МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1998

УДК 539.3

© 1998 Б.Е. ПОБЕДРЯ

О МОДЕЛЯХ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ РЕОНОМНЫХ СРЕД

Исследуется тензорная мера повреждаемости А.А. Ильюшина, которая зависит от кинематических характеристик, описывающих процессы деформирования. Рассматриваются операторные определяющие соотношения среды, включающие и введенную меру повреждаемости. Материальные функции определяющих соотношений зависят от пространственных координат (неоднородная среда) и могут быть разрывными функциями (композит). Возможные несовершенства материала и его границы, внешней и внутренней (межфазовые и межкомпонентные прослойки) учитываются введением моментных напряжений. Проводится термодинамический анализ процесса эволюционной деструкции. Дается обобщение на случай ее учета "основной гипотезы", заключающейся в том, что скрытые термодинамические параметры являются операторами такого же типа, что и определяющие соотношения рассматриваемой модели. Анализируется простейший случай физически линейной реономной среды. Описываются принципиальные схемы экспериментов, из которых могут быть найдены все необходимые материальные функции, как для неполярной модели, так и для полярной, в которой учитываются моментные напряжения. Рассматривается изотропная и трансверсально изотропная среды.

1. Критерии прочности. Классический подход к проблеме разрушения материалов в механике деформируемого твердого тела заключается в следующем. Сначала тем или иным способом с необходимой точностью определяется напряженно-деформированное состояние (НДС) в теле с выбранной моделью, заданными входными данными и геометрией. После этого применяется тот или иной критерий прочности [1, 2]. Если определяющие соотношения рассматриваемой модели являются склерономными, то, как правило, предполагается, что состояние некоторой макрочастицы в момент времени t будет прочным, если некоторые универсальные скалярные функции тензоров напряжений $\underset{\sim}{\sigma}$, деформаций $\underset{\sim}{\varepsilon}$, температуры T, и возможно набора еще некоторых параметров λ, меньше некоторых материальных констант $C_m > 0$:

$$f_m(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\varepsilon}, T, \lambda) \leq C_m \quad (m = 1, 2, \ldots, M) \tag{1.1}$$

Если одна из этих функций достигает значения C_m, то наступает разрушение вида, соответствующего номеру функции m.

Все "классические" критерии прочности и многие их обобщения являются частными случаями критерия (1.1) [3, 4]. Исходя из определяющих соотношений, в критерии (1.1) может быть исключен один из тензорных аргументов $\underset{\sim}{\sigma}$ или $\underset{\sim}{\varepsilon}$. Однако, для многократных нагружений тензор напряжений $\underset{\sim}{\sigma}$, например, не может являться непосредственной характеристикой, описывающей разрушение, так как одно и то же напряженное состояние после некоторого числа циклов приведет к разрушению.

Для реономных определяющих соотношений существует другой тип критериев разрушения, которые называются критериями длительной прочности [3–5]. Предполагается, что существует положительная возрастающая во времени функция $\omega(t)$, называемая повреждением, повреждаемостью или дефектом, приращение которой пропорционально некоторой универсальной функции напряжения $\sigma(t)$ (обычно это или одна компонента тензора напряжений, например, растяжение σ_{11}, или некоторая величина, связанная с инвариантами тензора напряжений и называемая эквивалентным напряжением σ_e). Разрушение наступает, как только величина $\omega(t)$ достигает своего максимального для данного материала и температуры значения ω_{des}. Время разрушения t^* для данного закона нагружения $\sigma(t)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t^*$, определяется уравнением

$$\int_0^{t^*} \frac{d\tau}{t^*(\sigma(\tau))} = 1 \tag{1.2}$$

которое называется принципом линейного суммирования повреждений [6].

В качестве эквивалентного напряжения применяются выражения [7]:

$$\sigma_e = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sqrt{3}\,\sigma_u) \tag{1.3}$$

или [8]:

$$\sigma_e = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sqrt{3}\,\sigma_u)\,a^{1-2\eta} \tag{1.4}$$

$$\eta = 3\sigma/(\sigma_1 + \sqrt{3}\,\sigma_u) \tag{1.5}$$

Здесь постоянная $0 < a < 1$ определяется из эксперимента, σ_1 – наибольшее главное растягивающее напряжение, σ – гидростатическое давление, а σ_u – интенсивность тензора напряжений.

Для параметра повреждений ω записывается кинетическое уравнение вида [9]:

$$d\omega/dt = \varphi(\omega, \sigma_e) \tag{1.6}$$

Вид функции $\varphi(\omega, \sigma_e)$ в ряде случаев конкретизируется, например [3]:

$$\varphi(\omega, \sigma_e) = F\left(\frac{\sigma_{\max}}{1-\omega}\right) \tag{1.7}$$

где $\sigma_e = \sigma_{\max}$ – максимальное растягивающее напряжение. В случае степенной зависимости

$$\varphi(\omega, \sigma_e) = F\left(\frac{\sigma_{\max}}{1-\omega}\right) = A\left(\frac{\sigma_{\max}}{1-\omega}\right)^n \tag{1.8}$$

где A и n – постоянные, определяемые из эксперимента, уравнение (1.6) легко интегрируется при начальном условии $\omega = 0$ при $t = 0$:

$$-\frac{(1-\omega)^{n+1}}{n+1} = A\int_0^t \sigma_{\max}(\tau)\,d\tau - \frac{1}{n+1} \tag{1.9}$$

В частности, для растяжения стержня сечения Σ_0 постоянной нагрузкой P имеем

$$\sigma_{\max} = P/\Sigma_0 \equiv \sigma_0 = \text{const} \tag{1.10}$$

Тогда из (1.9) следует

$$(1-\omega)^{n+1} - 1 = -A(n+1)\,\sigma_0^n t \tag{1.11}$$

Принимая, что в момент разрушения t^* параметр $\omega = 1$, получаем из (1.9):

$$t^* = \frac{1}{(n+1)A\sigma_0^n} \tag{1.12}$$

Положим

$$\Omega \equiv (1 + \omega)^{n+1} + 1 \tag{1.13}$$

Тогда из (1.9) имеем

$$d\Omega/dt = -A(n + 1)\, \sigma_{\max}^n \tag{1.14}$$

или, учитывая (1.12)

$$d\Omega/dt = -1/t^*(t) \tag{1.15}$$

Из (1.15) получаем с учетом, что $\Omega = 0$ в начальный момент и $\Omega = 1$ при разрушении

$$\int_0^t \frac{d\tau}{t^*(\tau)} = \Omega \tag{1.16}$$

или (1.2). Таким образом, кинетическое уравнение (1.6) при степенной зависимости (1.8) эквивалентно принципу линейного суммирования повреждений (1.2) [9].

2. Меры повреждений. Накопление повреждений для различных материалов и различных их условий эксплуатации происходит очень различно. Случаются и хрупкие разрушения при ползучести. Классическим примером внезапного разрушения могут служить усталостные разрушения, возникающие при действии переменных (циклических) нагрузок. В металлических сплавах с неравновесной структурой с течением времени происходят медленные изменения механических свойств, зависящие от температуры. В волокнистых композитах под нагрузкой рвутся некоторые волокна, в результате чего со временем композит становится недееспособным. Материалы, испытывающие облучение ядерными частицами, изменяют с увеличением дозы облучения механические свойства вследствие нарушений структуры из-за выбивания атомов и образования дефектов. (Хорошо известно "охрупчивание" материалов атомных реакторов).

Внешняя среда может также сильно влиять на прочностные характеристики материала из-за явлений диффузии, химических процессов, коррозии. Сюда же относится эрозия материалов при кавитации и т.д.

Феноменологически названные процессы можно интерпретировать как некие процессы повреждения, накопление дефектов, микропор, трещин. Гипотетически можно предположить, что иногда могут происходить и процессы "залечивания" дефектов. Для описания всех этих процессов желательно абстрагироваться от конкретного явления и смоделировать "повреждаемость" так, чтобы охватить как можно больше явлений, различных по своей физической природе.

А.А. Ильюшин [10] постулировал существование макрообъекта $\chi(t, \mathbf{x})$, называемого повреждением, который в системе координат $\mathbf{x}$ в момент t задается некоторыми числами (компонентами) $\chi_1, \chi_2, \chi_3, ..., \chi_n$ и обладает следующими свойствами:

1. χ является функцией состояния макрочастицы, т.е., однозначно определяется процессом нагружения (тензором напряжений $\underset{\sim}{\sigma}$, тензорами моментных напряжений различного порядка $\underset{\sim}{\mu}(\tau)$, температурой $T(\tau)$ и так далее). Функционал χ:

$$\chi_{\tau=0}^{t}\{\underset{\sim}{\sigma}(\tau), \underset{\sim}{\mu}(\tau), T(\tau), \dots\} \tag{2.1}$$

предполагается вполне непрерывным на некотором классе достаточно гладких функций нагружения вплоть до состояний, как угодно близких к разрушению.

2. χ характеризует накопление повреждений и состояние, непосредственно предшествующее разрушению макрочастицы. Существуют некоторые неотрицательные меры, называемые мерами повреждений

$$M_m(\chi) = f_m(\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n, T) \quad (m = 1, 2, ..., m' \leqslant n) \tag{2.2}$$

которые являются функциями компонент χ и T, инвариантными относительно группы преобразований симметрии Г, и существуют соответствующие положительные константы материала C_m ($m = 1, 2, ..., m'$) такие, что если для любого m:

$$M_m(\chi) < C_m \tag{2.3}$$

то состояние макрочастицы прочно; если же для какого-нибудь $m = k$:

$$M_k(\chi) = C_k \tag{2.4}$$

а для остальных $M_m < C_m$, то происходит разрушение типа "k".

