

УДК 539.3

© 1998 г. В.Ф. ЧЕКУРИН

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ УРОВНЯ ЗАКАЛКИ ЛИСТОВОГО СТЕКЛА

При создании технологических режимов упрочняющей термообработки часто возникает необходимость неразрушающего контроля закаленности изделий из различных материалов, в частности, листовых стеклоизделий (например, автомобильных стекол). Задача, по существу, сводится к определению остаточных напряжений, обусловленных необратимыми физико-химическими и механическими процессами, возникающими при обработке.

Заметим, что решение подобной задачи чисто расчетным путем, исходя из заданных параметров технологического процесса обработки, вряд ли позволит достичь необходимой для инженерных приложений точности. Это связано, во-первых, с необходимостью учета в теоретической модели большого числа разнообразных факторов, оказывающих влияние на формирование остаточных напряжений, громоздкостью такой математической модели, а также со сложностью определения материальных характеристик. Во-вторых, затруднительным является также точное воспроизведение физических условий, имевших место во время процесса обработки (тепловых потоков, давлений, скоростей и т.д.), необходимых для установления адекватных краевых условий задачи и внешних объемных источников механических, тепловых и электромагнитных полей.

С другой стороны, использование различных методов физических измерений, например поляризационно-оптических [1, 2], позволяет получать экспериментальные данные, объем которых часто недостаточен для полного восстановления напряженного состояния объектов без использования дополнительной априорной информации.

В этой связи представляет научный и практический интерес разработка комбинированных методов, использующих как результаты физических измерений, так и достаточно простые теоретические модели, учитывающие остаточные напряжения, исходя из тех или иных представлений о механизмах их возникновения. В модели может быть заложена некоторая неопределенность, для устранения которой используются результаты физических измерений. При этом определение поля напряжений в теле может быть сведено к решению некоторой обратной задачи.

При использовании поляризационно-оптических методов результаты измерений содержат информацию о среднеинтегральной разности главных напряжений вдоль линии просвечивания объекта [1]. В случае листовых материалов тензор закалочных напряжений, как правило, изотропен в плоскости листа. Кроме того, остаточные напряжения самоуравновешены. Поэтому просвечивание таких объектов в направлениях, близких к нормальным к их поверхности является неинформативным. Этим затрудняется использование поляризационно-оптических методов для неразрушающего контроля остаточных напряжений таких объектов, в отличие от объектов, ограниченных поверхностью со значительной кривизной, например цилиндрических, конических, сферических [2].

В настоящей статье развивается подход, позволяющий определить распределение остаточных напряжений по толщинной координате листа с использованием результатов сквозного просвечивания поляризованным светом.

1. Геометрическая модель остаточных напряжений. Рассматривается изотропное твердое тело B , макроскопически однородное в отношении химического и физического состава, а также свойств материала. Тело B рассматриваем как связанное много-

образе материальных точек $X \in B$, вложенное в трехмерное евклидово пространство E^3 (евклидово многообразие).

В состоянии термодинамического и механического равновесия в отсутствие внешнего силового воздействия и других физических полей, при фиксированной температуре T в теле существуют внутренние напряжения σ^{ij} , $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Это означает, что материальные частицы $dX_1, dX_2 \in B$, разделенные элементарной площадкой $nd\Sigma$, взаимодействуют между собой с силой $\sigma^{ij}n_j d\Sigma$, где $\mathbf{n} = \{n_1\}$ – нормаль, $d\Sigma$ – площадь элементарной площадки. Следовательно, такое тело обладает определенной потенциальной энергией $\Pi(\sigma^{ij})$. Заметим, что поле напряжений $\sigma^{ij}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in V$ в общем случае неоднородно, поскольку на поверхности ∂V , ограничивающей занимаемую телом B область V , выполняется условие

$$\sigma^{ij}n_j|_{\partial V} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{n} = \{n_j\}$ – внешняя нормаль к ∂V .

Предположим, что существует неевклидова конфигурация V_0 тела B , в которой остаточные напряжения равны нулю при отсутствии внешних силовых воздействий, других физических полей и неизменной температуре T . Переход тела из V в V_0 или из V_0 в V приводит к изменению взаимного расположения материальных точек $X \in B$, т.е. – к деформации тела.

Если ввести в отсчетной конфигурации V_0 лагранжеву систему координат $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$, в которой метрический тензор \mathbf{g}_0 представится компонентами $g_{ij}^{(0)}$, то условие неевклидовости отсчетной конфигурации выразится в виде неравенства нулю тензора кривизны $\mathbf{R}(\mathbf{g}_0) = \{R_{ijkl}\}$ [2]:

$$\mathbf{R}(\mathbf{g}_0) = \mathbf{R}_0 \neq 0 \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{R}_0 = \{R_{ijkl}^{(0)}\}$ – некоторый тензор четвертого ранга, компоненты которого являются функциями координат $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$. Компоненты R_{ijkl} тензора кривизны выражаются с помощью нелинейного дифференциального оператора второго порядка через компоненты метрического тензора [3]. Отсюда следует, что g_{ij} должны быть по крайней мере дважды дифференцированными функциями координат ξ^l , $l \in \{1, 2, 3\}$.

