

© 1998 г. А.В. ЕРМОЛЕНКО, Е.И. МИХАЙЛОВСКИЙ

**ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПОДКРЕПЛЕННОГО КРАЯ  
В ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛОСКИХ ПЛАСТИН КÁРМАНА**

При использовании традиционного варианта граничных величин уравнения Кáрмана [1] не образуют замкнутую систему, так как при формулировке граничных условий в терминах тангенциальных смещений названных уравнений недостаточно. В работе выводится так называемый полудеформационный вариант граничных величин, в котором тангенциальные смещения заменены тангенциальными деформациями. Показано, что последние выражаются через искомые функции уравнений Кáрмана  $w$  (нормальное перемещение) и  $\Phi$  (функция напряжений). Таким образом, при использовании полудеформационного варианта граничных величин система уравнений Кáрмана становится замкнутой. Этот вариант граничных величин позволяет сформулировать граничные условия тангенциально подкрепленного края. Вторая половина деформационных величин, характеризующих изгибную деформацию, получается независимо от выведенных уже тангенциальных величин. Полный набор деформационных величин использован ниже для формулировки граничных условий подкрепленного края. Подтверждается ранее высказанное предположение второго автора о том, что вывод деформационных величин без увязки с соответствующими обобщенными силами приводит, вообще говоря, к нарушению вариационных принципов теории упругости.

1. Напомним, что квадратичная теория Кáрмана изгиба плоских пластин уточняет линейную теорию Кирхгофа путем учета влияния нормальных перемещений пластины на тангенциальную деформацию ее срединной плоскости. Названное уточнение выражается в том, что вместо компонент тензора Коши  $e_{ij}$  для описания деформации срединной плоскости используются частично линеаризованные компоненты тензора Грина – Лагранжа

$$\gamma_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{2} w_{,i} w_{,j} + \underline{\frac{1}{2} u_{\alpha,i} u_{\alpha,j}} \quad (1.1)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) \equiv \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i, j = 1, 2)$$

где по греческим индексам  $\alpha, \beta$  здесь и ниже следует суммировать от 1-го до 2-х.

Отбрасывая подчеркнутые в (1.1) слагаемые и принимая, что точки в параллельных срединной плоскости слоях ( $\xi = \text{const}$ ) получают дополнительные перемещения ( $\vartheta_i$  – угол поворота нормали в направлении оси  $x_i$ ):

$$u_i^\xi - u_i = \xi \vartheta_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.2)$$

придем к следующим формулам для параметров тангенциальной деформации:

$$\gamma_{ij}^\xi = e_{ij} + \frac{1}{2} w_{,i} w_{,j} + \frac{1}{2} \xi (\vartheta_{i,j} + \vartheta_{j,i}) \quad (1.3)$$

Относительно трансверсальных деформаций в теории Кáрмана делается допущение, что они описываются компонентами тензора Коши, т.е.

$$\gamma_{33}^{\xi} \approx e_{33}^{\xi} = w_{,3}, \quad \gamma_{i3}^{\xi} \approx e_{i3}^{\xi} = \frac{1}{2}(\vartheta_i + w_{,i}) \quad (i=1,2) \quad (1.4)$$

При этом используется геометрическая гипотеза Кирхгофа

$$e_{j3}^{\xi} = 0 \quad (j=1,2,3)$$

или

$$w = w(x_1, x_2), \quad \vartheta_i = -w_{,i} \quad (i=1,2) \quad (1.5)$$

С учетом сделанных допущений из вариационного принципа Лагранжа получаем (предполагаем, что боковая поверхность пластины свободна от нагрузки, объемные и тангенциальные поверхностные силы пренебрежимо малы):

$$T_{i\alpha,\alpha} = 0, \quad T_{i3} = M_{i\alpha,\alpha}, \quad T_{\alpha 3,\alpha} + T_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} + q_n = 0 \quad (1.6)$$

$$\oint_{\partial\Omega} (T_{vv}\delta u_v + T_{vt}\delta u_t + Q_{vn}\delta w + M_{vv}\delta \vartheta_v) ds_t = 0 \quad (1.7)$$

$$T_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^{\xi} d\xi, \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^{\xi} \xi d\xi, \quad T_{i3} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{i3}^{\xi} d\xi$$

$$T_{vv} = T_{\alpha\beta} v_{\alpha} v_{\beta}, \quad T_{vt} = T_{\alpha\beta} v_{\alpha} t_{\beta}, \quad T_{vn} = T_{\alpha 3} v_{\alpha}, \quad M_{vv} = M_{\alpha\beta} v_{\alpha} v_{\beta}$$

$$M_{vt} = M_{\alpha\beta} v_{\alpha} t_{\beta}, \quad \tilde{T}_{vn} = T_{vn} + T_{vv} \frac{\partial w}{\partial s_v} + T_{vt} \frac{\partial w}{\partial s_t}$$

$$u_v = u_{\alpha} v_{\alpha}, \quad u_t = u_{\alpha} t_{\alpha}, \quad \vartheta_v = \vartheta_{\alpha} v_{\alpha}, \quad \vartheta_t = \vartheta_{\alpha} t_{\alpha} \quad (1.8)$$

$$v_1 = t_2 = \cos \gamma, \quad v_2 = -t_1 = \sin \gamma$$

$$\nu = e_1 \cos \gamma + e_2 \sin \gamma, \quad t = -e_1 \sin \gamma + e_2 \cos \gamma$$

$$\frac{\partial}{\partial s_v} = \cos \gamma \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin \gamma \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial s_t} = -\sin \gamma \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial x_2}$$

