вектора нормали к границе, F_i – компоненты внешней поверхностной силы. Другой тип краевых условий связан с кинематикой, например, скорость движения точек среды на границе S может совпадать со скоростью движения самой границы $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{v}\big|S=\mathbf{D} \tag{50}$$

Возможны и другие типы кинематических краевых условий или их комбинация с силовыми. На границе среды следует также задать температуру или тепловой поток.

Из (47) видно, что неевклидова дисторсия P_i^k удовлетворяет уравнению второго порядка по пространственной переменной, поэтому для девяти функций P_i^k следует сформулировать девять краевых условий. Возможное, с точки зрения физики, требование заключается в том, что дефекты не выходят за границу S, то есть нормальная компонента вектора потока дефектов обращается в нуль на границе. Компоненты J_i^{disl} вектора потока дефектов входят в общий тепловой поток $J_i^{(q)}$ (45) аддитивно:

$$J_i^{disl}=-I_j^k\rho\partial U/\partial C_{ji}^k \tag{51}$$

Поскольку $n_iJ_i^{disl}=0$ на границе S, то из (51) имеем девять краевых условий в следующей форме:

$$\rho\frac{\partial U}{\partial C_{ji}^k}n_i\big|_S=0 \tag{52}$$

5. Уравнение переноса для тензора внутренних деформаций и тензора кривизны. Тензор полной деформации Альманси в процессе движения изменяется следующим образом [2]:

$$\frac{DA_{ij}}{Dt}\equiv\frac{dA_{ij}}{dt}+A_{ik}\frac{\partial \upsilon^k}{\partial x^j}+A_{jk}\frac{\partial \upsilon^k}{\partial x^i}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon^i}{\partial x^j}+\frac{\partial \upsilon^j}{\partial x^i}\right)\equiv e_{ij} \tag{53}$$

При малых деформациях обычно используется предположение об аддитивности обратимых и необратимых деформаций:

$$A_{ij} = \varepsilon_{ij} + \pi_{ij} \tag{54}$$

Для конечных деформаций общепринятой связи между указанными тремя тензорами нет. В литературе обсуждаются и более сложные, чем (54), нелинейные связи между ними (см., например, [15]). Однако, с феноменологической точки зрения, соотношение (54) может быть использовано и при конечных деформациях. Использование более сложных зависимостей приводит, фактически, к замене переменных во внутренней энергии.

Из (54) следует, что сумма тензоров ε_{ij} и π_{ij} принадлежит к классу тензоров, порождаемых в трехмерном евклидовом пространстве некоторым векторным полем. Каждый из этих тензоров сам по себе не обязан принадлежать к указанному выше классу и не порождаются, вообще говоря, каким-либо векторным полем.

В соответствии с (53) имеем

$$e_{ij} = D\varepsilon_{ij} / Dt + D\pi_{ij} / Dt \tag{55}$$

Введем [16] источник E_{ij} деформаций π_{ij}, полагая

$$D\pi_{ij} / Dt = E_{ij} \tag{56}$$

В силу симметрии π_{ij} величины $E_{ij} = E_{ji}$. Комбинируя (55), (56), получаем уравнение переноса для тензора деформации ε_{ij}:

$$D\varepsilon_{ij} / Dt = e_{ij} - E_{ij} \tag{57}$$

Отсюда и из (17) следует уравнение для метрического тензора G_{ij}:

$$\frac{DG_{ij}}{Dt} = \frac{dG_{ij}}{dt} + G_{il}\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x^j} + \frac{\partial \upsilon_l}{\partial x^i}G_{lj} = 2E_{ij} \tag{58}$$

Получим уравнения переноса для тензора Римана R^i_{lkj}. Ниже будет показано, что оно является линейным и содержит в качестве задаваемых функций компоненты скорости υ^k точек среды и источника E_{ij}. Введем в рассмотрение ковариантные компоненты тензора Римана

$$R_{lijq} = R^p_{ijq}G_{pl}, \quad R^l_{ijq} = G^{lp}R_{pijq}, \quad R_{lijq} = -R_{iljq} = -R_{jqil} \tag{59}$$