При переходе к актуальной конфигурации компоненты метрического тензора изменятся с $g_{ij}^{(0)}$ на g_{ij} вследствие деформации лагранжевой системы координат. Согласно развешиваемым представлениям, метрика актуальной конфигурации тела B евклидова $\mathbf{g} = \{g_{ij}\} = \mathbf{E}$, где \mathbf{E} – единичный тензор евклидова пространства, следовательно

$$\mathbf{R}(\mathbf{g}) = 0 \quad (1.3)$$

Тензор кривизны \mathbf{R} имеет лишь шесть независимых компонент, вместо него можно использовать тензор Риччи [3] $\mathbf{R}\{R_{kl}\}$ – симметричный тензор второго ранга, такой, что

$$R_{kl} = R^i_{kli} \quad (1.4)$$

При этом для отсчетной и актуальной конфигураций имеем соответственно

$$\mathbf{R}(\mathbf{g}_0) = 2\mathbf{R}_0 \neq 0, \quad \mathbf{R}(\mathbf{g}) = 0 \quad (1.5)$$

$$\mathbf{R}_0 = \{R_{ij}^{(0)}\}, \quad R_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2} R_{ijl}^{(0)l} = \frac{1}{2} g_{(0)}^{kl} R_{kijl}^{(0)} \quad (1.6)$$

где $g_{(0)}^{kl}$ – контрвариантные компоненты метрического тензора отсчетной конфи-

гурации, которые определяются как элементы матрицы, обратной к матрице, составленной из компонент $g_{ij}^{(0)}$.

Компоненты деформации ε_{ij} определяем, как обычно, соотношением

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ij}^{(0)}) \quad (1.7)$$

Используя соотношения (1.5), (1.7) вместе с (1.4) (1.6) и соотношениями, выражающими компоненты тензоров кривизны отсчетной и актуальной конфигураций через компоненты метрических тензоров этих конфигураций [2], получаем уравнения на компоненты деформации ε_{ij} для тел с остаточными напряжениями. Если в актуальной конфигурации система координат – декартова (это возможно, поскольку актуальная конфигурация – евклидова), эти уравнения имеют вид

$$g_{(0)}^{kl} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{lk}}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial \xi^k \partial \xi^l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial \xi^i \partial \xi^l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{li}}{\partial \xi^k \partial \xi^j} + G_{*ji}^m G_{mlk} - G_{*jk}^m G_{mli} \right) = -R_{ij}^{(0)} \quad (1.8)$$

$$G_{ikl} = - \left(\frac{\partial \varepsilon_{il}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial \varepsilon_{lk}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial \xi^l} \right), \quad G_{*kl} = g_{(0)}^{ij} G_{jkl}$$

$$\|g_{(0)}^{ij}\| = \|\delta_{kl} - 2\varepsilon_{kl}\|^{-1}$$

где $\|g_{(0)}^{ij}\|$, $\|\delta_{kl} - 2\varepsilon_{kl}\|$ – матрицы соответствующих компонент.

В случае, когда деформации ε_{ij} достаточно малы, линеаризируя (1.8), получаем

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ji}}{\partial \xi^k \partial \xi^k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial \xi^i \partial \xi^k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ki}}{\partial \xi^k \partial \xi^j} = -R_{ij}^{(0)} \quad (1.9)$$

Дифференциальный оператор в левой части (1.9) есть оператор несовместности Ink [4], следовательно и правая часть представляет собой тензор несовместности от некоторого симметричного тензора второго ранга

$$\mathbf{R}_0 = \text{Ink } \varepsilon_0 \quad (1.10)$$

Здесь $\varepsilon_0 = \{\varepsilon_{ij}^{(0)}\}$ – тензор свободных деформаций.

Тензор напряжений σ^{ij} удовлетворяет уравнениям равновесия

$$\nabla_j \sigma^{ij} = 0 \quad (1.11)$$

где ∇_j – оператор ковариантного дифференцирования по лагранжевым координатам ξ^j в актуальной конфигурации.

В отсутствие внешних полей, при неизменной температуре T тензор напряжений σ^{ij} представляется через компоненты деформации физическими соотношениями

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad (1.12)$$

выражающими свойство упругости твердого тела.

Уравнения (1.8), (1.11), (1.12) и условия (1.1) составляют математическую модель тела с остаточными напряжениями. Подчеркнем, что модель незамкнута, поскольку в ней отсутствуют уравнения на тензорное поле $R_{ij}^{(0)}$.

