

УДК 539.3

© 1998 г. В.М. АЛЕКСАНДРОВ, А.А. ШМАТКОВА

ВДАВЛИВАНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ШТАМПА В УПРУГИЙ СЛОЙ И ДВУХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ШТАМПОВ В УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Дано соотношение, позволяющее в соответствии с известной теоремой Л.А. Галина [1] конструктивно строить ограниченные решения задачи о действии на упругое полупространство эллиптического в плане штампа с полиномиальным основанием. На базе этого соотношения получены асимптотические решения задачи о вдавливании параболического штампа в упругий слой достаточно большой относительной толщины и задачи о вдавливании двух параболических штампов в упругое полупространство при достаточно большом относительном удалении их друг от друга.

1. Рассмотрим классическую задачу о действии жесткого, эллиптического в плане штампа на упругое полупространство. Силы трения между штампом и полупространством предполагаем отсутствующими. Допустим также, что нормальное перемещение $w(x, y)$ границы полупространства под штампом есть полином степени n .

Известные решения этой задачи, принадлежащие И.Я. Штаерману [2], Л.А. Галину [1], А.И. Лурье [3] и В.И. Довноровичу [4], не охватывают всех возможных случаев. Здесь поставим вопрос о том, при каких дополнительных условиях на вид функции $w(x, y)$ существуют ограниченные на контуре эллиптической области контакта решения задачи.

Как известно (см., например, [2]), контактная задача для полупространства сводится к определению нормального давления между штампом и полупространством $q(x, y)$ из следующего интегрального уравнения

$$\int_{\Omega} \frac{q(\xi, \eta) d\Omega}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = -2\pi\theta w(x, y), \quad ((x, y) \in \Omega, \quad d\Omega = d\xi d\eta) \quad (1.1)$$

где $\theta = E/[2(1-\nu^2)]$, E и ν – упругие постоянные материала полупространства, Ω – область контакта штампа с полупространством.

Для эллиптических в плане штампов, кроме того, имеет место теорема Л.А. Галина [1]: если

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l b_{ij} x^i y^j \quad (k+l=n) \quad (1.2)$$

то

$$q(x, y) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{l-1} a_{ij} x^i y^j \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} \quad (1.3)$$

когда $q(x, y) = 0$ на контуре L области Ω .

Таким образом все сводится к определению зависимости между коэффициентами b_{ij} и a_{ij} , если считать заданными a и $b = a\sqrt{1-e^2}$ – полуоси эллиптической области контакта Ω .

Подставляя (1.2) и (1.3) в (1.1), получим

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{l-1} a_{ij} \int_{\Omega} \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}\right)^{1/2} \frac{\xi^i \eta^j d\Omega}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = -2\pi\theta \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l b_{ij} x^i y^j \quad (1.4)$$

Вычисляя интеграл в левой части (1.4) способом, предложенным в [2], придем к соотношению [5]:

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{l-1} a_{ij} \sum_{r=0}^i \sum_{s=0}^j C_i^r C_j^s B\left(\frac{r+s+1}{2}, \frac{3}{2}\right) (1-e^2)^{(r-s+2j-1)/2} \times \\ & \times \sum_{q=0}^{(r+s+2)/2} C_{(r+s+2)/2}^q (-1)^{(r-s)/2-q+1} a^{2q-1} \sum_{p=0}^{i+j-2q+2} C_{i+j-2q+2}^p \times \\ & \times x^{i+j-2q-p+2} y^p S_{i-q+1+(j-r+s-p)/2, (j-s+r+p)/2} = -2\pi\theta \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l b_{ij} x^i y^j \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $k+l=n$, $r+s$ четно, $j+p$ четно, C_m^n – биномиальные коэффициенты, $B(m, n)$ – бета-функция, а

$$S_{mn} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2m} \varphi \sin^{2m} \varphi d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{m+n+1/2}} \quad (1.6)$$

Важно, что все величины S_{mn} вида (1.6) могут быть выражены через полные эллиптические интегралы $K(e)$ и $E(e)$. В частности имеем

$$\begin{aligned} S_{00} &= K(e), \quad S_{10} = [K(e) - E(e)] e^{-2} \\ S_{01} &= [E(e) - (1-e^2)K(e)] e^{-2}(1-e^2)^{-1} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Заметим, что способ вычисления интеграла типа того, что стоит в левой части (1.4), подробно изложен также в [6].