Подстановка сюда представления для R^p_{ijq} из (4) дает

$$\begin{gathered} R_{lijq} = \frac{\partial}{\partial x^q}(\Gamma^p_{ij}G_{pl}) - \frac{\partial}{\partial x^j}(\Gamma^p_{iq}G_{pl}) - \\ -\Gamma^p_{ij}\frac{\partial}{\partial x^q}G_{pl} + \Gamma^p_{iq}\frac{\partial}{\partial x^j}G_{pl} + (\Gamma^s_{ij}\Gamma^p_{sq} - \Gamma^s_{iq}\Gamma^p_{sj})G_{pl} \end{gathered} \tag{60}$$

Используя (9), (18), запишем (60) в виде

$$R_{lijq} = \frac{\partial}{\partial x^q}\Gamma_{ij,l} - \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma_{iq,l} + G^{ps}(\Gamma_{iq,s}\Gamma_{jl,p} - \Gamma_{ij,s}\Gamma_{ql,p}) \tag{61}$$

Первым шагом при выводе уравнения переноса для R_{lijq} является получение динамического уравнения для $\Gamma_{qk,i}$. Эти функции вычисляются в соответствии с (10). С другой стороны, динамическое уравнение для производной от метрического тензора мы получаем из (58) после дифференцирования по координате

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\frac{\partial G_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial \upsilon^s}{\partial x^l}\frac{\partial G_{ij}}{\partial x^s} + \frac{\partial G_{is}}{\partial x^l}\frac{\partial \upsilon^s}{\partial x^j} + \frac{\partial \upsilon^s}{\partial x^i}\frac{\partial G_{sj}}{\partial x^l} + \\ +G_{is}\frac{\partial^2 \upsilon^s}{\partial x^l \partial x^j} + G_{js}\frac{\partial^2 \upsilon^s}{\partial x^l \partial x^i} = 2\frac{\partial E_{ij}}{\partial x^l} \end{gathered} \tag{62}$$

Для каждой из производных в правой части (10) запишем уравнение, аналогичное (62), затем находим их комбинацию в соответствии с (10). Тогда под знаком d/dt появляется функция $\Gamma_{ij,l}$, а остальные слагаемые полученного соотношения сгруппируем при одинаковых производных $\partial \upsilon^{\beta}/\partial x^{\alpha}$, используя (10), в результате получаем следующее уравнение для $\Gamma_{ij,l}$:

$$\frac{d}{dt}\Gamma_{ij,l}+\frac{\partial \upsilon^{s}}{\partial x^{i}}\Gamma_{sj,l}+\Gamma_{is,l}\frac{\partial \upsilon^{s}}{\partial x^{j}}+\Gamma_{ij,s}\frac{\partial \upsilon^{s}}{\partial x^{l}}+G_{ls}\frac{\partial^{2}\upsilon^{s}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}=D_{ij,l} \tag{63}$$

$$D_{ij,l}=\frac{\partial E_{li}}{\partial x^{j}}+\frac{\partial E_{lj}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial E_{ij}}{\partial x^{l}} \tag{64}$$

Теперь рассмотрим в (61) вклад с производными

$$\partial \Gamma_{ij,l}/\partial x^{q}-\partial \Gamma_{iq,l}/\partial x^{j}\equiv S_{lijq} \tag{65}$$