Первые уравнения в (1.6) будут выполнены, если функцию напряжения ввести так:

$$T_{11} = \Phi_{,22}, \quad T_{22} = \Phi_{,11}, \quad T_{12} = -\Phi_{,12} \quad (1.9)$$

При этом функция  $\Phi$  должна удовлетворять следующему уравнению совместности деформаций:

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 \Phi = w_{,12}^2 - w_{,11} w_{,22} \quad (1.10)$$

Используя соотношения упругости для стандартного материала 2-го порядка [2], преобразованные с помощью статической гипотезы Кирхгофа, уравнения Кáрмана можно представить в следующем (общепринятом) виде:

$$\Delta^2 w = \frac{1}{D} (q_n + L(\Phi, w)), \quad \Delta^2 \Phi = -\frac{1}{2} Eh L(w, w) \quad (1.11)$$

$$L(\Phi, w) = \Phi_{,11} w_{,22} - 2\Phi_{,12} w_{,12} + \Phi_{,22} w_{,11}$$

$$D = \frac{1}{2} Eh^3 / (1 - \nu^2)$$

где  $E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины,  $h$  – толщина пластины.

Границные величины на основании вариационного уравнения (1.7) (записанного с использованием традиционного приема замены скручивающего момента парой перерезывающих сил) можно представить в виде:

$$\begin{array}{llll} T_{vv} & T_{vt} & Q_{vn} & M_{vv} \\ u_v & u_t & w & \Theta_v \end{array} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} T_{vv} &= \Delta_{tt}\Phi, & T_{vt} &= -\Delta_{vt}\Phi \\ M_{vv} &= -D(\Delta_{vv}w - \nu\Delta_{tt}w), & M_{vt} &= -(1-\nu)D\Delta_{vt}w \\ Q_{vn} &= -D \frac{\partial \Delta w}{\partial s_v} + \frac{\partial M_{vt}}{\partial s_t} + T_{vv} \frac{\partial w}{\partial s_v} + T_{vt} \frac{\partial w}{\partial s_t} \end{aligned}$$

Здесь и ниже принятые следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta_{vv} &= \frac{\partial^2}{\partial s_v^2} + \rho_v \frac{\partial}{\partial s_t}, & \Delta_{tt} &= \frac{\partial^2}{\partial s_t^2} + \rho_t \frac{\partial}{\partial s_v} \\ \Delta_{vt} &= \frac{\partial^2}{\partial s_v \partial s_t} - \rho_t \frac{\partial}{\partial s_t}, & \Delta_{tv} &= \frac{\partial^2}{\partial s_t \partial s_v} - \rho_v \frac{\partial}{\partial s_v} \\ \Delta &= \Delta_{vv} + \Delta_{tt}, & \Delta_{vt} &= \Delta_{tv}, & \rho_t &= \frac{\partial \gamma}{\partial s_t}, & \rho_v &= -\frac{\partial \gamma}{\partial s_v} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Для удовлетворения граничным условиям в терминах величин  $u_v$  и  $u_t$  (если таковые условия имеются) приходится после нахождения  $w$  и  $\Phi$  интегрировать систему уравнений

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= \frac{1}{Eh}(\Phi_{,22} + \nu\Phi_{,11}) - \frac{1}{2}w_{,1}^2, & u_{2,2} &= (1 \rightarrow 2)u_{1,1} \\ u_{1,2} + u_{2,1} &= -\frac{2(1+\nu)}{Eh}\Phi_{,12} - w_{,1}w_{,2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Сказанное означает, что при использовании граничных величин (1.12) система (1.11) не является замкнутой.

2. Выведем полуформационный вариант граничных величин и покажем, что при его использовании уравнения Кáрмана (1.11) образуют замкнутую систему.

На основании формул (1.12), (1.13) и (1.8) вектор тангенциальных усилий можно представить формулой

$$T_v = \frac{\partial}{\partial s_t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial s_t} \mathbf{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial s_v} \mathbf{t} \right) \quad (2.1)$$

Вычислим главный вектор и главный момент относительно текущей точки  $s_t$  вектора тангенциальных усилий. Имеем (фиг. 1):

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_0 + \int_{s_0}^{s_t} \mathbf{T}'_v ds'_t = \mathbf{C}_1(s_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial s_t} \mathbf{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial s_v} \mathbf{t} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \int_{s_0}^{s_t} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times \mathbf{T}'_v ds'_t = \mathbf{C}_2(s_t) + \Phi(s_t) \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{C}_1(s_0) = \mathbf{F}_0 - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial s_t} \mathbf{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial s_v} \mathbf{t} \right) (s_0)$$

$$\mathbf{C}_2(s_t) = \mathbf{B}_0 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \left( \frac{\partial \Phi}{\partial s_t} \mathbf{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial s_v} \mathbf{t} \right) (s_0) - \Phi(s_0) \mathbf{n}$$