В линейном приближении уравнения (1.12) имеют вид

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.13)$$

$$C^{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta^{ij} \delta^{kl} + G(\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}) \quad (1.14)$$

Здесь C^{ijkl} – тензор модулей упругости для изотропного тела, G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Комбинируя (1.9), (1.11), (1.13), получаем линейную систему уравнений, на декартовые компоненты σ^{ij} тензора остаточных напряжений

$$\Delta \sigma^{ij} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \delta_{kl} \sigma^{kl}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = 2G \left(R_{ij}^{(0)} - \delta^{ij} \frac{1}{1-\nu} \delta^{kl} R_{kl}^{(0)} \right) \quad (1.15)$$

В случае, если отсчетная конфигурация V_0 евклидова, $R_{ij}^{(0)} = 0$, система (1.15) становится однородной и напряжения в теле тождественно равны нулю, поскольку граничные условия (1.1) однородны. С другой стороны, если остаточные напряжения в теле отсутствуют, то существует евклидова ненапряженная в отсутствие внешних воздействий конфигурация. Таким образом, для линейной модели (1.1), (1.15) доказано, что принятое ранее предположение о неевклидовости ненапряженной в отсутствие внешних воздействий конфигурации, является необходимым и достаточным условием существования остаточных напряжений в теле.

2. Прямая задача определения закалочных напряжений. Определение остаточных напряжений в рамках рассмотренной модели сводится к решению системы уравнений (1.15), в которых $R_{ij}^{(0)}$ – заданные функции координат, при условиях (1.1) на границе.

Далее будем рассматривать плоские объекты, например прямоугольные листы $0 \leq x \leq a$, $-1 \leq y \leq 1$, $-b \leq z \leq b$, толщина которых $2h$ намного меньше размеров ah и $2bh$ в двух других направлениях (т.е. $a \gg 1$, $b \gg 1$). Здесь x , y , z – прямоугольные декартовы координаты, отнесенные к полутолщине h . При закалке таких изделий обычно стараются обеспечить однородные технологические условия по всей поверхности листа. Поэтому, рассматривая случай однородной и изотропной в плоскости листа закалки, в некотором приближении можно считать, что компоненты $R_{ij}^{(0)}$, которыми учитываются необратимые механические и физико-химические процессы, приводящие к возникновению остаточных напряжений, являются функциями лишь толщинной координаты y :

$$R_{ij}^{(0)} = R_{ij}^{(0)}(y) \quad (2.1)$$

Отсюда, исходя из соображений симметрии и принимая во внимание (1.10), находим, что лишь две компоненты R_{xx} и R_{zz} тензора R_0 отличны от нуля, причем

$$R_{xx}^{(0)} = R_{zz}^{(0)} = R_0(y) \quad (2.2)$$

При выполнении (2.1) в областях тела, удаленных от его краев, реализуется одномерное напряженное состояние, а в областях, примыкающих непосредственно к одному из краев, например $x = 0$, реализуется плоское напряженное состояние. Поэтому для нормальных к поверхности листа сечений $z = \text{const}$, удаленных от краев $z = -b$ и $z = b$ на расстояния, превышающие несколько толщин, вместо системы (1.15) имеем

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) &= -2G \frac{1+\nu}{1-\nu} R_0(y) \\ \Delta \sigma_{yy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) &= \frac{4G}{1-\nu} R_0(y) \\ \Delta \sigma_{zz} &= -2G \frac{1+\nu}{1-\nu} R_0(y), \quad \Delta \sigma_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь Δ – двумерный оператор Лапласа в декартовых координатах.

В качестве частного для системы уравнений (2.3) выберем решение, соответствующее одномерному напряженному состоянию

$$\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \sigma(y), \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \quad (2.4)$$

$$\sigma(y) = 2G \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(-\varepsilon_0(y) + \frac{3}{2} y \int_{-1}^1 y \varepsilon_0(y) dy + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varepsilon_0(y) dy \right) \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_0(y) = \int_0^y dy \int_0^y R_0(y) dy$$

Решение (2.5) удовлетворяет однородным условиям на сторонах $y = \pm 1$, следовательно, для обеспечения условий ненагруженности на контуре полуполосы общее решение соответствующей (2.3) однородной системы

$$\Delta \sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = 0$$

$$\Delta \sigma_{yy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = 0 \quad (2.6)$$

$$\Delta \sigma_{zz} = 0, \quad \Delta \sigma_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = 0$$

необходимо подчинить условиям

$$\sigma_{xx}|_{x=0,a} = -\sigma(y), \quad \sigma_{xy}|_{x=0} = 0, \quad \sigma_{yy}|_{y=\pm 1} = \sigma_{xy}|_{y=\pm 1} = 0 \quad (2.7)$$

Из системы (2.6) следует, что сумма компонент $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$, как и компонента σ_{zz} , отвечающие общему решению однородной системы, – гармонические функции. Следовательно, третье уравнение системы (2.6) будет удовлетворено, если принять [6]:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.8)$$

Сама же система (2.6) преобразуется при этом к виду

$$\Delta \sigma_{xx} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0, \quad \Delta \sigma_{yy} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0$$

$$\Delta \sigma_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (2.9)$$

Таким образом, задача определения остаточных напряжений в листе по заданному полю тензора несовместности сведена к решению системы (2.9) для полосы $0 \leq x \leq a$, $-1 \leq y \leq 1$ со свободными продольными сторонами $y = \pm 1$, нагруженной по торцам $x = 0$, $x = a$ самоуравновешенными силами. Согласно принципу Сен-Венана поле напряжений в этом случае локализовано в окрестностях торцов полосы, соизмеримых с ее толщиной. Поскольку длина полосы намного больше ее толщины, то взаимным влиянием торцов можно пренебречь и задачу рассматривать для полубесконечной полосы $0 \leq x \leq \infty$, $-1 \leq y \leq 1$.