3. χ является нулевым на интервале $0 \leqslant \tau \leqslant t$, т.е., все компоненты $\chi_1, \chi_2, .., \chi_n$ и меры $M_m(\chi)$ ($m = 1, 2, 3, ..., m'$) равны нулю, если на этом интервале равны нулю параметры нагружения $\underset{\sim}{\sigma}(\tau), \underset{\sim}{\mu}(\tau), ...$.

Повреждение χ в момент t как функционал трехмерных тензоров $\underset{\sim}{\sigma}(\tau), \underset{\sim}{\mu}(\tau), ...$ (2.1)

может быть только трехмерным тензором или совокупностью тензоров некоторых порядков. В последнем случае и меры повреждения $M_m(\chi)$ определяются по совокупности компонент этих тензоров. Простейшим вариантом теории накоплений повреждений макрочастицы А.А. Ильюшин назвал случай, когда тензор χ является симметричным тензором второго ранга, хотя и не исключаются случаи, когда χ задается комбинацией нескольких скаляров.

Разумеется, все варианты с кинетическими уравнениями для параметров повреждений, рассмотренные нами в предыдущем пункте, являются частным случаем теории А.А. Ильюшина (2.1)–(2.3). Поэтому вряд ли целесообразно обобщение этой теории. Примем ее за основу, т.е. будем считать, что существует некий гипотетический объект "повреждаемость" χ, который может быть совокупностью тензоров различного ранга, и который является оператором процесса нагружения

$$\underset{\sim}{\chi} = \underset{\sim}{\Phi}(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\mu}, T, \mathbf{x}, ...) \tag{2.5}$$

При этом разрушение определяется условиями, накладываемыми на меры повреждаемости (2.3), (2.4), а сами меры $M_m(\underset{\sim}{\chi})$ (2.2) образуются из совместных инвариантов тензоров, составляющих повреждаемость $\underset{\sim}{\chi}$. В соотношениях (2.5) в качестве аргумента введен радиус вектор $\mathbf{x}$, чтобы подчеркнуть, что оператор (2.5) зависит явно от координат материальных точек, т.е. материал является неоднородным, причем его материальные функции могут быть разрывными.

В силу существования операторных определяющих соотношений модели, можно в качестве аргументов оператора (2.5) вместо тензора напряжения $\underset{\sim}{\sigma}$ и моментных напряжений $\underset{\sim}{\mu}$ выбрать тензор деформации $\underset{\sim}{\varepsilon}$ и его градиенты различного порядка $\underset{\sim}{\chi}$:

$$\underset{\sim}{\chi} = \breve{\chi}(\underset{\sim}{\varepsilon}, \underset{\sim}{\chi}, T, \mathbf{x}, ...) \tag{2.6}$$

Часто механические свойства материала сильно изменяются в процессе развития повреждаемости. Поэтому определяющие соотношения должны быть записаны так, чтобы в них учитывалась повреждаемость (2.5) или (2.6).

Для неизотермических процессов эти определяющие соотношения должны зависеть и от температуры. Итак, получаем двойную связанность соотношений: механические свойства материала зависят от процессов повреждаемости и температуры, а повреждаемость и температура зависят от НДС, т.е. от процессов нагружения и деформирования. В связи с этим необходимо проанализировать термодинамику сплошной среды.

3. Термодинамический анализ учета деструкции. Запишем операторные определяющие соотношения с учетом повреждаемости (2.5), (2.6) в виде

$$\sigma_{ij} = \check{F}_{ij}(\underset{\sim}{\varepsilon}, \underset{\sim}{\varkappa}, \underset{\sim}{\chi}, T, \mathbf{x}) \tag{3.1}$$

$$\mu_{ij} = \check{K}_{ij}(\underset{\sim}{\varepsilon}, \underset{\sim}{\varkappa}, \underset{\sim}{\chi}, T, \mathbf{x}) \tag{3.2}$$

где аргумент $\mathbf{x}$ напоминает о том, что рассматриваются неоднородные материалы (композиты).

Добавим к (3.1) и (3.2) определяющие соотношения, связывающие вектор теплового потока $\mathbf{q}$ и градиент температуры, в виде закона теплопроводности Фурье

$$\mathbf{q} = -\underset{\sim}{\Lambda} \cdot \operatorname{grad} T, \quad q_i = -\Lambda_{ij} T_{,j} \tag{3.3}$$

где положительно определенный симметричный тензор второго ранга $\underset{\sim}{\Lambda}$ называется тензором теплопроводности.

Из двух основных законов термодинамики [11]:

$$dE = \delta Q - \delta A^{(i)} \tag{3.4}$$

$$T\,dS = \delta Q + W^* dt \tag{3.5}$$

где E – внутренняя энергия, S – энтропия, Q – приток тепла, $A^{(i)}$ – работа внутренних сил, W – функция рассеивания, получаем, как следствие, уравнение

$$d\Psi + S\,dT + W^* dt = -\delta A^{(i)} \tag{3.6}$$

где Ψ – свободная энергия Гельмгольца

$$\Psi = E - TS \tag{3.7}$$

Работу внутренних сил можно записать в виде

$$-\delta A^{(i)} = \int_V (\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + \mu_{ij} d\varkappa_{ij})\, dV \tag{3.8}$$

а приток тепла

$$\delta Q = dt\left[\int_V \rho q\, dV - \int_\Sigma \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\, d\Sigma\right] \tag{3.9}$$

Вводя плотности термодинамических функций ψ, e, s, w^*:

$$\Psi = \int_V \rho\psi\, dV, \quad E = \int_V \rho e\, dV, \quad S = \int_V \rho s\, dV, \quad W^* = \int_V w^* dV \tag{3.10}$$

запишем уравнение (3.6) в виде

$$\rho\, d\psi + \rho\, s dT + w^* = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + \mu_{ij} d\varkappa_{ij} \tag{3.11}$$

Уравнение (3.5) при использовании введенных обозначений (3.9), (3.10) и закона Фурье (3.3) можно записать в виде

$$\rho\, T ds/dt = \rho q - \operatorname{div} \mathbf{q} + w^* \tag{3.12}$$

Воспользуемся гипотезой Дюгамеля–Неймана [11] и запишем определяющие соотношения (3.1), (3.2) в виде

$$\sigma_{ij} = \check{F}_{ij}(\underset{\sim}{\varepsilon}^T, \underset{\sim}{\varkappa}^T, \underset{\sim}{\chi}, \mathbf{x}) \tag{3.13}$$

$$\mu_{ij} = \check{K}_{ij}(\underset{\sim}{\varepsilon}^T, \underset{\sim}{\varkappa}^T, \underset{\sim}{\chi}, \mathbf{x}) \tag{3.14}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}^T \equiv \underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{\alpha}\vartheta, \quad \underset{\sim}{\varkappa}^T \equiv \underset{\sim}{\varkappa} - \underset{\sim}{\beta}\vartheta \tag{3.15}$$

Здесь $\underset{\sim}{\alpha}$ – тензор теплового расширения, а $\underset{\sim}{\beta}$ назовем тензором теплового искривления, ϑ – перепад температуры, т.е. разность между текущей температурой T и некоторым начальным ее значением T_0 ($\vartheta = T - T_0$).

Термодинамические функции состояния s, ψ в уравнениях (3.11), (3.12) зависят от температуры T и некоторых термодинамических параметров состояния $\underset{\sim}{\nu}_i$ (i = = 1, 2, ..., n), которые не всегда можно указать в явном виде. Обобщим теперь "основную" гипотезу [2], которая будет заключаться в том, что параметры состояния $\underset{\sim}{\nu}_i$ являются операторами вида (3.13), (3.14):

$$\underset{\sim}{\nu}_i = \check{\underset{\sim}{\nu}}_i(\underset{\sim}{\varepsilon}^T, \underset{\sim}{\varkappa}^T, \underset{\sim}{\chi}, \mathbf{x}) \tag{3.16}$$

Забудем на время об аргументе $\underset{\sim}{\chi}$ в (3.16) и полную вариацию $\delta\underset{\sim}{\mu}_i$ представим в виде суммы двух независимых вариаций: изохронной вариации $\underset{\sim}{\nu}^{\varepsilon}\, d\underset{\sim}{\varepsilon}^T + \underset{\sim}{\nu}^{\varkappa}\, d\underset{\sim}{\varkappa}^T$, когда при фиксированном t варьируется вид функций $\underset{\sim}{\varepsilon}^T(\tau)$, $\underset{\sim}{\varkappa}^T(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t)$ и вариации $\underset{\sim}{\nu}_i^t dt$, обусловленной варьированием независимого аргумента t

$$\delta\underset{\sim}{\nu}_i = \underset{\sim}{\nu}_i^{\varepsilon} \cdot d\underset{\sim}{\varepsilon}^T + \underset{\sim}{\nu}_i^{\varkappa} \cdot d\underset{\sim}{\varkappa}^T + \underset{\sim}{\nu}_i^t\, dt \tag{3.17}$$

Если $\underset{\sim}{\nu}_i$ является тензором второго ранга, то под величиной $\underset{\sim}{\nu}_i^{\varepsilon}$, например, понимается функциональная производная $\partial\underset{\sim}{\nu}_i / \partial\underset{\sim}{\varepsilon}^T$, т.е., тензор четвертого ранга, а под величиной $\underset{\sim}{\nu}_i^T$ – частная производная оператора $\underset{\sim}{\nu}_i$ по времени (тензор второго ранга).