Приравнивая в соотношении (1.5) коэффициенты при одинаковых степенях x и y , получим $(n+1)(n+2)/2$ уравнений. Однако неизвестных коэффициентов a_{ij} только $(n-1)n/2$. Остальные $2n+1$ уравнений дают $2n+1$ зависимостей между коэффициентами b_{ij} функции $w(x, y)$.

В качестве примера применим соотношение (1.5) к классической задаче о вдавливании параболического штампа в упругое полупространство [2–4], когда

$$w(x, y) = -\left(\delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2}\right) \quad (1.8)$$

где δ – поступательное перемещение штампа под действием центрально приложенной вдавливающей силы P , R_1 и R_2 – радиусы кривизны поверхности основания штампа. В итоге имеем известные результаты

$$\begin{aligned} q(x, y) &= a_{00} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} \\ a_{00} b S_{00} &= 2\theta\delta, \quad \frac{a_{00} b S_{10}}{a^2} = \frac{\theta}{R_1}, \quad \frac{a_{00} b S_{01}}{a^2} = \frac{\theta}{R_2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Заметим, что

$$P = \int_{\Omega} q(\xi, \eta) d\Omega \quad (1.10)$$

Подставляя сюда $q(x, y)$ вида (1.9) и используя интеграл [6]:

$$\int_{\Omega} \xi^{2m} \eta^{2n} \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}\right)^{-1/2} d\Omega = 2\pi a^{2m+1} b^{2n+1} \frac{(2m-1)!!(2n-1)!!}{(2m+2n+1)!!} \quad (1.11)$$

найдем для силы P выражение

$$P = 2\pi ab a_{00}/3 \quad (1.12)$$

Эта формула вместе со второй формулой (1.9) дают связь между P и δ , а третья и четвертая формулы (1.9) при заданных R_1 и R_2 служат для определения полуосей a и b области контакта. Если $R_1 > R_2$, то очевидно будет $a > b$.

2. Рассмотрим задачу о действии жесткого параболического штампа на упругий слой толщины h , заземленный по основанию (фиг. 1, показан разрез в плоскости zOy). Штмп вдавливается центрально приложенной силой P . Силы трения между штампом и поверхностью слоя предполагаем отсутствующими.

Введем безразмерный параметр $\lambda = h/a$, где $2a$ максимальное расстояние между точками границы области контакта Ω . Предполагая, что λ велико, представим с точностью до членов порядка λ^{-5} интегральное уравнение этой задачи на основании формулы (53.1) [6] в виде

$$\int_{\Omega} \frac{q(\xi, \eta) d\Omega}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = 2\pi\theta \left(\delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right) + \quad (2.1)$$

$$+ \frac{a_0}{h} \int_{\Omega} q(\xi, \eta) d\Omega + \frac{a_1}{h^3} \int_{\Omega} q(\xi, \eta) [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] d\Omega$$

Значения величин a_0 и a_1 для различных ν приведены ниже

ν	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
a_0	1,2926	1,3294	1,3768	1,4383	1,5187
a_1	-0,5525	-0,5860	-0,6276	-0,6800	-0,7476

Как известно [6], уравнение (2.1) дает для основных характеристик задачи результаты с ошибкой не превосходящей 5% при $\lambda \geq 2$.

Отметим, что функция $q(x, y)$ должна быть четной по x, y и, следовательно, в правой части уравнения (2.1) стоит четный полином от x, y второй степени. В силу последнего и согласно (1.3) ограниченное решение этого уравнения можно искать в виде, определяемом первой формулой (1.9).

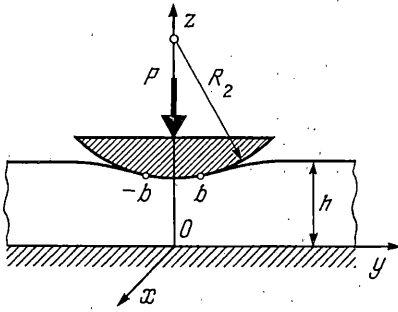
Подставим (1.9) в (2.1) и вычислим интегралы слева в соответствии с соотношением (1.5), а справа с применением формулы (1.11). Приравнявая затем члены при одинаковых степенях x, y слева и справа, получим три соотношения:

$$a_{00} = \frac{2\theta\delta}{bA} \left(A = K(e) - \frac{2a_0}{3\lambda} - \frac{2a_1}{15\lambda^3} (2 - e^2) \right) \quad (2.2)$$