Введением функции напряжений Эйри W система (2.9), как известно [4], сводится к бигармоническому уравнению

$$\Delta \Delta W = 0 \quad (2.10)$$

При этом имеем следующие представления для остаточных напряжений в листе:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \partial^2 W / \partial y^2 + \sigma(y), \\ \sigma_{xy} &= -\partial^2 W / \partial x \partial y \\ \sigma_{yy} &= \partial^2 W / \partial x^2, \quad \sigma_{zz} = \nu \Delta W + \sigma(y) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь W – затухающее на бесконечности решение бигармонического уравнения (2.10) для полубесконечной полосы, удовлетворяющее условиям

$$\left. \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right|_{x=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right|_{x=0} = -\sigma(y), \quad W|_{y=\pm 1} = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial y} \right|_{y=\pm 1} = 0 \quad (2.12)$$

3. Поляризационно-оптические параметры поля напряжений. Теория интегральной фотоупругости устанавливает зависимость между разностью фаз δ , приобретенную светом при прохождении через объект, и распределением напряжений вдоль линии распространения светового луча. Если линейно поляризованный свет распространяется в направлении оси y и направление поляризации вектора напряженности электрического поля делит угол между осями x и z пополам, эта зависимость имеет вид [1]:

$$\delta = c \frac{2\pi h}{\lambda} \int_{-1}^1 (\sigma_{xx} - \sigma_{zz}) dy \quad (3.1)$$

Здесь c – пьезооптическая постоянная материала, λ – длина волны зондирующего света.

Подставляя (2.11) в (3.1) и принимая во внимание последнее соотношение (2.12), получим

$$\delta = c \frac{2\pi h \nu}{\lambda} \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dy \quad (3.2)$$

На фиг. 1 (сплошная линия) показана зависимость параметра δ/δ_0 ($\delta_0 = 2\pi h \nu \sigma_0/\lambda$) от координаты x , рассчитанная по (3.2) для случая

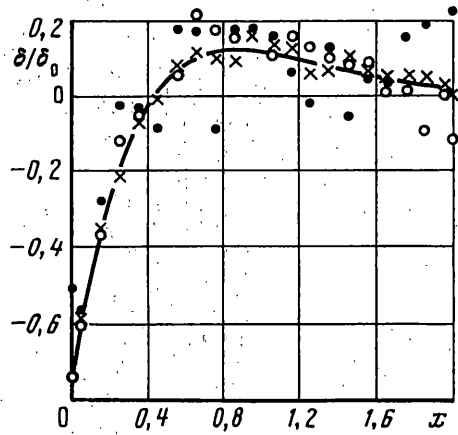
$$\sigma(y) = \sigma_0 \left(\frac{3}{2} y^2 - \frac{3}{2} \right) \quad (3.3)$$

Задача (2.10), (2.12) при этом решалась приближенно по методу [5].

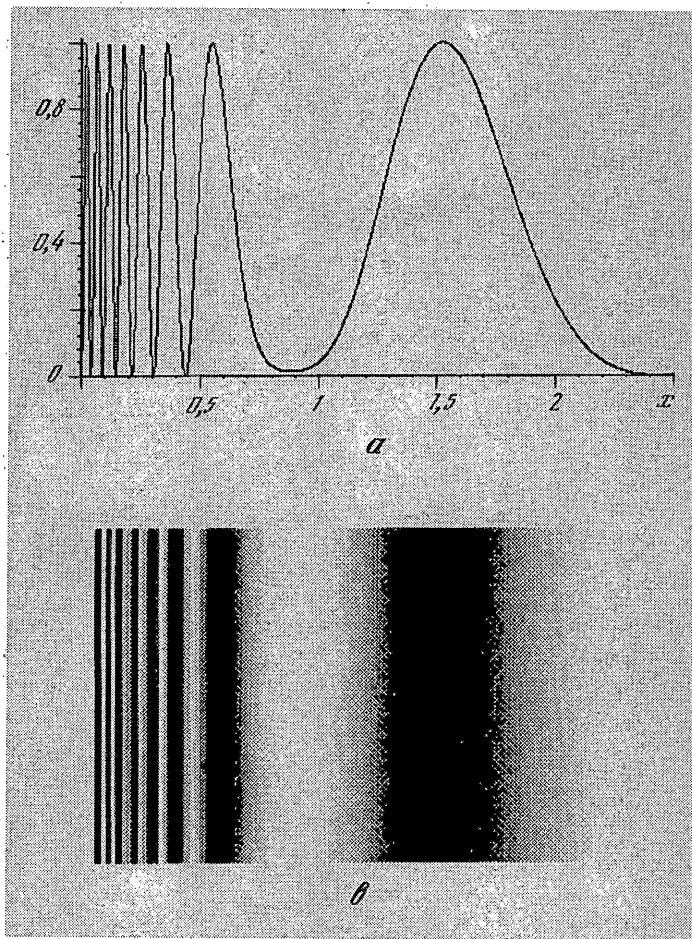
Если прошедший через лист свет пропустить через анализатор (например, призму Глана), ось которого составляет угол $\pi/2$ с направлением поляризации света на входе, то интенсивность света I на выходе из анализатора, отнесенная к интенсивности I_0 на входе, определится по формуле