Аналогично поступим и с операторами $\check{\underset{\sim}{\chi}}$ (2.6), описывающими повреждаемость. Прежде всего, согласно принимаемой гипотезе Дюгамеля–Неймана имеем вместо (2.6):

$$\underset{\sim}{\chi} = \check{\underset{\sim}{\chi}}(\underset{\sim}{\varepsilon}^T, \underset{\sim}{\varkappa}^T, \mathbf{x}) \tag{3.18}$$

Будем считать, что $\underset{\sim}{\chi}$ является тензором второго ранга. Тогда согласно "основной" гипотезе можно записать полную вариацию оператора повреждаемости (3.18) в виде

$$\delta\underset{\sim}{\chi} = \underset{\sim}{\chi}^{\varepsilon}\, d\underset{\sim}{\varepsilon}^T + \underset{\sim}{\varkappa}\, d\underset{\sim}{\varkappa}^T + \underset{\sim}{\chi}^t\, dt \tag{3.19}$$

Теперь вспомним об аргументе $\underset{\sim}{\chi}$ в выражениях (3.16) и будем рассматривать их наличие в (3.16), как сложную операторную функцию от аргументов, указанных в (3.18).

Подставим полученные представления (3.17) и (3.18) в уравнение (3.11):

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial T}dT+\rho\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\nu}_i}\underset{\sim}{\nu}_i^{\varepsilon}\cdot d\underset{\sim}{\varepsilon}^T+\rho\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\nu}_i}\underset{\sim}{\nu}_i^{\varkappa}\cdot d\underset{\sim}{\varkappa}^T+\rho\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\nu}_i}\underset{\sim}{\nu}_i^{t}\,dt+$$

$$+\rho\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\nu}_i}\underset{\sim}{\nu}^{\chi}\cdot\underset{\sim}{\chi}^{\varepsilon}\cdot d\underset{\sim}{\varepsilon}^T+\rho\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\nu}_i}\underset{\sim}{\nu}_i^{\chi}\cdot\underset{\sim}{\chi}^T+\rho\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\nu}_i}\underset{\sim}{\nu}_i^{\chi}\,\underset{\sim}{\chi}^t\,dt+\rho s\,dT+W^*dt=$$

$$=\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}+\mu_{ij}d\varkappa_{ij}\equiv\check{\underset{\sim}{F}}(\underset{\sim}{\varepsilon}^T,\underset{\sim}{\varkappa}^T,\underset{\sim}{\chi},\mathbf{x})\,d\underset{\sim}{\varepsilon}+\check{\underset{\sim}{K}}(\underset{\sim}{\varepsilon}^T,\underset{\sim}{\varkappa}^T,\underset{\sim}{\chi},\mathbf{x})\,d\underset{\sim}{\chi} \qquad (3.20)$$

Приравниваем в (3.20) выражения при независимых вариациях dT, $d\underset{\sim}{\varepsilon}$, $d\underset{\sim}{\varkappa}$, dt, получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial T}-\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\nu}_i}\underset{\sim}{\nu}_i^{\varepsilon}\cdot\underset{\sim}{\alpha}-\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\nu}_i}\underset{\sim}{\nu}_i^{\varkappa}\cdot\beta-\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\nu}_i}\underset{\sim}{\nu}_i^{\chi}\cdot\underset{\sim}{\chi}^{\varepsilon}\cdot\alpha-\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\nu}_i}\underset{\sim}{\nu}_i^{\varkappa}\cdot\underset{\sim}{\chi}^{\varkappa}\cdot\beta=-s \qquad (3.21)$$

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\nu}_i}\underset{\sim}{\nu}_i^{\varepsilon}+\rho\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\nu}_i}\underset{\sim}{\nu}_i^{\chi}\cdot\underset{\sim}{\chi}^{\varepsilon}=\check{\underset{\sim}{F}}(\underset{\sim}{\varepsilon}^T,\underset{\sim}{\varkappa}^T,\underset{\sim}{\chi},\mathbf{x}) \qquad (3.22)$$

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\nu}_i}\underset{\sim}{\nu}_i^{\varkappa}+\rho\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\nu}_i}\underset{\sim}{\nu}_i^{\chi}\cdot\underset{\sim}{\chi}^{\varepsilon}=\check{\underset{\sim}{K}}(\underset{\sim}{\varepsilon}^T,\underset{\sim}{\varkappa}^T,\underset{\sim}{\chi},\mathbf{x}) \qquad (3.23)$$

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\nu}_i}\underset{\sim}{\nu}_i^{t}+\rho\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\nu}_i}\underset{\sim}{\nu}_i^{\chi}\cdot\underset{\sim}{\chi}^{t}=-w^* \qquad (3.24)$$

Предположим, что все термодинамические функции состояния ψ, s, e имеют аддитивную составляющую, зависящую только от температуры, например,

$$\psi(T,\underset{\sim}{\nu}_i)=\psi_0(T)+\sum_{i=1}^{N}\underset{\sim}{\nu}_i\cdot\underset{\sim}{\nu}_i \qquad (3.25)$$

Тогда можно ввести две теплоемкости вещества: c_p, c_ν, причем, как следует из (3.4) и (3.7):

$$c_\nu=\frac{\partial e}{\partial T}=-T\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2}=T\frac{\partial s}{\partial T} \qquad (3.26)$$

$$c_p=\frac{\partial e_0}{\partial T}=-T\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2}=T\frac{\partial s_0}{\partial T} \qquad (3.27)$$

Поэтому

$$-\frac{\partial\psi_0}{\partial T}=\int_{T_0}^{T}\frac{c_p}{T}dT \qquad (3.28)$$

По закону Дюлонга–Пти у твердых веществ для температуры выше некоторой, называемой температурой Дебая, $c_p=\text{const}$. В этом случае

$$c_p\ln\frac{T}{T_0}=c_p\ln\left(1+\frac{\vartheta}{T_0}\right) \qquad (3.29)$$

Если ϑ мало по сравнению с T_0, то

$$c_p \ln \frac{T}{T_0} \approx c_p \frac{\vartheta}{T_0} \tag{3.30}$$

Сравнивая (3.21), (3.22), и (3.23), а также считая теплоемкость вещества заданной, получаем, что функция энтропии s полностью определена законом связи между напряжениями и моментными напряжениями с одной стороны и деформациями и искривлениями с другой

$$\rho s = \rho c_p \ln \frac{T}{T_0} + \underset{\sim}{\alpha} \cdot \underset{\sim}{\check{F}}(\underset{\sim}{\varepsilon}^T, \underset{\sim}{\varkappa}^T, \underset{\sim}{\chi}, \mathbf{x}) + \underset{\sim}{\beta} \cdot \underset{\sim}{\check{K}}(\underset{\sim}{\varepsilon}^T, \underset{\sim}{\varkappa}^T, \underset{\sim}{\chi}, \mathbf{x}) \tag{3.31}$$

Поэтому уравнение притока тепла (3.12) примет вид

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \operatorname{div}(\underset{\sim}{\Lambda} \cdot \operatorname{grad} T) - T \frac{d}{dt}[\underset{\sim}{\alpha} \cdot \underset{\sim}{\check{F}}(\underset{\sim}{\varepsilon}^T, \underset{\sim}{\varkappa}^T, \underset{\sim}{\chi}, \mathbf{x}) + \underset{\sim}{\beta} \cdot \underset{\sim}{\check{K}}(\underset{\sim}{\varepsilon}^T, \underset{\sim}{\varkappa}^T, \underset{\sim}{\chi}, \mathbf{x})] + \rho q + w^* \tag{3.32}$$

Вид функции рассеивания w^* должен конкретизироваться в зависимости от выбора определяющих соотношений в соответствии с выражением (3.24).

4. Линейная неполярная среда. Определяющие соотношения (3.1), (3.2) являются довольно общими. Для применения развиваемой теории на практике нужно рассмотреть более конкретные случаи. Выберем сначала наипростейший вариант. Будем рассматривать неполярную среду с линейными определяющими соотношениями.

Пусть заданы выражения напряжений через деформации и повреждаемость в виде

$$\sigma_{ij} = \int_0^t \Gamma_{ijkl}(t,\tau)\,\varepsilon^T_{kl}(\tau)\,d\tau + \int_0^t V_{ijkl}(t,\tau)\,\chi_{kl}(\tau)\,d\tau \tag{4.1}$$

Соотношения (4.1) являются частным случаем соотношений (3.1). При этом для тензора повреждаемости $\underset{\sim}{\chi}(t)$ запишем, как частный случай соотношений (2.6) выражение

$$\chi_{ij} = \int_0^t X_{ijkl}(t,\tau)\,\varepsilon^T_{kl}(\tau)\,d\tau \tag{4.2}$$

Для сокращения записи воспользуемся символическим операторным обозначением [11] и запишем соотношения (4.1) в виде

$$\sigma_{ij} = \check{\Gamma}_{ijkl}\varepsilon^T_{kl} + \check{V}_{ijkl}\chi_{kl} \tag{4.3}$$

а соотношение (4.2) в виде

$$\chi_{ij} = \check{X}_{ijkl}\varepsilon^T_{kl} \tag{4.4}$$

Из (4.3) и (4.4) имеем

$$\sigma_{ij} = \check{S}_{ijkl}\varepsilon^T_{kl} \tag{4.5}$$

$$\check{S}_{ijkl} = \check{\Gamma}_{ijkl} + \check{V}_{ijmn}\chi_{mnkl} \tag{4.6}$$

т.е., получим соотношения, формально совпадающие с соотношением классической теории термовязкоупругости [3]. Заметим, что традиционно в соотношениях (4.2) [3] тензор повреждаемости связывают с напряжением

$$\chi_{ij} = \int_0^t Y_{ijkl}(t,\tau)\,\sigma_{kl}(\tau)\,d\tau \equiv \check{Y}_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{4.7}$$

Однако, подставив (4.5) в (4.3), получим

$$\sigma_{ij} = \check{\Gamma}_{ijkl}\varepsilon^T_{kl} + \check{V}_{ijmn}\check{Y}_{mnkl}\sigma_{kl} \tag{4.8}$$

Введем единичный тензор четвертого ранга $\underset{\sim}{\Delta}$ [5]:

$$\Delta_{ijkl} \equiv (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2 \tag{4.9}$$

тогда (4.8) можно записать в виде

$$(\Delta_{ijkl} - \check{V}_{ijmn}\check{Y}_{mnkl})\sigma_{kl} = \check{\Gamma}_{ijkl}\varepsilon^T_{kl} \tag{4.10}$$

Пусть тензор-оператор $\check{W}_{ijkl}$ является обратным, по отношению к оператору, заключенному в левой части (4.10) в круглые скобки, т.е.

$$(\Delta_{ijkl} - \check{V}_{ijmn}\check{Y}_{mnkl})\check{W}_{klpq} = \Delta_{ijpq} \tag{4.11}$$

Тогда соотношения(4.10), а значит и (4.8) можно, как и прежде записать в виде (4.5), только теперь оператор $\check{S}_{ijkl}$ имеет вид

$$\check{S}_{ijkl} = \check{W}_{ijmn}\check{\Gamma}_{mnkl} \tag{4.12}$$

Таким образом доказана эквивалентность записей (4.2) и (4.7).