Комбинирование (63), (65) дает уравнение для S_{lijq}:

$$\frac{d}{dt}S_{lijq}+\frac{\partial \upsilon^{p}}{\partial x^{l}}S_{pijq}+\frac{\partial \upsilon^{p}}{\partial x^{i}}S_{lpjq}+\frac{\partial \upsilon^{p}}{\partial x^{j}}S_{lipq}+\frac{\partial \upsilon^{p}}{\partial x^{q}}S_{lijp}+$$
$$+\left(\Gamma_{ij,p}\frac{\partial}{\partial x^{l}}-\Gamma_{lj,p}\frac{\partial}{\partial x^{i}}\right)\frac{\partial \upsilon^{p}}{\partial x^{q}}+\left(\Gamma_{lq,p}\frac{\partial}{\partial x^{i}}-\Gamma_{iq,p}\frac{\partial}{\partial x^{l}}\right)\frac{\partial \upsilon^{p}}{\partial x^{j}}= \tag{66}$$
$$=\left(\frac{\partial D_{ij,l}}{\partial x^{q}}-\frac{\partial D_{iq,l}}{\partial x^{j}}\right)$$

Функция S_{lijq} вычисляется через метрику G_{ij}, в частности, из (65), (10) получим

$$S_{lijq}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^{2}G_{lj}}{\partial x^{i}\partial x^{q}}+\frac{\partial^{2}G_{iq}}{\partial x^{l}\partial x^{j}}-\frac{\partial^{2}G_{ij}}{\partial x^{l}\partial x^{q}}-\frac{\partial^{2}G_{lq}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}\right] \tag{67}$$

Если модель среды является евклидовой, то для малых деформаций должно выполняться условие совместности Сен-Венана [1, 2], которое соответствует обращению в нуль правой части соотношения (67), где G_{ij} совпадают с компонентами евклидова метрического тензора. Для неевклидовой модели среды $S_{lijq}\neq 0$.

Предпоследний шаг в выводе уравнения для R_{lijq} – это запись соответствующего уравнения для G^{ps}. Дифференцируя последнее соотношение в (9), имеем

$$\frac{dG^{pq}}{dt}G_{qs}+G^{pq}\frac{dG_{qs}}{dt}=0,\qquad \frac{dG^{ps}}{dt}=-G^{pq}\frac{dG_{qk}}{dt}G^{ks}$$

Подстановка сюда dG_{qk}/dt из (58) дает

$$\frac{dG^{ps}}{dt}=\frac{\partial \upsilon^{p}}{\partial x^{q}}G^{qs}+\frac{\partial \upsilon^{s}}{\partial x^{q}}G^{qp}-2G^{pq}G^{sk}E_{qk} \tag{68}$$

Вывод уравнения для тензора R_{lijq} теперь представляет рутинное вычисление: воспользовавшись (63), (66), (68), получаем

$$\frac{d}{dt}R_{lijq}+\frac{\partial \upsilon^{p}}{\partial x^{l}}R_{pijq}+\frac{\partial \upsilon^{p}}{\partial x^{i}}R_{lpjq}+\frac{\partial \upsilon^{p}}{\partial x^{j}}R_{lipq}+\frac{\partial \upsilon^{p}}{\partial x^{q}}R_{lijp}=$$
$$=(\partial D_{ij,l}/\partial x^{q}-\partial D_{iq,l}/\partial x^{j})+ \tag{69}$$
$$+G^{ps}(\Gamma_{jl,p}D_{iq,s}+\Gamma_{iq,s}D_{jl,p}-\Gamma_{ql,p}D_{ij,s}-\Gamma_{ij,s}D_{ql,p})-$$
$$-2G^{pk}G^{nm}E_{kn}(\Gamma_{iq,m}\Gamma_{jl,p}-\Gamma_{ij,m}\Gamma_{ql,p})$$

Запишем правую часть уравнения (69) в ковариантной форме. С этой целью воспользуемся определением ковариантной производной относительно метрической связности для компонент тензора [3, С. 259]. Оно позволяет выразить частную производную по координате от источника E_{ij}, входящего в $D_{ij,l}$ (63), через соответствующую ковариантную производную, а также частную производную по координате от ковариантной производной источника, которая появляется в объекте $\partial D_{ij,l}/\partial x$:

$$\partial_k E_{ij} = \nabla_k E_{ij} + \Gamma^{\alpha}_{ik} E_{\alpha j} + \Gamma^{\alpha}_{jk} E_{i\alpha} \tag{70}$$

$$\partial_q \nabla_k E_{ij} = \nabla_q \nabla_k E_{ij} + \Gamma^{\alpha}_{kq} \nabla_{\alpha} E_{ij} + \Gamma^{\alpha}_{iq} \nabla_k E_{\alpha j} + \Gamma^{\alpha}_{jq} \nabla_k E_{i\alpha}$$