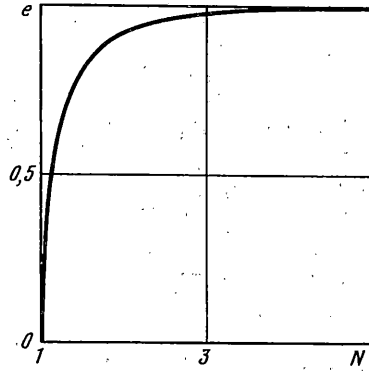
$$\frac{1}{R_1} = \frac{ba_{00}}{a^2\theta} \left(S_{10} + \frac{2a_1}{3\lambda^3} \right), \quad \frac{1}{R_2} = \frac{ba_{00}}{a^2\theta} \left(S_{01} + \frac{2a_1}{3\lambda^3} \right)$$

Добавим к ним еще выражение для величины a_{00} из (1.12):

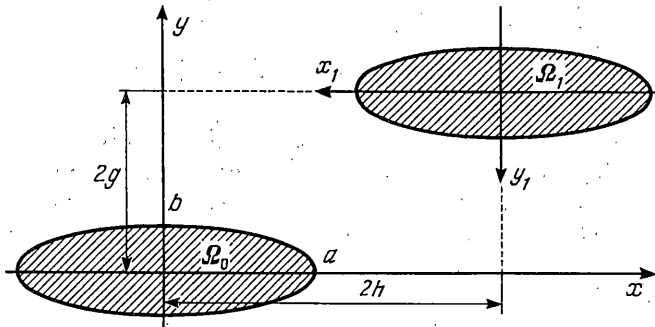
$$a_{00} = 3P/(2\pi ab) \quad (2.3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Сравнивая первую формулу (2.2) с (2.3), определим связь между осадкой штампа δ и вдавливающей силой P :

$$\delta = 3PA / (4\pi\theta a) \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3) во вторую формулу (2.2), найдем

$$a^3 = \frac{3Ph^3 R_1 S_{10}}{2(\pi\theta h^3 - Pa_1 R_1)} \quad (2.5)$$

Подставляя (2.3), а затем (2.5) в третью формулу (2.2), получим

$$S_{01}(S_{10})^{-1} = N \quad (2.6)$$

$$N = \frac{R_1}{R_2} \frac{\pi\theta h^3 - Pa_1 R_2}{\pi\theta h^3 - Pa_1 R_1} \quad (2.7)$$

Видно, что $N > 1$ при $R_1 > R_2$. На фиг. 2 приведен график зависимости e от N , полученный решением относительно e трансцендентного уравнения (2.6).

Расчет теперь можно вести по следующей схеме. Зная исходные параметры задачи $E, \nu, h, R_1, R_2, a_0, a_1$ и P по формуле (2.7) вычислим значение N . По графику (фиг. 2) определим соответствующее значение эксцентриситета e . Далее по формуле (2.5) найдем полуось a эллиптической области контакта, а затем полуось $b = a\sqrt{1 - e^2}$. По формуле (2.4) определим осадку штампа, по формуле (2.3) – значение величины a_{00} и, наконец, по формуле (1.9) – функцию распределения контактных давлений.

Например, при $h = 0,07$ м, $R_1 = 2$ м, $R_2 = 1$ м, $P = 0,1 \cdot 10^7$ Н и $E = 0,98 \cdot 10^{11}$ Н/м²,

$v = 0,35$ (латунь) получим $N = 1,978$, $e = 0,9209$, $a = 0,02901$ м, $\lambda = 2,413 > 2$, $b = 0,01131$ м, $\delta = 0,0002937$ м, $a_{00} = 0,1455 \cdot 10^{10}$ Н/м².

3. Рассмотрим задачу с внедрения двух одинаковых жестких параболических штампов в упругое полупространство: Допустим, что штампы настолько удалены друг от друга, что их взаимовлияние мало. Тогда с большой точностью можно считать, что области их контакта с полупространством Ω_0 и Ω_1 будут иметь две взаимоперпендикулярные оси симметрии. Пусть штампы расположены так, что указанные оси симметрии их областей контакта параллельны (фиг. 3, вид сверху на области контакта). Силы трения между штампами и поверхностью полупространства предполагаем, как и ранее, отсутствующими. На штампы действуют одинаковые центрально приложенные вдавливающие силы P .