Разумеется, что определяющие соотношения (4.5) будем считать обратимыми, т.е., их можно разрешить относительно деформаций:

$$\varepsilon^T_{ij} = \check{Q}_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{4.13}$$

$$\check{S}_{ijmn}\check{Q}_{mnkl} = \Delta_{ijkl} \tag{4.14}$$

Определяющим соотношениям (4.13) соответствуют две исходные формы записи

$$\varepsilon^T_{ij} = \check{K}_{ijkl}\sigma_{kl} + \check{A}_{ijkl}\chi_{kl} \tag{4.15}$$

Одна форма в виде (4.7), а другая в виде (4.4). В первом случае

$$\check{Q}_{ijkl} = \check{K}_{ijkl} + \check{A}_{ijmn}\check{V}_{mnkl} \tag{4.16}$$

а во втором

$$\check{Q}_{ijkl} = \check{B}_{ijmn}\check{K}_{mnkl} \tag{4.17}$$

где тензор-оператор $\check{B}_{ijkl}$ является обратным к тензору оператору $(\Delta_{ijkl} - \check{A}_{ijmn}\check{X}_{mnkl})$, т.е.

$$\check{B}_{ijkl}(\Delta_{klmn} - \check{A}_{klpq}\check{X}_{pqmn}) = \Delta_{ijmn} \tag{4.18}$$

Таким образом, и в случае (4.15) обе формы записи (4.4) и (4.7) эквивалентны.

Для изотропного случая соотношения (4.15) могут быть записаны в виде

$$e_{ij} = \check{K}s_{ij} + \check{A}\overline{\chi}_{ij} \tag{4.19}$$

$$\theta^T = \check{K}_1\sigma + \tfrac{1}{9}\check{A}_1\,\overset{\circ}{\chi} \tag{4.20}$$

$$\varepsilon^T_{ij} = \theta^T\sigma_{ij} + e_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij} + s_{ij}, \quad \chi_{ij} = \tfrac{1}{3}\overset{\circ}{\chi}\delta_{ij} + \overline{\chi}_{ij}$$

$$\theta^T = \varepsilon_{ii} - 3\alpha\vartheta, \quad \sigma = \tfrac{1}{3}\sigma_{kk}, \quad \overset{\circ}{\chi} = \chi_{kk}$$

$$\check{K}_{ijkl} = \frac{\check{K}_1 - 3\check{K}}{9}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\check{K}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{4.21}$$

$$\check{A}_{ijkl} = \frac{\check{A}_1 - 3\check{A}}{9}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\check{A}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Соотношение (4.7) в этом случае примет вид

$$\overline{\chi}_{ij} = \check{Y}s_{ij} \tag{4.22}$$

$$\mathring{\chi} = \check{Y}_1\sigma \tag{4.23}$$

где аналогично (4.21):

$$\check{Y}_{ijkl} = \frac{\check{Y}_1 - 3\check{Y}}{9}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\check{Y}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{4.24}$$

Поэтому соотношения (4.13) могут быть записаны в виде

$$e_{ij} = \check{Q}s_{ij} \tag{4.25}$$

$$\theta^T = \check{Q}_1\sigma \tag{4.26}$$

Так что для этого случая имеем

$$\check{Q} = \check{K} + \check{A}\check{Y} \tag{4.27}$$

$$\check{Q}_1 = \check{K}_1 + \tfrac{1}{9}\check{A}_1\check{Y}_1 \tag{4.28}$$

Опишем теперь, каким образом можно отыскать экспериментально ядро $Q(t)$, соответствующее оператору $\check{Q}$ в (4.25). Для простоты будем считать ядро Q разностного типа $Q(t-\tau)$, а форму записи (4.25) – соответствующей форме Больцмана–Вольтерры, т.е. в виде интеграла Стильтьеса

$$e_{ij}(t) = \int_0^t Q(t-\tau)\,ds_{ij}(\tau) \tag{4.29}$$

При этом из (4.27) следует

$$Q(t) = K(t) + \int_0^t A(t-\tau)\,dY(\tau) \tag{4.30}$$

Мысленно проведем эксперимент на ползучесть образца без концентратора. Прикладывая к такому образцу мгновенно напряжения

$$s_{\alpha\beta} = s^0_{\alpha\beta}h(t), \quad s_{ij} = 0 \quad (i \neq \alpha, j \neq \beta) \tag{4.31}$$

где $s^0_{\alpha\beta}$ – некоторая постоянная, а $h(\tau)$ – единичная функция Хевисайда, найдем из (4.22):

$$\chi_{\alpha\beta} = \check{Y}s_{\alpha\beta} = \int_0^t Y(t-\tau)\,ds_{\alpha\beta}(\tau) = s^0_{\alpha\beta}Y(t) \tag{4.32}$$

Инварианты тензора $\overline{\chi}_{ij}$ совпадают с его единственной компонентой $\overline{\chi}_{\alpha\beta}$, а значит из всех мер повреждаемости (2.2) будет единственная функция $s_{\alpha\beta}Y(t)$. Из условия разрушения (2.4). Эта функция станет в момент разрушения t^* константой

$$s^0_{\alpha\beta}Y(t^*) = C = \text{const} \tag{4.33}$$

Предположим теперь, что из серии экспериментов с различными постоянными значениями $s^0_{\alpha\beta}$ известна зависимость времени разрушения t^* от нагружения $s^0_{\alpha\beta}$. Поэтому можно построить обратную функцию

$$s^0_{\alpha\beta} = S^*(t^*) \tag{4.34}$$

Тогда из (4.33) находим ядро $Y(t)$:

$$Y(t) = C/S^*(t) \tag{4.35}$$

с точностью до постоянного множителя. (Аналогично из эксперимента на всестороннее растяжение можно найти ядро $Y_1(t)$).

Далее можно поступить следующим образом. При малых уровнях напряжений, когда о деструкции не может идти речи, мы находим ядро ползучести $K(t)$, а при больших уровнях напряжений, используя соотношения (4.29), находим функцию ползучести $Q(t)$. После этого ядро $A(t)$ находится из решения интегрального уравнения Вольтерры второго рода

$$\int_0^t Y(t-\tau)\,dA(\tau) = Q(t) - K(t) \tag{4.36}$$

Точно так же получаем и в случае объемной ползучести, т.е. решаем интегральное уравнение

$$\int_0^t Y_1(t-\tau)\,dA_1(\tau) = Q_1(t) - K_1(t) \tag{4.37}$$

5. Трансверсальная изотропная неполярная среда. Рассмотрим теперь случай линейной неполярной анизотропной среды. Проведем более подробные рассуждения для случая трансверсальной изотропии. В этом случае все выкладки вплоть до формулы (4.18) остаются справедливыми.

Для трансверсально изотропной среды каждый симметричный тензор второго ранга удобно представить в виде обобщающим разбиение тензора на шаровую и девиаторную составляющие [12], например

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\tilde{\theta}\gamma_{ij} + \mathring{\varepsilon} l_i l_j + p_{ij} + 2q_{ij} \tag{5.1}$$

$$\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}\gamma_{ij}\,\mathring{\sigma} l_i l_j + P_{ij} 2Q_{ij} \tag{5.2}$$

$$\chi_{ij} = \tilde{\chi}\gamma_{ij} + \mathring{\chi} l_i l_j + \phi_{ij} + 2\Psi_{ij} \tag{5.3}$$

Каждый из тензоров (5.1)–(5.3) имеет по пяти независимых инвариантов, но мы будем рассматривать квазилинейные (и даже линейные соотношения), и поэтому примем во внимание только по четыре инварианта для каждого тензора: два "линейных" и два "квадратичных"

$$\tilde{\theta}, \mathring{\varepsilon}, p, q; \tilde{\sigma}, \mathring{\sigma}, P, Q; \tilde{\chi}, \mathring{\chi}, \phi, \Psi \tag{5.4}$$

Определяющие соотношения (4.15) в этом случае могут быть записаны в виде

$$p_{ij} = \check{K} P_{ij} + \check{A}\phi_{ij}, \quad q_{ij} = \check{L} Q_{ij} + \check{B}\psi_{ij} \tag{5.5}$$

$$\tilde{\theta}^T = \check{K}_1\tilde{\sigma} + \check{K}_2\mathring{\sigma} + \check{A}_1\tilde{\chi} + \check{A}_2\mathring{\chi} \tag{5.6}$$

$$\mathring{\varepsilon}^T = \check{K}_2\tilde{\sigma} + \check{K}_3\mathring{\sigma} + \check{A}_2\tilde{\chi} + \check{A}_3\mathring{\chi}$$