Комбинируя соотношения (64), (69), (70) и переходя от $\Gamma_{ij,k}$ к Γ^k_{ij} в (69) согласно (10), перепишем уравнение (69) в следующем виде

$$\frac{d}{dt} R_{lijq} + \frac{\partial \upsilon^p}{\partial x^l} R_{pijq} + \frac{\partial \upsilon^p}{\partial x^i} R_{lpjq} + \frac{\partial \upsilon^p}{\partial x^j} R_{lipq} + \frac{\partial \upsilon^p}{\partial x^q} R_{lijp} +$$
$$-2G^{ps} R_{sijq} E_{pl} = \nabla_q (\nabla_i E_{jl} - \nabla_l E_{ij}) + \nabla_j (\nabla_l E_{iq} - \nabla_i E_{ql}) \tag{71}$$

В соответствии с (59) поднимаем индекс у R_{lijq}, а при вычислении производной dR^l_{ijq}/dt используем формулу (68), в результате имеем

$$\frac{d}{dt} R^l_{ijq} + \frac{\partial \upsilon^p}{\partial x^i} R^l_{pjq} + \frac{\partial \upsilon^p}{\partial x^j} R^l_{ipq} + \frac{\partial \upsilon^p}{\partial x^q} R^l_{ijp} - \frac{\partial \upsilon^l}{\partial x^p} R^p_{ijq} =$$
$$= G^{lp} [\nabla_q (\nabla_i E_{jp} - \nabla_p E_{ij}) + \nabla_j (\nabla_p E_{iq} - \nabla_i E_{pq})] \tag{72}$$

Докажем следующее свойство связности, согласованной с метрикой: операция поднятия тензорного индекса коммутирует с ковариантным дифференцированием (коммутирование операции опускания тензорного индекса с операцией ковариантного дифференцирования доказано в [3, С. 265]). Для доказательства применяем формулу Лейбница [3, С. 259] при дифференцировании произведения тензоров. Сформулированное свойство будет доказано, если показать, что ковариантная производная $\nabla_k G^{ij}$ равна нулю при выполнении условия согласования метрики и связности – соотношение (18). Дифференцируя последнее соотношение в формуле (9), имеем

$$\frac{\partial G^{ip}}{\partial x^k} G_{pj} + G^{ip} \frac{\partial G_{pj}}{\partial x^k} = 0, \quad \frac{\partial G^{ij}}{\partial x^k} = -G^{ip} \frac{\partial G_{pn}}{\partial x^k} G^{nj}$$

Отсюда и из (18) следует, что

$$\partial G^{ij} / \partial x^k + \Gamma^i_{pk} G^{pj} + \Gamma^j_{pk} G^{pi} = 0 \tag{73}$$

Объект, стоящий слева в (73), совпадает, по определению [3, С. 259], с ковариантной производной $\nabla_k G^{ij}$. Поскольку она равна нулю, то сформулированное свойство доказано.

Это свойство метрики позволяет внести G^{lp} под знак ковариантного дифференцирования и поднять индексы у тензоров в (72):

$$G^{lp} E_{pj} = E^l_j, \quad G^{lp} \nabla_p E_{ij} \equiv \nabla^l E_{ij}$$

В результате уравнение переноса для тензора Римана R^l_{ijq} имеет следующий вид в ковариантной форме:

$$\frac{d}{dt} R^l_{ijq} + \frac{\partial \upsilon^p}{\partial x^i} R^l_{pjq} + \frac{\partial \upsilon^p}{\partial x^j} R^l_{ipq} + \frac{\partial \upsilon^p}{\partial x^q} R^l_{ijp} - \frac{\partial \upsilon^l}{\partial x^p} R^p_{ijq} =$$
$$= \nabla_q (\nabla_i E^l_j - \nabla^l E_{ij}) + \nabla_j (\nabla^l E_{iq} - \nabla_i E^l_q). \tag{74}$$

Заметим, что уравнения (69), (74) имеют "правильную" структуру слева: в (69), (74) под знаком линейного дифференциального оператора стоит только тензор Римана.