Очевидно, распределение контактных давлений под штампами будет также одинаковым и, если для штампа с областью контакта Ω_0 оно описывается функцией $q(x, y)$, то для штампа с областью контакта Ω_1 указанное давление будет описываться той же функцией, но с другими аргументами, а именно

$$q(x_1, y_1) = q(-x + 2h, -y + 2g) \quad (3.1)$$

Тогда, учитывая, что $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$, интегральное уравнение (1.1) для рассматриваемой задачи представим в виде

$$\int_{\Omega_0} \frac{q(\xi, \eta) d\Omega}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} + \int_{\Omega_1} \frac{q(-\xi + 2h, -\eta + 2g) d\Omega}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = -2\pi\theta w(x, y) \\ ((x, y) \in \Omega_0 \cup \Omega_1) \quad (3.2)$$

$$w(x, y) = - \left(\delta + \alpha x + \beta y - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right) \quad ((x, y) \in \Omega_0)$$

$$w(x, y) = - \left[\delta - \alpha(x - 2h) - \beta(y - 2g) - \frac{(x - 2h)^2}{2R_1} - \frac{(y - 2g)^2}{2R_2} \right] \quad ((x, y) \in \Omega_1)$$

Здесь α и β – углы поворота штампов вокруг осей y и x (y_1 и x_1) соответственно, которые будут иметь место в силу взаимодействия штампов.

Производя во втором интеграле уравнения (3.2) замены переменных $\xi_1 = -\xi + 2h$ и $\eta_1 = -\eta + 2g$, окончательно приходим к необходимости решения следующего интегрального уравнения:

$$\int_{\Omega_0} q(\xi, \eta) M(x, y, \xi, \eta) d\Omega = 2\pi\theta \left(\delta + \alpha x + \beta y - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right) \quad ((x, y) \in \Omega_0) \quad (3.3)$$

$$M(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(\xi+x-2h)^2 + (\eta+y-2g)^2}}$$

Заметим, что решение уравнения (3.3) должно быть четным по ξ и η , чтобы главный вектор контактного давления $q(\xi, \eta)$ приводился к вдавливающей силе P , а главные моменты

$$M_x = \int_{\Omega_0} q(\xi, \eta) \eta d\Omega, \quad M_y = \int_{\Omega_0} q(\xi, \eta) \xi d\Omega \quad (3.4)$$

равнялись бы нулю.

4. Введем два безразмерных параметра $\lambda = h/a$ и $\mu = g/a$, где $2a$ максимальное расстояние между точками границы области контакта Ω_0 . Предполагая, что $\lambda > \mu$ и λ – велико, разложим регулярную часть ядра $M(x, y, \xi, \eta)$ вида (3.3) в ряд по степеням λ^{-1} .

С точностью до членов порядка λ^{-5} представим интегральное уравнение (3.3) в виде

$$\int_{\Omega_0} \frac{q(\xi, \eta) d\Omega}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = 2\pi\theta \left(\delta + \alpha x + \beta y - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2h} - \frac{g^2}{4h^3} + \frac{x}{4h^2} + \frac{yg}{4h^3} + \frac{x^2}{8h^3} - \frac{y^2}{16h^3} \right) \int_{\Omega_0} q(\xi, \eta) d\Omega -$$

$$- \frac{1}{16h^3} \int_{\Omega_0} (-2\xi^2 + \eta^2) q(\xi, \eta) d\Omega \quad (4.1)$$

По внешнему виду уравнение (4.1) весьма напоминает уравнение (2.1). Поэтому по аналогии можно утверждать, что уравнение (4.1) дает для основных характеристик задачи результаты с ошибкой не превосходящей 5% при $\lambda \geq 2$.

С учетом четности функции $q(\xi, \eta)$ по ξ и η левая часть уравнения (4.1) будет четной функцией по x и y , следовательно правая часть также должна быть четной. Тогда для углов поворота штампов α и β имеем выражения

$$\alpha = -P/(8\pi\theta h^2), \quad \beta = -Pg/(8\pi\theta h^3) \quad (4.2)$$

В силу (4.2) правая часть уравнения (4.1) превращается в четный полином от x , y второй степени. Поэтому согласно (1.3) ограниченное решение этого уравнения можно искать в виде, определяемом первой формулой (1.9).