Соотношения (4.7) примут вид

$$\phi_{ij} = \overset{\vee}{Y} P_{ij}, \quad \psi_{ij} = \overset{\vee}{Z} Q_{ij} \tag{5.7}$$

$$\tilde{\chi} = \overset{\vee}{Y}_1 \tilde{\sigma} + \overset{\vee}{Y}_2 \mathring{\sigma}, \quad \mathring{\chi} = \overset{\vee}{Y}_4 \tilde{\sigma} + \overset{\vee}{Y}_3 \mathring{\sigma} \tag{5.8}$$

Точно так же, как и в предыдущем пункте, можно показать эквивалентность записей (5.7) и записи

$$\phi_{ij} = \overset{\vee}{X} p_{ij}, \quad \psi_{ij} = \overset{\vee}{U} q_{ij} \tag{5.9}$$

$$\tilde{\chi} = \overset{\vee}{X}_1 \tilde{\theta} + \overset{\vee}{X}_2 \mathring{\varepsilon}, \quad \mathring{\chi} = \overset{\vee}{X}_4 \tilde{\theta} + \overset{\vee}{X}_3 \mathring{\varepsilon} \tag{5.10}$$

В любом случае, приняты за основу соотношения (5.7), (5,8) или (5.9), (5.10). Можно соотношения (5.5), (5.6) переписать в виде

$$p_{ij} = \overset{\vee}{Q} P_{ij}, \quad q_{ij} = \overset{\vee}{R} Q_{ij} \tag{5.11}$$

$$\tilde{\theta}^T = \overset{\vee}{Q}_1 \tilde{\sigma} + \overset{\vee}{Q}_2 \mathring{\sigma}, \quad \mathring{\varepsilon} = \overset{\vee}{Q}_4 \tilde{\sigma} + \overset{\vee}{Q}_3 \mathring{\sigma} \tag{5.12}$$

Зная тензор повреждаемости $\underset{\sim}{\chi}$ (5.3) и его инварианты (5.4), мы составляем меры повреждаемости $M_1, \ldots, M_\varphi$ как функции этих инвариантов. Однако мы примем упрощающее предположение, что меры повреждаемости зависят только от тех инвариантов, которые соответствуют представлению определяющих соотношений в виде (5.11), (5.12). Тогда критерии разрушения можно записать

$$M_1(\phi) \le C_1, \quad M_2(\Psi) \le C_2, \quad M_3(\tilde{\chi}, \mathring{\chi}) \le C_3, \quad M_4(\tilde{\chi}, \mathring{\chi}) \le C_4 \tag{5.13}$$

или

$$\phi \le C_1, \quad \Psi \le C_2, \quad a\tilde{\chi} + b\mathring{\chi} \le C_3, \quad b\chi + d\mathring{\chi} \le C_4 \tag{5.14}$$

Предположим теперь, что осуществляется эксперимент на растяжение цилиндрического образца в направление x_1. В этом случае при ползучести

$$\sigma_{ij} = \sigma_{11}^0 \delta_{i1} \delta_{j1} h(t) \tag{5.15}$$

Тогда, считая, что и в этом пункте все операторные соотношения описываются разностными ядрами в форме интегралов Стильтьеса, мы для малых уровней напряжений найдем из эксперимента на ползучесть ядра $K_1(t)$, $K_2(t)$, $K(t)$ используя соотношения (5.5), (5.6). При больших уровнях напряжений найдем ядра $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, $Q(t)$, используя соотношения (5.11), (5.12).

Если растянуть цилиндрический образец в направление x_3:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{33}^0 \delta_{i3} \delta_{j3} h(t) \tag{5.16}$$

то найдем описанным образом ядра ползучести, $K_2(t)$, $K_3(t)$ а также $Q_2(t)$, $Q_3(t)$. Найденные двумя способами ядра $K_2(t)$, $Q_2(t)$ можно будет сравнить.

Из эксперимента на ползучесть при кручении образца

$$\sigma_{ij} = \sigma_{13}^0 (\delta_{i1} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j1}) h(t) \tag{5.17}$$

найдем ядра ползучести $L(t)$, $R(t)$. Кроме того, из серии экспериментов такого напряженного состояния мы можем найти зависимость скручивающего напряжения

$\overset{0}{\sigma}_{13}$ от времени разрушения

$$\overset{0}{\sigma}_{13} = S_{13}^*(t^*) \qquad (5.18)$$

Зная функцию (5.18) можно, аналогично тому, как это описано в предыдущем пункте, найти ядро $Z(t)$ из соотношения (5.8). В самом деле, компонента тензора напряжений σ_{13} входит только в один инвариант $\left(Q = \left(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2\right)^{1/2}\right)$, а поэтому и мера повреждаемости определяется только этим инвариантом (Ψ), как следует из второго соотношения (5.7). Поэтому, зная ядро $Z(t)$ (5.13)

$$Z(t) = C_2 / S_{13}^*(t^*) \qquad (5.19)$$

можно найти ядро $B(t)$ оператора $\check{B}$, входящего в соотношения (5.5), решая интегральное уравнение, аналогичное (4.36):

$$\int_0^t Z(t-\tau)dB(\tau) = R(t) - L(t) \qquad (5.20)$$

Сложнее обстоит дело с определением ядер $A(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$.

Разумеется, и при проведении экспериментов типа (5.15), (5.16) также можно найти зависимости растягивающих напряжений $\overset{0}{\sigma}_{11}$, $\overset{0}{\sigma}_{33}$ от соответствующих времен разрушения

$$\overset{0}{\sigma}_{11} = S_{11}^*(t^*), \quad \overset{0}{\sigma}_{33} = S_{33}^*(t^*) \qquad (5.21)$$

Можно также провести эксперимент на ползучесть при кручении

$$\sigma_{ij} = \overset{0}{\sigma}_{12}(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1})h(t) \qquad (5.22)$$

и из него определить не только уже найденные раньше ядра ползучести $K(t)$, $Q(t)$, но и установить зависимость сдвигового напряжения $\overset{0}{\sigma}_{12}$ от времени разрушения t*

$$\overset{0}{\sigma}_{12} = S_{12}^*(t^*) \qquad (5.23)$$

Однако каждая из компонент тензора σ_{11}, σ_{33}, σ_{12} входит в инварианты P, $\tilde{\sigma}$, $\mathring{\sigma}$ и тем самым фигурирует в критериях прочности (5.14). Так, что для нахождения ядер $A(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$ необходимо использовать комбинацию мер повреждаемости (5.14).

Пользуясь произволом масштаба компонент χ_{ij} и мер повреждаемости (5.13), (5.14), последние можно нормировать [10]. Эта нормировка заключается в том, что можно одну из компонент тензора повреждаемости $\underset{\sim}{\chi}$, входящую в критерий (5.14), сделать равной единице. Например, если некоторый тензор $\underset{\sim}{\chi}^{(s)}$ соответствует чистому сдвигу

$$\chi_{12}^{(s)} = \delta_{j1}\delta_{i2} \qquad (5.24)$$

то одну из компонент этого тензора можно сделать равной единице, а остальные будут нулевыми и можно положить

$$M_s(\underset{\sim}{\chi}^{(s)}) = C_s = \text{const} \qquad (5.25)$$

Можно выбрать другой тензор $\underset{\sim}{\chi}^{(r)}$, соответствующий простому растяжению в направлении x_1. Тогда компоненту $\chi_{11}^{(r)}$ можно положить равной единице. Но у такого тензора компонента $\chi_{22}^{(r)}$ может отличаться от нуля, положим ее равной $\lambda < 1$:

$$\chi_{11}^{(r)} = 1, \quad \chi_{22}^{(r)} = \lambda < 1 \qquad (5.26)$$

Остальные компоненты тензора $\underset{\sim}{\chi}^{(r)}$ равны нулю. Для тензора $\underset{\sim}{\chi}^{(r)}$ можно записать меру повреждаемости и условие прочности в виде

$$M_r(\underset{\sim}{\chi}^{(r)}) = C_r = \text{const} \tag{5.27}$$

После нахождения таких констант критерии прочности становятся нормированными

$$M_s(\underset{\sim}{\chi}) \le M_s(\underset{\sim}{\chi}^{(s)}), \quad M_r(\underset{\sim}{\chi}) \le M_r(\underset{\sim}{\chi}^{(r)}) \tag{5.28}$$

Из (5.14) видно, что без ограничения общности критерии прочности могут быть записаны в виде

$$\phi \le C_1, \; \Psi \le C_2, \; |\tilde{\chi}| \le C_3, \; |\mathring{\chi}| \le C_4 \tag{5.29}$$

Нормировка этих критериев позволяет положить в них

$$\chi_{11} = 1, \; \chi_{12} = 1, \; \chi_{13} = 1, \; \chi_{33} = 1, \; \chi_{22} = \lambda \tag{5.30}$$

Пусть известны эксперименты, устанавливающие зависимость напряжений от времени разрушения (5.18), (5.21), (5.23). Рассмотрим еще раз каждый из них. В случае напряженного состояния, описываемого (5.17), получаем единственную, отличную от нуля, компоненту тензора $\underset{\sim}{\chi}$:

$$\chi_{13} = 2\psi_{13} = 2\check{Z} Q_{13} = \check{Z}\sigma_{13} \tag{5.31}$$

Эта компонента входит только в инвариант Ψ. Поэтому согласно (5.29) и (5.30), имеем из (5.31):

$$Z(t) = 1 / S_{13}^*(t) \tag{5.32}$$

Рассмотрим теперь напряженное состояние (5.22). В этом случае также имеем единственную компоненту тензора χ_{ij}, отличную от нуля

$$\chi_{12} = \phi_{12} = \check{Y} P_{12} = \check{Y}\sigma_{12} \tag{5.33}$$

Эта компонента также входит в единственный инвариант тензора повреждаемости Φ. Поэтому согласно (5.29), (5.30) из (5.33) имеем

$$Y(t) = 1 / S_{12}^*(t) \tag{5.34}$$

Для напряженного состояния (5.14) отличными от нуля компонентами тензора повреждаемости являются