$$I/I_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos \delta) \quad (3.4)$$

Следовательно, просвечивая лист монохроматическим светом в направлениях, нормальных к его поверхности, при скрещенных поляризаторе и анализаторе, оси ко-



Фиг. 1



Фиг. 2

торых составляют углы $\pm\pi/2$ с краем листа, получим картину, на которой, при достаточно высоком уровне закалки, будут наблюдаться темные полосы, соответствующие выполнению условия

$$1 - \cos \delta = 0 \quad (3.5)$$

На фиг. 2, *a, b* показаны распределение интенсивности света и картина полос (в негативном изображении), рассчитанные для случая (3.3) по формуле (3.4) при $\delta_0 = 50$.

4. Обратная задача. Разность фаз, приобретенную поляризованным светом при прохождении через лист, можно измерить в некотором непрерывном или дискретном множестве точек $x \in d \subset (0, \infty)$, используя известные методы, например метод Сенармона [1]. Поскольку при измерениях неизбежны погрешности, то производя несколько раз измерения разности фаз δ в зависимости от удаления x от края листа, получим, вообще говоря, несовпадающие функции $\delta_{(i)}(x), x \in d_{(i)} \subset (0, \infty)$, $i = 1, \dots, N_\delta$, которые можно рассматривать как выборочные функции некоторого одномерного случайного процесса $R(x), x \in (0, \infty)$, соответствующего выбранному методу измерений. Понятно, что увеличение N_δ не приносит качественно новой информации о поле напряжений, а позволяет лишь повысить точность измерений за счет уменьшения случайной погрешности.

Таким образом, используя поляризационно-оптический метод измерений можно установить одну или несколько функций вида

$$\delta = \delta_{(i)}(x), \quad x \in d_{(i)} \subset (0, \infty) \quad (i=1, \dots, N_\delta) \quad (4.1)$$

С другой стороны теория интегральной фотоупругости устанавливает связь между δ и распределением напряжений вдоль линии распространения света в виде функционала (3.1).

Исходя из этого сформулируем обратную задачу определения остаточных напряжений в теле так: найти поле напряжений $\sigma_{ij}(x, y)$, для которого параметр δ , рассчитанный по формуле (3.1), согласуется с результатами измерений, представленными в виде функций (4.1).

Задача в такой формулировке является некорректно поставленной: компоненты σ_{ij} искомого тензора напряжений являются детерминированными функциями координат x и y , следовательно, полю $\sigma_{ij}(x, y)$ соотношением (3.1) ставится в соответствие единственная функция $\delta(x)$, а согласовывать ее надо со всеми N_δ функциями $\delta_{(i)}(x)$. С другой стороны, все $\delta_{(i)}(x)$ являются реализациями одного и того же одномерного случайного процесса $R(x)$, следовательно, по известным N_δ реализациям одномерной случайной функции $R(x)$, $x \in (0, \infty) \subset R^1$ необходимо восстановить четыре функции, определенные в R^2 , а именно $\sigma_{xx}(x, y)$, $\sigma_{yy}(x, y)$, $\sigma_{xy}(x, y)$ и $\sigma_{zz}(x, y)$.

Для регуляризации обратной задачи будем рассматривать ее совместно с моделью закалочных напряжений, сформулированной в пп. 1, 2. В рамках этой модели класс функций S_σ , среди которых разыскивается решение обратной задачи, сужается, поскольку все искомые компоненты напряжений $\sigma_{ij}(x, y) \in S_\sigma$ определяются через одну функцию $\sigma(y)$, заданную на отрезке $[-1, 1] \subset R^1$. Кроме того, учитывая стохастическую природу исходных данных, естественно потребовать, чтобы найденное решение согласовывалось с исходными данными (4.1) в смысле наименьших квадратов. Благодаря этому в решении обратной задачи будут учтены все имеющиеся результаты измерений поля напряжений.