Подставим (1.9) в (2.1) и вычислим интегралы, как и выше, слева в соответствии с соотношением (1.5), а справа с применением формулы (1.11). Приравнивая затем члены при одинаковых степенях x , y слева и справа, получим три соотношения аналогичные (2.2) и добавим к ним еще выражение (2.3). Далее вновь получим формулу (2.4), где теперь будет

$$A = K(e) - \frac{1}{3\lambda} \left(1 - \frac{g^2}{2h^2} \right) - \frac{1}{120\lambda^3} (1 + e^2) \quad (4.3)$$

Формула (2.5) примет вид

$$a^3 = \frac{12Ph^3 R_1 S_{10}}{8\pi\theta h^3 - PR_1} \quad (4.4)$$

Формула (2.6) не изменится, а формула (2.7) примет вид

$$N = \frac{R_1}{2R_2} \frac{16\pi\theta h^3 + PR_2}{8\pi\theta h^3 - PR_1} \quad (4.5)$$

Схема определения характерных величин задачи с использованием фиг. 2 полностью аналогична той, что описана в п. 2. Например, по этой схеме при $g = 0$ и тех же исходных значениях h , R_1 , R_2 , P , E и ν , что и в п. 2, получим $N = 2,010$, $e = 0,9247$, $a = 0,02940$ м, $\lambda = 2,3809 > 2$, $b = 0,01119$ м, $\delta = 0,0003292$ м, $a_{00} = 0,1451 \cdot 10^{10}$ Н/м². На основании формул (4.2) еще найдем $\alpha = -0,0001454$, $\beta = 0$.

Обратимся к случаю, когда $\mu > \lambda$ и μ – велико. Раскладывая регулярную часть ядра $M(x, y, \xi, \eta)$ вида (3.3) в ряд по степеням μ^{-1} , с точностью до членов порядка μ^{-5} представим интегральное уравнение (3.3) в виде

$$\int_{\Omega_0} \frac{q(\xi, \eta) d\Omega}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = 2\pi\theta \left(\delta + \alpha x + \beta y - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2g} - \frac{h^2}{2g^3} + \frac{y}{4g^2} + \frac{xh}{4g^3} + \frac{y^2}{8g^3} - \frac{x^2}{16g^3} \right) \int_{\Omega_0} q(\xi, \eta) d\Omega -$$

$$(4.6)$$

$$-\frac{1}{16g^3} \int_{\Omega_0} (-2\eta^2 + \xi^2) q(\xi, \eta) d\Omega$$

Далее исследование уравнения (4.6) практически не отличается от исследования уравнения (4.1). Приведем окончательные результаты. Вместо формул (4.2) имеем

$$\alpha = -Ph/(8\pi\theta g^3), \quad \beta = -P/(8\pi\theta g^2) \quad (4.7)$$

Сохраняются выражения (2.3) и (2.4), причем в последнем теперь

$$A = K(e) - \frac{1}{3g} \left(1 - \frac{h^2}{2g^2} \right) - \frac{1}{120g^3} (1 - 2e^2) \quad (4.8)$$

Формула (4.4) принимает вид

$$a^3 = \frac{24Pg^3 R_1 S_{10}}{16\pi\theta g^3 + PR_1} \quad (4.9)$$

Формула (2.6) не изменится, но в ней

$$N = \frac{2R_1}{R_2} \frac{8\pi\theta g^3 - PR_2}{16\pi\theta g^3 + PR_1} \quad (4.10)$$

Схема определения характерных величин с использованием фиг. 2 вновь аналогична той, что описана в п. 2. Например, по этой схеме при $h = 0$, $g = 0,07$ м и тех же значениях R_1, R_2, P, E и ν , что и в п. 2, получим $N = 1,9917$, $e = 0,9226$, $a = 0,02926$ м, $\mu = 2,3921 > 2$, $b = 0,01129$ м, $\delta = 0,0003292$ м, $a_{00} = 0,1445 \cdot 10^{10}$ Н/м². На основании формул (4.7) еще найдем $\alpha = 0$, $\beta = -0,0001454$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00133а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
2. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
3. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 491 с.
4. *Довнорович В.И.* Пространственные контактные задачи теории упругости. Минск: Изд-во БГУ, 1959. 107 с.
5. *Александров В.М.* О действии эллиптического штампа на упругое полупространство // Авторефераты научно-исследовательских работ за 1959 год. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1960. С. 45-47.
6. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.VII.1997