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= \phi_{11} + \tilde{\chi} = \check{Y} P_{11} + \check{Y}_1 \tilde{\sigma} = \tfrac{1}{2}(\check{Y} + \check{Y}_1)\sigma_{11} \\ \chi_{22} &= \phi_{22} + \tilde{\chi} = \check{Y} P_{22} + \check{Y}_1 \tilde{\sigma} = \tfrac{1}{2}(-\check{Y} + \check{Y}_1)\sigma_{11} \\ \chi_{33} &= \mathring{\chi} = \check{Y}_4 \tilde{\sigma} = \tfrac{1}{2}\check{Y}_4 \sigma_{11} \end{aligned} \tag{5.35}$$

Эти компоненты входят в инварианты

$$\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}|\chi_{11} - \chi_{22}|, \quad \tilde{\chi} = \frac{1}{2}(\chi_{11} + \chi_{22}), \quad \mathring{\chi} = \chi_{33} \tag{5.36}$$

Используя первый из инвариантов (5.36) и (5.29), (5.30) из (5.35) получим

$$Y(t) = (1 - \lambda) / S_{11}^*(t) \tag{5.37}$$

Для второго из инвариантов (5.36) имеем

$$Y_1(t) = (1+\lambda) / S_{11}^*(t) \tag{5.38}$$

и, наконец, для последнего

$$Y_4(t) = 2 / S_{11}^*(t) \tag{5.39}$$

Для напряженного состояния, соответствующего простому растяжению в направлении оси x_3, имеем отличными от нуля компоненты тензора $\underset{\sim}{\chi}$:

$$\chi_{11} = \tilde{\chi} = \check{Y}_2 \mathring{\sigma} = \check{Y}_2 \sigma_{33} \tag{5.40}$$

$$\chi_{22} = \tilde{\chi} = \check{Y}_2 \mathring{\sigma} = \check{Y}_2 \sigma_{33}, \quad \chi_{33} = \mathring{\chi} = \check{Y}_3 \mathring{\sigma} = \check{Y}_3 \sigma_{33}$$

Эти компоненты входят в инварианты

$$\tilde{\chi} = (\chi_{11} + \chi_{22}) / 2, \quad \mathring{\chi} = \chi_{33} \tag{5.41}$$

Поэтому из (5.30) имеем

$$Y_3(t) = \frac{1}{S_{33}^*(t)}, \quad \check{Y}_2(t) = \frac{1+\lambda}{2S_{33}^*(t)} \tag{5.42}$$

Итак, формулами (5.34), (5.37)–(5.39), (5.41), (5.42) определены все ядра, являющиеся материальными функциями операторов (5.7), (5.8), а значит, определены все ядра, описывающие операторные соотношения (5.11).

Заметим, что для ядра ползучести $Y(t)$ имеется два определения: (5.34) и (5.37). Следовательно, согласно рассматриваемой теории, экспериментально определяемые функции $S_{11}^*(t)$, $S_{12}^*(t)$ – подобны

$$S_{11}^*(t) = (1-\lambda) S_{12}^*(t) \tag{5.43}$$

При этом постоянная λ вполне определена из сопоставления $S_{11}^*(t)$, $S_{12}^*(t)$. Если эксперимент не подтверждает подобия (5.43), то мера $\phi \le C_1$ применительно к случаю простого растяжения не зависит от χ_{22} (или может быть заменена на более общую).

6. Полярная среда. Полярная среда, т.е. среда, в которой учитываются магнитные напряжения, будет введена далее различными способами. Однако формально будем считать моментные напряжения тензором второго ранга $\underset{\sim}{\mu}$, для которого справедливы определяющие соотношения операторного вида (3.1). Для конкретизации этих определяющих соотношений можно использовать соотношения типа (4.1). Например,

$$\sigma_{ij} = \int_0^t \Gamma_{ijkl}(t,\tau)\varepsilon_{kl}^T(\tau)d\tau + \int_0^t \gamma_{ijkl}(t,\tau)\kappa_{kl}^T(\tau)d\tau + \tag{6.1}$$

$$+ \int_0^t V_{ijkl}(t,\tau)\chi_{kl}(\tau)d\tau + \int_0^t \nu_{ijkl}(t,\tau)\chi'_{kl}(\tau)d\tau$$

$$\mu_{ij} = \int_0^t \Gamma'_{ijkl}(t,\tau)\kappa_{kl}^T(\tau)d\tau + \int_0^t \gamma'_{ijkl}(t,\tau)\varepsilon_{kl}^T(\tau)d\tau + \tag{6.2}$$

$$+ \int_0^t V'_{ijkl}(t,\tau)\chi'_{kl}(\tau)d\tau + \int_0^t \nu'_{ijkl}(t,\tau)\chi_{kl}(\tau)d\tau$$

При этом для тензоров повреждаемости $\underset{\sim}{\chi}$, $\underset{\sim}{\chi}'$ (2.6) в соответствии с выбранным частным случаем (4.2), запишем

$$\chi_{ij}=\int_0^t X_{ijkl}(t,\tau)\varepsilon^T_{kl}(\tau)d\tau+\int_0^t x_{ijkl}(t,\tau)\kappa^T_{kl}(\tau)d\tau$$

$$\chi'_{ij}=\int_0^t X'_{ijkl}(t,\tau)\kappa^T_{kl}(\tau)d\tau+\int_0^t x'_{ijkl}(t,\tau)\varepsilon^T_{kl}(\tau)d\tau \tag{6.3}$$

Как и в п. 4, будем использовать сокращенные (операторные) обозначения для записи соотношений типа (6.1)–(6.3):

$$\sigma_{ij}=\check{\Gamma}_{ijkl}\,\varepsilon^T_{kl}+\check{\gamma}_{ijkl}\,\kappa^T_{kl}+\check{V}_{ijkl}\,\chi_{kl}+\check{v}_{ijkl}\,\chi'_{kl}$$

$$\mu_{ij}=\Gamma'_{ijkl}\chi^T_{kl}+\gamma'_{ijkl}\varepsilon^T_{kl}+V'_{ijkl}\chi'_{kl}+v'_{ijkl}\chi_{kl} \tag{6.4}$$

$$\chi_{ij}=\check{X}_{ijkl}\,\varepsilon^T_{kl}+\check{x}_{ijkl}\,\check{\kappa}^T_{kl},\quad x_{ij}=\check{X}'_{ijkl}\,\kappa^T_{kl}+\check{x}'_{ijkl}\,\varepsilon^T_{kl}$$

Как и в случае п. 4, можно записать (6.4) в виде

$$\sigma_{ij}=\check{S}'_{ijkl}\,\varepsilon^T_{kl}+\check{s}_{ijkl}\,\kappa^T_{kl} \tag{6.5}$$

$$\mu_{ij}=\check{S}_{ijkl}\,\kappa^T_{kl}+\check{s}'_{ijkl}\,\varepsilon^T_{kl} \tag{6.6}$$

$$\check{S}_{ijkl}=\check{\Gamma}_{ijkl}+\check{V}_{ijmn}\,\check{X}_{mnkl} \tag{6.7}$$

$$\check{S}'_{ijkl}=\check{\Gamma}'_{ijkl}+\check{V}'_{ijmn}\,\check{X}'_{mnkl} \tag{6.8}$$

$$\check{s}_{ijkl}=\check{\gamma}_{ijkl}+\check{v}_{ijmn}\,\check{x}_{mnkl} \tag{6.9}$$

$$\check{s}'_{ijkl}=\check{\gamma}'_{ijkl}+\check{v}'_{ijmn}\,\check{x}'_{mnkl} \tag{6.10}$$

Определяющие соотношения (6.5), (6.6) будем считать обратными

$$\varepsilon^T_{ij}=\check{Q}_{ijkl}\,\sigma_{kl}+\check{q}_{ijkl}\,\mu_{kl} \tag{6.11}$$

$$\chi^T_{ij}=Q'_{ijkl}\mu_{kl}+q'_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{6.12}$$

где в случае, если рассматриваются разностные ядра (т.е. умножение операторов коммутативно)

$$\check{Q}_{ijkl}=\check{R}_{ijmn}\,\check{S}'_{mnkl},\quad \check{Q}'_{ijkl}=\check{R}_{ijmn}\,\check{S}_{mnkl},\quad \check{q}_{ijkl}=-\check{R}_{ijmn}\,\check{s}_{mnkl},\quad \check{q}'_{ijkl}=-\check{R}_{ijmn}\,\check{s}'_{mnkl} \tag{6.13}$$

а оператор $\check{R}_{ijkl}$ является обратным к оператору $\check{S}_{ijmn}\,\check{S}'_{mnkl}-\check{s}_{ijmn}\,\check{s}'_{mnkl}$, т.е.

$$\check{R}_{ijmn}(\check{S}_{mnpq}\,\check{S}'_{pqkl}-\check{s}_{mnpq}\,\check{s}'_{pqkl})=\Delta_{ijkl} \tag{6.14}$$