При таких условиях становится возможным сформулировать корректную постановку задачи восстановления напряженного состояния полуполосы, нагруженной по торцу самоуравновешенными силами, по заданным тангенциальной составляющей вектора внешней нагрузки и результатам измерения разности фаз поляризованного света путем сведения ее к отысканию минимума квадратичного функционала

$$F = \int_{-1}^1 \left(\left. \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right|_{x=0} \right)^2 dy + \frac{1}{N_\delta} \sum_{i=1}^{N_\delta} \int_{d_{(i)}} \left(\int_{-1}^1 \delta_0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dy - \delta_{(i)}(x) \right)^2 dx \quad (4.2)$$

Здесь, как и прежде, W – затухающее на бесконечности общее решение бигармонического уравнения (2.10), удовлетворяющее на лучах $\{0 \leq x, y = \pm 1\}$ условиям: $W = 0, \partial W / \partial y = 0$. Функция W , как известно [6], может быть представлена в виде

$$W = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp(-\bar{\gamma}_k x) \bar{F}_k(y) \right) \quad (4.3)$$

В формуле (4.3) C_k – неопределенные комплексные константы; $F_k(y)$ – заданные на отрезке $y \in [-1, 1]$ функции, различные для симметричной и антисимметричной, относительно y , составляющих вектора внешней нагрузки:

$$F_k = \begin{cases} \alpha_k \cos(\gamma_k y) + \gamma_k y \sin(\gamma_k y), & \alpha_k = -\gamma_k \operatorname{tg} \gamma_k \quad (\text{симметрия}) \\ \alpha_k \sin(\gamma_k y) + \gamma_k y \cos(\gamma_k y), & \alpha_k = -\gamma_k \operatorname{ctg} \gamma_k \quad (\text{антисимметрия}) \end{cases} \quad (4.4)$$

где γ_k – комплексные корни уравнений

$$\begin{aligned} \sin(2\gamma_k) + 2\gamma_k &= 0 \quad (\text{симметрия}) \\ \sin(2\gamma_k) - 2\gamma_k &= 0 \quad (\text{антисимметрия}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Задача отыскания минимума функционала (4.2) для функции W вида (4.2) сводится к решению системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{mk}^{11} A_k + \sum_{k=1}^{\infty} M_{mk}^{12} B_k = K_m^1 \quad (4.6)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{mk}^{21} A_k + \sum_{k=1}^{\infty} M_{mk}^{22} B_k = K_m^2$$

$$M_{mk}^{ij} = \int_{-1}^1 \tau_m^i \tau_k^j dy + \frac{1}{N_\delta} \sum_{n=1}^{N_\delta} \int_{d_{(n)}} \Delta_m^i \tau_k^j dx, \quad K_m^j = \frac{1}{N_\delta} \sum_{n=1}^{N_\delta} \int_{d_{(n)}} \delta_{(n)} \Delta_m^j dx \quad (4.7)$$

$$\tau_k^1 = \operatorname{Re} \tau_k, \quad \tau_k^2 = \operatorname{Im} \tau_k, \quad \Delta_k^1 = \operatorname{Re} \Delta_k, \quad \Delta_k^2 = \operatorname{Im} \tau_k \quad (4.8)$$

$$\tau_k = \begin{cases} \gamma_k^2 ((1 - \kappa_k) \sin(\gamma_k y) + \gamma_k y \cos(\gamma_k y)) & (\text{симметрия}) \\ \gamma_k^2 ((1 + \kappa_k) \cos(\gamma_k y) - \gamma_k y \sin(\gamma_k y)) & (\text{антисимметрия}) \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\Delta_k = \delta_0 \gamma_k^2 \exp(-\gamma_k x) \int_{-1}^1 F_k dy$$

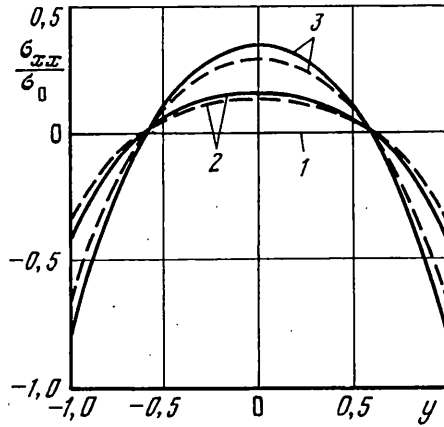
Таким образом, решив систему линейных уравнений (4.6), можем определить по (4.3) функцию напряжений W плоской задачи, и, следовательно, установить напряженное состояние полуполосы, соответствующее однородной задаче (2.7), (2.9). В частности, можем найти нормальную компоненту напряжений σ_{xx} на торце $\partial^2 W / \partial y^2|_{x=0}$, которая, согласно (2.12), определяет функцию $\sigma(y)$. Таким образом, имеем

$$\sigma(y) = -\operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_k \bar{\sigma}_k \right) \quad (4.10)$$

$$\sigma_k = \begin{cases} \gamma_k^2 ((2 - \kappa_k) \cos(\gamma_k y) - \gamma_k y \sin(\gamma_k y)) & (\text{симметрия}) \\ -\gamma_k^2 ((2 + \kappa_k) \sin(\gamma_k y) - \gamma_k y \cos(\gamma_k y)) & (\text{антисимметрия}) \end{cases}$$