6. Полная система уравнений материала с дисклинациями. Общая идея получения уравнений состояния материала такая же, как и для выше рассмотренной первой неевклидовой модели сплошной среды: полагая внутреннюю энергию U материала функцией энтропии s, внутренней деформации ε_{ij} и тензора Римана R_{lijq}, записываем тождество Гиббса вдоль траектории частицы, затем, используя уравнения переноса (57) и (69), исключаем временные производные от ε_{ij} и R_{lijq}, тогда, выделяя потоковые слагаемые и образуя билинейную форму термодинамических сил и потоков, можно получить представление для потоков и диссипативной функции. Опуская простые, но громоздкие вычисления, для теплового потока приближение линейных связей дает

$$J_k^{(q)} = -\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x_k} - 4\left(E_{ij} \frac{\partial}{\partial x^q} \rho J_{kijq} - \rho J_{qijk} \frac{\partial}{\partial x^q} E_{ij} \right) - 4\rho E_{ij} (J_{ilpk}\Gamma^j_{lp} + J_{klpj}\Gamma^i_{lp} - J_{ilpj}\Gamma^k_{lp}) \quad (75)$$

$$J_{ljpq} = \partial U / \partial R_{ljpq}$$

Вводя диссипативный потенциал $\Phi_2 = \Phi_2(X)$, запишем полную систему уравнений для материала с дефектами дисклинационного типа:

$$U = U(s, \varepsilon_{ij}, R_{lijq}), \quad \Phi_2 = \Phi_2(E_{ij}, e_{ij}, T), \quad T = \partial U / \partial s$$

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \varepsilon_{ik} \frac{\partial v^k}{\partial x^j} + \varepsilon_{jk} \frac{\partial v^k}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) - E_{ij}$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left((\delta_{ik} - 2\varepsilon_{ik})\rho \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{kj}} + 4R_{ilpq}\rho \frac{\partial U}{\partial R_{ljpq}} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial e_{ij}} \right) + \rho f_i \quad (76)$$

$$\partial \rho / \partial t + \partial \rho v_k / \partial x^k = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial E_{ij}} = \rho \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} - \left[-4 \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^q} \rho J_{lijq} + 4 \frac{\partial}{\partial x^q} \rho (J_{ilpq}\Gamma^j_{lp} + \right.$$

$$\left. + J_{qlpj}\Gamma^i_{lp} - J_{ilpj}\Gamma^q_{lp}) - 2\rho J_{lkpq}(\Gamma^i_{lp}\Gamma^j_{kq} - \Gamma^i_{lq}\Gamma^j_{kp}) \right]$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) + e_{ik} \frac{\partial \Phi_2}{\partial e_{ik}} + E_{ij} \frac{\partial \Phi_2}{\partial E_{ij}}$$

Для системы уравнений (76) в начальный момент времени следует задавать плотность ρ, скорость $\mathbf{v}$, температуру T и тензор внутренней деформации ε_{ij}. По аналогии с (48), имеем

$$\varepsilon_{ij}|_{t=t_0} = 0 \quad (77)$$

Для системы уравнений (76) остаются справедливыми силовые (49) и кинематические (50) краевые условия. На границе следует задать температуру или тепловой поток, и потребовать обращение в нуль нормальной компоненты вектора потока дефектов. Компоненты J_k^{disc} вектора потока дефектов входят в общий тепловой поток $J_k^{(q)}$ (75) аддитивно:

$$J_k^{disc} = -4\left(E_{ij} \frac{\partial}{\partial x^q} \rho J_{kijq} - \rho J_{qijk} \frac{\partial}{\partial x^q} E_{ij} + \rho E_{ij} (J_{ilpk}\Gamma^j_{lp} + J_{klpj}\Gamma^i_{lp} - J_{ilpj}\Gamma^k_{lp}) \right) \quad (78)$$