Будем считать, что операторы $\check{Q}_{ijkl},\check{Q}'_{ijkl},\check{q}_{ijkl},\check{q}'_{ijkl}$ в соответствии с (4.16) имеют вид

$$\check{Q}_{ijkl}=\check{K}_{ijkl}+\check{A}_{ijmn}\,\check{Y}_{mnkl},\quad \check{Q}'_{ijkl}=\check{K}'_{ijkl}+\check{A}'_{ijmn}\,\check{Y}'_{mnkl} \tag{6.15}$$

$$\check{q}_{ijkl}=\check{k}_{ijkl}+\check{a}_{ijmn}\,\check{y}_{mnkl},\quad \check{q}'_{ijkl}=\check{k}'_{ijkl}+\check{a}'_{ijmn}\,\check{y}'_{mnkl}$$

при этом справедливы определяющие соотношения вида (4.15):

$$\varepsilon_{ij}^{T} = \check{K}_{ijkl}\,\sigma_{kl} + \check{k}_{ijkl}\,\mu_{kl} + \check{A}_{ijkl}\,\chi_{kl} + \check{a}_{ijkl}\,\chi'_{kl} \tag{6.16}$$

$$\kappa_{ij}^{T} = \check{K}'_{ijkl}\,\mu_{kl} + \check{k}'_{ijkl}\,\sigma_{kl} + \check{A}'_{ijkl}\,\chi'_{kl} + \check{a}'_{ijkl}\,\chi_{kl}$$

а тензоры повреждаемости χ_{ij}, χ'_{ij} связаны с тензорами напряжений и моментных напряжений соотношениями

$$\chi_{ij} = \check{Y}_{ijkl}\,\sigma_{kl} + \check{y}_{ijkl}\,\mu_{kl}, \quad \chi'_{ij} = Y'_{ijkl}\mu_{kl} + \check{y}'_{ijkl}\,\sigma_{kl} \tag{6.17}$$

В дальнейшем будем рассматривать трансверсально изотропную среду. Введем разложения, аналогичные (5.1)–(5.3) для тензоров $\mu_{ij}, \chi_{ij}, \chi'_{ij}$:

$$\mu_{ij} = \tilde{\mu}\gamma_{ij} + \mathring{\mu}\, l_i l_j + M_{ij} + 2N_{ij}, \quad \kappa_{ij} = \tilde{\kappa}\gamma_{ij} + \mathring{\kappa}\, l_i l_j + 2\upsilon_{ij} \tag{6.18}$$

$$\chi'_{ij} = \tilde{\chi}\gamma_{ij} + \tilde{\chi}' l_i l_j + \phi_{ij} + 2\Psi_{ij} \tag{6.19}$$

и соответствующие инварианты

$$\tilde{\mu}, \mathring{\mu}, M, N; \tilde{\kappa}, \mathring{\kappa}, u, \upsilon; \tilde{\chi}', \mathring{\chi}', \phi', \Psi' \tag{6.20}$$

Тогда определяющие соотношения (6.10) для этого случая можно записать в виде

$$p_{ij} = \check{K}\,P_{ij} + \check{k}\,M_{ij} + \check{A}\,\phi_{ij} + \check{a}\,\phi'_{ij} \tag{6.21}$$

$$u_{ij} = \check{K}'\,M_{ij} + \check{k}'\,P_{ij} + \check{A}'\,\phi'_{ij} + \check{a}'\,\phi_{ij} \tag{6.22}$$

$$q_{ij} = \check{L}\,Q_{ij} + \check{l}\,N_{ij} + \check{B}\,\Psi_{ij} + \check{b}\,\Psi'_{ij} \tag{6.23}$$

$$\nu_{ij} = \check{L}'\,N_{ij} + \check{l}'\,Q_{ij} + \check{B}'\,\Psi'_{ij} + \check{b}'\,\Psi_{ij} \tag{6.24}$$

$$\tilde{\theta}^{T} = \check{K}_1\,\tilde{\sigma} + \check{K}_2\,\mathring{\sigma} + \check{k}_1\,\tilde{\mu} + \check{k}_2\,\mathring{\mu} + \check{A}_1\,\tilde{\chi} + \check{A}_2\,\mathring{\chi} + \check{a}_1\,\tilde{\chi}' + \check{a}_2\,\mathring{\chi}' \tag{6.25}$$

$$\tilde{\varepsilon}^{T} = \check{K}_2\,\tilde{\sigma} + \check{K}_3\,\mathring{\sigma} + \check{k}_2\,\tilde{\mu} + \check{k}_3\,\mathring{\mu} + \check{A}_2\,\tilde{\chi} + \check{A}_3\,\mathring{\chi} + \check{a}_2\,\tilde{\chi}' + \check{a}_3\,\mathring{\chi}'$$

$$\tilde{\kappa} = \check{K}'_1\,\tilde{\mu} + \check{K}'_2\,\mathring{\mu} + \check{k}'_1\,\tilde{\sigma} + \check{k}'_2\,\mathring{\sigma} + \check{A}'_1\,\tilde{\chi}' + \check{A}'_2\,\mathring{\chi}' + \check{a}'_1\,\tilde{\chi} + \check{a}'_2\,\mathring{\chi} \tag{6.26}$$

$$\mathring{\kappa} = \check{K}'_2\,\tilde{\mu} + \check{K}'_3\,\mathring{\mu} + \check{k}'_2\,\tilde{\sigma} + \check{k}'_3\,\mathring{\sigma} + \check{A}'_2\,\tilde{\chi}' + \check{A}'_3\,\mathring{\chi}' + \check{a}'_2\,\tilde{\chi} + \check{a}'_3\,\mathring{\chi}$$

Тензоры повреждаемости χ_{ij}, χ'_{ij} выражаются через тензоры напряжений и моментных напряжений следующим образом

$$\phi_{ij} = \check{Y}\,P_{ij} + \check{y}\,M_{ij}, \quad \Psi_{ij} = \check{Z}\,Q_{ij} + \check{z}\,N_{ij} \tag{6.27}$$

$$\tilde{\chi} = \check{Y}_1\,\tilde{\sigma} + \check{Y}_2\,\mathring{\sigma} + \check{y}'_1\tilde{\mu} + \check{y}_2\,\mathring{\mu}, \quad \mathring{\chi} = \check{Y}_4\tilde{\sigma} + \check{Y}_3\,\mathring{\sigma} + \check{y}'_4\tilde{\mu} + \check{y}_3\,\mathring{\mu} \tag{6.28}$$

$$\phi'_{ij} = \check{Y}'\,M_{ij} + \check{y}'\,P_{ij}, \quad \Psi'_{ij} = \check{Z}'\,N_{ij} + \check{z}'\,Q_{ij} \tag{6.29}$$

$$\tilde{\chi}' = \check{Y}'_1\tilde{\mu} + \check{Y}'_2\,\mathring{\mu} + \check{y}'_1\,\tilde{\sigma} + \check{y}'_2\,\mathring{\sigma}, \quad \mathring{\chi}' = \check{Y}'_4\,\tilde{\mu} + \check{Y}'_3\mathring{\mu} + \check{y}'_4\,\tilde{\sigma} + \check{y}'_3\,\mathring{\sigma} \tag{6.30}$$

Зададим меры повреждаемости (2.2) $M_m(\underset{\sim}{\chi},\underset{\sim}{\chi}')$ как функции инвариантов, тензоров повреждаемости $\underset{\sim}{\chi},\underset{\sim}{\chi}'$. Следуя [10] образуем суммарный тензор повреждаемости

$$\chi''_{ij}=\chi_{ij}+\chi'_{ij} \tag{6.31}$$

Образуем его инварианты

$$\tilde{\chi}'',\overset{\circ}{\chi}'',\phi'',\Psi'' \tag{6.32}$$

и выберем критерий прочности в виде

$$M_m(\tilde{\chi}'',\overset{\circ}{\chi}'',\phi'',\Psi'')\le C_m \tag{6.33}$$

Как частный случай, рассмотрим (6.33) в виде, аналогичном критерию (5.29)

$$\phi''\le C_1,\Psi''\le C_2,\tilde{\chi}\le C_3,\overset{\circ}{\chi}\le C_4 \tag{6.34}$$

Определяющие соотношения (6.21)–(6.26) с учетом соотношений (6.27)–(6.30), написанных как обобщение соотношений (5.9), (5.10), запишем в виде

$$p_{ij}=\overset{\vee}{Q}P_{ij}+\overset{\vee}{q}M_{ij},\ \ q_{ij}=\overset{\vee}{R}Q_{ij}+\overset{\vee}{r}N_{ij} \tag{6.35}$$

$$u_{ij}=\overset{\vee}{Q}{}'M_{ij}+\overset{\vee}{q}{}'P_{ij},\ \ v_{ij}=\overset{\vee}{R}{}'N_{ij}+\overset{\vee}{r}{}'Q_{ij} \tag{6.36}$$

$$\tilde{\theta}^T=\overset{\vee}{Q}_1\tilde{\sigma}+\overset{\vee}{Q}_2\overset{\circ}{\sigma}+\overset{\vee}{q}_1\tilde{\mu}+\overset{\vee}{q}_2\overset{\circ}{\mu} \tag{6.37}$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}{}^T=\overset{\vee}{Q}_4\tilde{\sigma}+\overset{\vee}{Q}_3\overset{\circ}{\sigma}+\overset{\vee}{q}_4\tilde{\mu}+\overset{\vee}{q}_3\overset{\circ}{\mu}$$

$$\tilde{\kappa}^T=\overset{\vee}{Q}{}'_1\tilde{\mu}+\overset{\vee}{Q}{}'_2\overset{\circ}{\mu}+\overset{\vee}{q}{}'_1\tilde{\sigma}+\overset{\vee}{q}{}'_2\overset{\circ}{\sigma} \tag{6.38}$$

$$\overset{\circ}{\kappa}{}^T=\overset{\vee}{Q}{}'_4\tilde{\mu}+\overset{\vee}{Q}{}'_3\overset{\circ}{\mu}+\overset{\vee}{q}{}'_4\tilde{\sigma}+\overset{\vee}{q}{}'_3\overset{\circ}{\sigma}$$

Чтобы найти экспериментально ядра ползучести, соответствующие операторным определяющим соотношениям (6.21)–(6.26), (6.35)–(6.38), необходимо реализовать процессы ползучести при неоднородном напряженном состоянии, например, вида [10]:

$$\sigma_{ij}=\beta\overline{\sigma}_{ij}(\mathbf{x})h(t),\ \ \mu_{ij}=\beta\overline{\mu}_{ij}(\mathbf{x})h(t) \tag{6.39}$$

где $\overline{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}),\overline{\mu}_{ij}(\mathbf{x})$ – какие-нибудь известные функции координат **x** точки тела; β – параметр характеризующий интенсивность нагрузки.