При известных $W(x, y)$ и $\sigma(y)$ по формулам (2.11) можно рассчитать распределение закалочных напряжений в листе, справедливое для всех точек, в которых с достаточной точностью реализуются уравнения (2.3) плоской задачи, то есть – практически во всем объеме, за исключением небольших областей в окрестностях угловых точек, линейные размеры которых соизмеримы с толщиной $2h$. Полученный тензор напряжений удовлетворяет условия (1.1) ненагруженности поверхности листа и согласуется в смысле наименьших квадратов с результатами измерений, представленными в виде функций (4.1). Следовательно, найденное таким образом поле напряжений представляет собой решение сформулированной задачи.

На фиг. 3 показано распределение компоненты σ_{xx} тензора напряжений по толщине листа при различных удалениях от края (прямая $1 - x = 0$; кривые $2 - x = 0,5$; кривые $3 - x = 1$). При решении задачи в качестве входной информации использовалась функция $\delta(x)$, рассчитанная путем решения прямой задачи при заданной функции $\sigma(y)$ вида (3.3) (сплошные линии) и $\sigma(y) = -\sigma_0 (3/4 y^4 - 1/4)$ (штриховые линии). Точность решения обратной задачи, вычисленная по значению функционала (4.2) составила при этом $8,9 \cdot 10^{-2}$.



Фиг. 3

Необходимо подчеркнуть, что при использовании реальных результатов поляризационно-оптических измерений будут возникать дополнительные погрешности, обусловленные случайными и систематическими погрешностями измерения поляризационно-оптических параметров. Для оценки влияния случайных погрешностей на точность определения уровня закалки предположим, что ошибки измерений разности фаз δ распределены по нормальному закону. Это означает [7], что для каждого фиксированного x измеренное значение разности фаз $\delta_{(\eta)} = \delta_{(\eta)}(x)$ непрерывно распределено в интервале $\delta_{(\eta)} \in (-\infty, \infty)$ с плотностью вероятности

$$f(\delta_{(\eta)}, x) = \frac{1}{D\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\delta_{(\eta)} - \delta(x))^2}{D^2}\right) \quad (4.11)$$

Здесь D – дисперсия, определяющая среднеквадратическую погрешность измерения, $\delta(x)$ – математическое ожидание случайной величины $\delta_{(\eta)}$ в точке x , в качестве которого при статистическом моделировании будем принимать разность фаз $\delta(x)$, вычисленную по формуле (3.2) исходя из решения прямой задачи при заданной функции закалки $\sigma(y)$.

Используя (4.11), при заданных $\delta(x)$ и $Df(\delta_{(\eta)}, x)$ можно вычислить любое количество реализаций этой случайной функции $\delta_{(\eta)}, x$. Для этого необходимо [8] в каждой точке x решить относительно $\delta_{(\eta)}$ уравнение

$$\int_{-\infty}^{\delta_{(\eta)}} f(\zeta, x) d\zeta = \eta \quad (4.12)$$

где η – реализация непрерывной случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$.

На фиг. 1 показано несколько реализаций функции $\delta_{(\eta)}(x)$ при различных $D = 0,02; 0,06; 0,1$.

Решив для произвольного η систему уравнений (4.6), в которой

$$K_m^j = \int_{d_{(\eta)}} \tilde{\delta}_{(\eta)}^j \Delta_m^j dx \quad (4.13)$$

найдем коэффициенты $C_k^{(\eta)}$, по которым вычислим компоненты напряжений $W_{(\eta)}$, функцию закалки $\sigma_{(\eta)}(y) = -\partial^2 W_{(\eta)} / \partial y^2 \Big|_{x=0}$ и компоненты напряжений $\sigma_{ij}^{(\eta)}$. Таким образом, будет установлено решение обратной задачи, соответствующее реализации

$\delta_{\langle\eta\rangle}(x)$. Разности $\tilde{\sigma}_{\langle\eta\rangle}(y) = \sigma_{\langle\eta\rangle}(y) - \sigma(y)$, $\tilde{\sigma}_{ij}^{\langle\eta\rangle} = \sigma_{ij}^{\langle\eta\rangle} - \sigma_{ij}$ определяют погрешность восстановления напряженного состояния, обусловленную случайными погрешностями измерения $\tilde{\delta}_{\langle\eta\rangle}(x) \equiv \delta_{\langle\eta\rangle}(x) - \delta(x)$.