Поскольку функции E_{ij} и $\partial E_{ij}/\partial x$ являются независимыми, то из (78) при условии

$n_k J_k^{disc} = 0$ на границе S следует

$$n_k J_{kijq}|_S = 0, \quad n_k\left[\frac{\partial}{\partial x^q}\rho J_{kijq} + \rho(J_{ilpk}\Gamma^j_{lp} + J_{klpj}\Gamma^i_{lp} - J_{ilpj}\Gamma^k_{lp})\right]\Bigg|_S = 0 \tag{79}$$

В трехмерном пространстве тензор Римана имеет шесть независимых компонент, поэтому (79) представляют двенадцать краевых условий для тензора внутренней деформации. При этом само уравнение для ε_{ij} имеет четвертый порядок по пространственным переменным.

7. Классические упругопластические модели. Рассмотренные выше модели с дефектами являются расширением классической модели идеально упругопластического тела. Действительно, пусть $U = U(s, \varepsilon_{ij})$. Тогда уравнения (76) будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho v_k}{\partial x^k} = 0, \quad \rho\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left((\delta_{ik} - 2\varepsilon_{ik})\rho\frac{\partial U}{\partial\varepsilon_{kj}} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial e_{ij}}\right) + \rho f_i$$

$$T = \frac{\partial U}{\partial s}, \quad \rho T\frac{ds}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_2\frac{\partial T}{\partial x^i}\right) + e_{ik}\frac{\partial\Phi_2}{\partial e_{ik}} + E_{ij}\frac{\partial\Phi_2}{\partial E_{ij}} \tag{80}$$

$$U = U(s, \varepsilon_{ij}), \quad \Phi_2 = \Phi_2(E_{ij}, e_{ij}, T)$$

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \varepsilon_{ik}\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + \varepsilon_{jk}\frac{\partial v^k}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right) - E_{ij}$$

$$\rho\partial U/\partial\varepsilon_{ij} = \partial\Phi_2/\partial E_{ij}$$

Рассмотрим простейший вариант теории, полагая $D = D(T, E_{ij})$. В этом случае

$$D = \rho E_{ij}\partial U/\partial\varepsilon_{ij} \tag{81}$$

Выражение (81) можно переписать в более привычном виде. Воспользуемся следующей формулой:

$$(\delta_{ik} - 2\varepsilon_{ik})\frac{\partial\ln\varepsilon}{\partial a_{jk}} = \delta_{ik}, \quad \varepsilon = \det\|\delta_{ik} - 2\varepsilon_{ik}\| = \det\|a_{ik}\| \tag{82}$$

Тогда

$$D = E_{ik}\frac{\partial\ln\varepsilon}{\partial a_{sk}}(\delta_{sl} - 2\varepsilon_{sl})\rho\frac{\partial U}{\partial\varepsilon_{li}} = v_{is}\sigma_{si} \tag{83}$$

Обычно предполагается, что пластические деформации не приводят к изменению объема материала. Потребуем, чтобы $v_{ii} = 0$. Тогда выражение для скорости диссипации энергии можно представить в обычном для теории пластичности виде

$$D = v_{ik}s_{ki}, \quad s_{ki} = \sigma_{ki} - \tfrac{1}{3}\delta_{ki}\sigma_{ll} \tag{84}$$

Если теперь предположить, что D является функцией первой степени положительной однородности от v_{ik}, или, что эквивалентно, записать условие текучести для материала в виде условия Мизеса или Треска, то система (80) будет представлять из себя обобщение на случай больших деформаций модель идеально пластического материала.