Разумеется, описанные в предыдущем пункте эксперименты, в которых не учитывается влияние моментных напряжений, остаются в силе. Другими словами, все ядра ползучести, обозначаемые большими нештрихованными латинскими буквами, считаем известными.

Положим для простоты, что перекрестные эффекты в определении тензоров повреждаемости, отсутствуют. Другими словами, пусть отсутствуют операторы $\check{y}_{ijkl}$ и $\check{y}'_{ijkl}$ в (6.17), а значит, отсутствуют в выражениях (6.27)–(6.30) все операторы, обозначаемые малыми латинскими буквами: $y, y_1,..., y_n, z; y', y'_1,..., y'_4, z'$.

Рассмотрим для примера процесс (6.39), в котором отличные от нуля будут только компоненты с индексами (13):

$$\sigma_{13}=\beta\overline{\sigma}_{13}(\mathbf{x})h(t),\ \ \mu_{13}=\beta\overline{\mu}_{13}(\mathbf{x})h(t) \tag{6.40}$$

Используем (6.27), (6.29) и (5.32). Тогда очевидно

$$\chi_{13} = \overline{\sigma}_{13}\beta / S_{13}^*(t), \quad \chi_{13}' = \overline{\mu}_{13}\beta z'(t) \tag{6.41}$$

И из (6.34) имеем

$$\chi_{13}'' \equiv \chi_{13} + \chi_{13}', \quad \Psi'' = \chi_{13}'' = C_2 \tag{6.42}$$

В эксперименте (6.40) установим некоторую точку $\mathbf{x}_{(1)}$, в которой впервые будет происходить разрушение. Тогда для каждого числового значения параметра нагружения $\beta = \beta_{13}$ будет определено время разрушения t^*, т.е. будет найдена функция

$$\beta_{13} = f_{13}(t^*) \tag{6.43}$$

Внося это значение в (6.41) и принимая во внимание нормировку (5.29):

$$\chi_{11}' = 1, \chi_{12}'' = 1, \chi_{13}'' = 1, \chi_{33}'' = 1, \chi_{22}'' = \lambda' \tag{6.44}$$

получим из (6.42) искомое ядро

$$z'(t) = \frac{1}{\overline{\mu}_{13} f_{13}(t)} - \frac{\overline{\sigma}_{13} 1}{\overline{\mu}_{13} S_{13}^*(t)} \tag{6.45}$$

Рассмотрим теперь напряженное состояние

$$\sigma_{12} = \beta\overline{\sigma}_{12}(\mathbf{x})h(t), \quad \mu_{12} = \beta\overline{\mu}_{12}(\mathbf{x})h(t) \tag{6.46}$$

В этом случае из (6.27), (6.29) имеем

$$\chi_{12} = \overline{\sigma}_{12}\beta / S_{12}^*(t), \quad \chi_{12}' = \overline{\mu}_{12}\beta Y'(t) \tag{6.47}$$

Откуда после применения критерия прочности, находим

$$Y'(t) = \frac{1}{\overline{\mu}_{12} f_{12}(t)} - \frac{\overline{\sigma}_{12} 1}{\overline{\mu}_{12} S_{12}^*(t)} \tag{6.48}$$

Рассмотрим теперь растяжение в направление оси x_1:

$$\sigma_{11} = \beta\overline{\sigma}_{11}(\mathbf{x})h(t), \quad \mu_{11} = \beta\overline{\mu}_{11}(\mathbf{x})h(t) \tag{6.49}$$

Тогда получаем в соответствии с (5.34), (5.36) и (5.37):

$$\begin{gathered}
\chi_{11} = \overline{\sigma}_{11}\frac{\beta}{S_{11}^*(t)}, \quad \chi_{11}' = \frac{\beta}{2}\overline{\mu}_{11}[Y'(t) + Y_1'(t)] \\
\chi_{22} = \overline{\sigma}_{11}\beta\frac{\lambda}{S_{11}^*(t)}, \quad \chi_{22}' = \frac{\beta}{2}\overline{\mu}_{11}[-Y'(t) + Y_1'(t)] \\
\chi_{33} = \overline{\sigma}_{11}\beta\frac{1}{S_{11}^*(t)}, \quad \chi_{33}' = \frac{\beta}{2}\overline{\mu}_{11}Y_4'(t)
\end{gathered} \tag{6.50}$$

Образуем инварианты тензора $\underset{\sim}{\chi}''$, по аналогии с (5.35):

$$\phi'' = \frac{k}{2}\left|\chi_{11} - \chi_{22} + \chi_{11}' - \chi_{22}'\right| = \left|\frac{(1-\lambda)\beta\overline{\sigma}_{11}}{S_{11}^*(t)} + \beta\overline{\mu}_{11}Y'(t)\right| \tag{6.51}$$

$$\tilde{\chi}'' = \frac{1}{2}\left(\chi_{11} + \chi_{22} + \chi_{11}' + \chi_{22}'\right) = \frac{(1+\lambda)\beta}{S_{11}^*(t)}\overline{\sigma}_{11} + \beta\overline{\mu}_{11}Y_1'(t) \tag{6.52}$$

$$\overset{\circ}{\chi} = \chi_{33} + \chi_{33}' = \frac{\beta\overline{\sigma}_{11}}{S_{11}^*(t)} + \frac{\beta}{2}\overline{\mu}_{11}Y_4'(t) \tag{6.53}$$

Учитывая значение β при разрушении образца

$$\beta_{11} = f_{11}(t^*) \tag{6.54}$$

из (6.51)–(6.53), принимая во внимание условия нормировки, получим

$$Y'(t) = \frac{(1+\lambda')1}{\overline{\mu}_{11} f_{11}(t)} - \frac{\overline{\sigma}_{11}(1-\lambda)}{\overline{\mu}_{11} S_{11}^*(t)} \tag{6.55}$$

$$Y_1'(t) = \frac{1+\lambda' 1}{\overline{\mu}_{11} f_{11}(t)} - \frac{\overline{\sigma}_{11}(1+\lambda)}{\overline{\mu}_{11} S_{11}^*(t)} \tag{6.56}$$

$$Y_4'(t) = \frac{2 \ \ 1}{\overline{\mu}_{11} f_{11}(t)} - \frac{2\overline{\sigma}_{11} 1}{\overline{\mu}_{11} S_{11}^*(t)} \tag{6.57}$$

Для напряженного состояния, соответствующего простому растяжению в направлении оси x_3, имеем по аналогии с (5.39)–(5.41):

$$Y_3'(t) = \frac{1}{\overline{\mu}_{33} f_{33}(t)} - \frac{\overline{\sigma}_{33} 1}{\overline{\mu}_{33} S_{33}^*(t)} \tag{6.58}$$

$$Y_2'(t) = \frac{1+\lambda'}{2\overline{\mu}_{33} f_{33}(t)} - \frac{\overline{\sigma}_{33} 1+\lambda}{2\overline{\mu}_{33} S_{33}^*(t)} \tag{6.59}$$

И в этом случае для ядра ползучести $Y'(t)$ имеется два определения: (6.48) и (6.55), откуда следует соотношение, связывающее экспериментальные функции $f_{11}(t), f_{22}(t)$:

$$\frac{1-\lambda'}{\overline{\mu}_{11}} \frac{1}{f_{11}(t)} = \frac{1}{\overline{\mu}_{12} f_{12}(t)} + \varphi \frac{1}{S_{12}^*(t)} \tag{6.60}$$

$$\varphi = \overline{\sigma}_{11} / \overline{\mu}_{11} - \overline{\sigma}_{12} / \overline{\mu}_{12} \tag{6.61}$$

При $\varphi = 0$ функции $f_{11}(t), f_{22}(t)$ будут пропорциональными

$$f_{11}(t) = (1-\lambda')\overline{\mu}_{12} / \overline{\mu}_{11} \tag{6.62}$$

Заметим, что величина λ' вполне определена сопоставлением экспериментов (6.54) и $\beta_{12} = f_{12}(t^*)$.

Таким образом, указан путь для нахождения всех необходимых ядер ползучести.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-01233) и Федеральной целевой программы "Интеграция" (проект 426).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987. 320 с.
2. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
3. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
4. *Кишкин Б.П.* Конструкционная прочность материалов. М.: Изд-во МГУ, 1976. 184 с.
5. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
6. *Robinson E.L.* Effect of temperature variation on the long rupture gtrength of steels // Tr. ASME. 1952. V. 74. № 5. P. 27–31.
7. *Сдобырев В.П.* Критерий длительной прочности для некоторых жаропрочных сплавов при сложном напряженном состоянии // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959. № 6. С. 66–73.
8. *Трунин И.И.* Критерий прочности в условиях ползучести // Прикл. механика. 1965. № 7. С. 27–36.

9. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
10. *Ильюшин А.А.* Об одной теории длительной прочности. // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 3. С. 15–22.
11. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 365 с.
12. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.III.1998