Вычисляя статические средние и дисперсии случайных функций $\tilde{\sigma}_{ij}^{\langle\eta\rangle}(x, y)$, $\tilde{\sigma}_{\langle\eta\rangle}(y)$ с плотностью вероятности (4.11), можно установить взаимосвязь между погрешностью измерения разности фаз $\delta(x)$ и точностью восстановления напряженного состояния в полуполосе. Результаты соответствующих численных экспериментов показаны ниже

	$D = 0$	$D = 0,01$	$D = 0,02$	$D = 0,05$	$D = 0,08$	$D = 0,10$
$\bar{\varepsilon}_{\delta}$	0	0,007	0,025	0,041	0,064	0,081
$\bar{\varepsilon}_{\delta}^{\text{inv}}$	$1,12 \cdot 10^{-4}$	0,001	0,040	0,009	0,007	0,013
$\bar{\varepsilon}_{\sigma}$	$8,91 \cdot 10^{-3}$	0,013	0,045	0,065	0,081	0,112
ε_1	$1,46 \cdot 10^{-2}$	0,029	0,060	0,073	0,109	0,207

Здесь $\bar{\varepsilon}_{\delta}$ – дисперсия случайной функции $\delta_{\langle\eta\rangle}(x)$, усредненная по интервалу измерения $d_{\langle\eta\rangle} = [0, 2]$; $\bar{\varepsilon}_{\delta}^{\text{inv}}$ – усредненная по интервалу $d_{\langle\eta\rangle}$ дисперсия случайной функции $\delta_{\langle\eta\rangle}^{\text{inv}}(x)$, вычисленной исходя из решения обратной задачи по формуле (3.2) при $W = W_{\langle\eta\rangle}$; $\bar{\varepsilon}_{\sigma}$ – усредненная по толщине среднеквадратическая погрешность восстановления напряженного состояния, определенная как $\langle(\sigma_{xy}^{\langle\eta\rangle}|_{x=0})^2 + (\sigma_{xy}^{\langle\eta\rangle}|_{x=0})^2\rangle$, $\langle \dots \rangle$ – оператор усреднения с плотностью вероятности (4.11), $\varepsilon_1 = \langle(\sigma_{\langle\eta\rangle}(1) - \sigma_0)^2\rangle$ – дисперсия поверхностных напряжений.

При проведении численных экспериментов статическое усреднение заменялось усреднением по выборке. Объем выборки N_{δ} во всех случаях принимался равным 10. Выборочные функции $\sigma_{ij}^{(l)}(x, y)$, $l \in [1, \dots, N_{\delta}]$, находились путем решения редуцированной системы (4.6), правая часть которой вычислялась согласно (4.13). Выборки функций $\delta_{(l)}(x)$ создавались путем розыгрыша в каждой точке $x \in d_{(l)} = [0, 2]$ нормально распределенной случайной величины в соответствии с формулой [8]:

$$\delta_{(l)}(x) = \delta(x) + D\sqrt{-\ln(\eta_1)} \cos(2\pi\eta_2)$$

где η_1, η_2 – независимые реализации равномерно распределенной в интервале $[0, 1]$ непрерывной случайной величины.

Значения при $D = 0$ определяют погрешность решения обратной задачи в условиях, когда заданы точные значения разности фаз $\delta(x)$. Параметр $\bar{\varepsilon}_{\delta}$ оказался заниженным по сравнению с дисперсией D . Это объясняется тем, что выборочные функции $\delta_{(l)}(x)$ генерировались на дискретном множестве точек (использовали 100 регулярно распределенных в интервале $[0, 2]$ точек), а в промежутках между этими точками при вычислении интегралов в (4.13) использовалась линейная интерполяция. Погрешность восстановления закалочных напряжений в листе увеличивается с ростом погрешности измерений, причем в интервале изменения дисперсии D от 0 до 0,08 зависимость ε_1 до D практически линейна.

5. Заключение. Предложенный метод определения уровня закалки листа, исходя из результатов его сквозного просвечивания поляризованным светом базируется, на том, что у края листа напряженное состояние становится анизотропным, вследствие чего при нормальном просвечивании краевых участков свет приобретает дополнительную разность фаз. Использование математической модели, согласно которой источником

остаточных напряжений в листе является искривление пространства отсчетной конфигурации, вместе с предположением о зависимости тензора кривизны лишь от толщинной координаты, позволяет восстановить двумерное напряженное состояние листа, исходя из ограниченных по объему данных измерения, представленных в виде функции одной переменной.

Проведенный количественный анализ точности, которая может быть достигнута при использовании данного метода, дает основания полагать, что он может быть реализован на практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Я., Ахметзянов М.Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. М.: Наука, 1973. 576 с.
2. Абен Х.К. Интегральная фотоупругость. Таллин: Валгус, 1975. 218 с.
3. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1976. 296 с.
4. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
5. Чекурин В.Ф., Шпакович Р.С. К исследованию концентрации напряжений и краевого эффекта в пластинах // Изв. АН СССР. МТТ. 1997. № 4. С. 159–166.
6. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.
7. Худсон Д. Статистика для физиков. М.: Мир, 1970. 296 с.
8. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. М.: Наука, 1976. 320 с.

Львов

Поступила в редакцию
2.XII.1996