Воспользуемся условием пластичности Мизеса. Тогда

$$D = \tau_0\sqrt{v_{ij}v_{ij}} = \Phi, \quad s_{ij} = \tau_0\frac{v_{ij}}{\sqrt{v_{mn}v_{nm}}} \tag{85}$$

или, что эквивалентно (85), соотношениями

$$v_{ij} = \lambda \partial f / \partial s_{ij}, \quad f = s_{ik} s_{ki} - \tau_0^2 \tag{86}$$

В итоге (86) можно теперь записать в виде

$$E_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial s_{ik}} (\delta_{kj} - 2\varepsilon_{kj}) \tag{87}$$

Окончательно получим

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \varepsilon_{ik} \frac{\partial v^k}{\partial x^j} + \varepsilon_{jk} \frac{\partial v^k}{\partial x^i} = \begin{cases} e_{ij}, & \text{если } f < 0 \\ e_{ij} - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial s_{ik}} (\delta_{kj} - 2\varepsilon_{kj}), & \text{если } f = 0 \end{cases} \tag{88}$$

(напомним, что e_{ij} обозначает тензор скоростей деформации (53)). При малых упругих деформациях ($\tau_0/\mu \ll 1$) из (88) следуют обычные уравнения течения идеальной жесткопластической среды.

Аналогичное построение можно провести и для случая, когда внутренняя энергия $U = U(s, P_i^k)$. Таким образом, классические модели упругопластических материалов являются предельными для рассмотренных выше моделей таких материалов с учетом дефектов их структуры.

8. Заключение. Модель упругой среды построена на предположении о тождественности метрики наблюдателя, т.е. метрики того пространства, в котором находится подвергаемый деформациям материал, и метрики, определяющей внутренние силовые и энергетические взаимодействия между изменившими взаимное положение частицами материала. Вместе с тем, евклидова геометрическая структура обладает исключительными свойствами. Любое малое шевеление такой структуры приводит к аффинно-метрическим пространствам. В ситуации общего положения эти последние являются уже устойчивыми по отношению к малым изменениям значений кривизны и связности. Поэтому предположение о более общей метрической структуре взаимодействий в сплошной среде является простейшим расширением классических моделей упругопластического поведения материала. Соответствующие геометрические характеристики аффинно-метрических пространств оказываются и наиболее естественными термодинамическими переменными, позволяющими последовательно строить замкнутые модели материалов, включая не только уравнения, но и постановки краевых задач. С математической точки зрения структура уравнения для обобщенных дисторсий или деформаций в рассмотренных выше моделях аналогична структуре уравнений для изменения полей концентраций и температуры в задачах конвекции или потока с химическими реакциями. Характерной особенностью последних уравнений является существование решений, описывающих возникновение и динамику пространственно-временных диссипативных структур. В рассмотренных выше моделях упругопластических тел такие решения будут описывать процессы локализации пластических деформаций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-01-00540).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
2. *Годунов С.К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука,1978. 303 с.
3. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, 1986. 759 с.
4. *Схоутен Я.А.* Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. 456 с.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.

6. *Косевич А.М.* Дислокации в теории упругости. (Влияние дислокаций на механические свойства кристаллов). Киев: Наук. думка, 1978. 219 с.
7. *Родичев В.И.* Теория тяготения в ортогональном репере. М.: Наука, 1978. 184 с.
8. *Пономарев В.Н., Барвинский А.О., Обухов Ю.Н.* Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. М.: Энергоатомиздат, 1985. 166 с.
9. *Гроот С.де, Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
10. *Панин В.Е., Гриняев Ю.В., Данилов В.И. и др.* Структурные уровни пластической деформации и разрушения. Новосибирск: Наука, 1990. 254 с.
11. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.
12. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
13. *Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 2. С. 199–201.
14. *Мясников В.П.* Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.

Москва, Владивосток

Поступила в редакцию
14.I.1998