Используя вытекающие непосредственно из (1.8) правила дифференцирования ортов

$$d\mathbf{v} / ds_t = \rho_t \mathbf{t}, \quad d\mathbf{t} / ds_t = -\rho_t \mathbf{v} \quad (2.3)$$

производную от вектора тангенциальных смещений можно записать в виде

$$d\mathbf{u} / ds_t = \boldsymbol{\epsilon}_{tt} \mathbf{t} - \boldsymbol{\omega}_{tt} \mathbf{v} \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{tt} = du_t / ds_t + \rho_t u_v, \quad \boldsymbol{\omega}_{tt} = -du_v / ds_t + \rho_t u_t$$

С учетом полученных соотношений формулу для работы тангенциальных сил на вариациях отвечающих им смещений можно преобразовать так (см. (1.7)):

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} (T_{vv} \delta u_v + T_{vt} \delta u_t) ds_t &= \oint_{\partial\Omega} \frac{d\mathbf{F}}{ds_t} \cdot \delta \mathbf{u} ds_t = \\ &= \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} \Big|_{s_0^+}^{s_0^-} - \oint_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial s_t} \mathbf{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial s_v} \mathbf{t} \right) \cdot \delta \left( \frac{d\mathbf{u}}{ds_t} \right) ds_t = \\ &= \Gamma \cdot \delta \mathbf{u}(s_0) + \beta_n \delta \boldsymbol{\omega}_{tt} - \oint_{\partial\Omega} (F_t \delta \boldsymbol{\epsilon}_{tt} - B_n \delta k_m) ds_t, \end{aligned} \quad (2.5)$$

Таким образом, получен следующий полудеформационный вариант граничных величин (см. (1.12)):

$$\begin{array}{cccc} F_t & B_n & Q_{vn} & M_{vv} \\ \boldsymbol{\epsilon}_{tt} & -k_m & w & \vartheta_v \\ F_t = -\frac{\partial \Phi}{\partial s_v}, & B_n = \Phi & & \end{array} \quad (2.6)$$

Покажем, что параметры  $\boldsymbol{\epsilon}_{tt}$ ,  $k_m$  выражаются через основные искомые функции  $w$  и  $\Phi$ . На основании соотношений (1.8) формулу для  $\boldsymbol{\epsilon}_{tt}$  можно привести к виду:

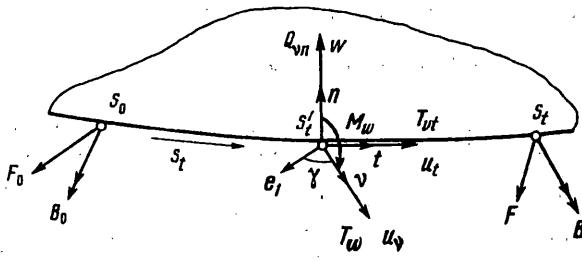
$$\boldsymbol{\epsilon}_{tt} = u_{1,1} \sin^2 \gamma - \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) \sin 2\gamma + u_{2,2} \cos^2 \gamma \quad (2.7)$$

Исключив отсюда производные  $u_{i,j}$  с помощью соотношения (1.14), после элементарных, но громоздких преобразований с учетом формул (1.8), (2.4), находим

$$\boldsymbol{\epsilon}_{tt} = \frac{1}{Eh} (\Delta_{vv} \Phi - v \Delta_{tt} \Phi) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial s_t} \right)^2 \quad (2.8)$$

Выполнив преобразования, аналогичные тем, что были сделаны при выводе формулы (2.7), получим

$$\begin{aligned} -k_m &= (2u_{2,21} - u_{1,11}) \cos \gamma \sin^2 \gamma - u_{2,11} \sin^3 \gamma + \\ &+ (2u_{1,12} - u_{2,22}) \sin \gamma \cos^2 \gamma - u_{1,22} \cos^3 \gamma + \\ &+ \rho_t [(u_{1,1} - u_{2,2}) \cos 2\gamma + (u_{1,2} + u_{2,1}) \sin 2\gamma] \end{aligned} \quad (2.9)$$



Фиг. 1

Используя соотношения (1.14) и производные от них, формулу (2.9) можно привести к виду

$$\begin{aligned}
 -k_m = & \frac{1}{Eh} \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial s_v} + \frac{1+v}{Eh} \left[ \frac{\partial \Delta_{tt} \Phi}{\partial s_v} + \right. \\
 & + p_t \left( \Delta_{tt} \Phi - \Delta_{vv} \Phi + p_v \frac{\partial \Phi}{\partial s_t} \right) + p_v \left( 2\Delta_{vv} \Phi + p_t \frac{\partial \Phi}{\partial s_t} \right) + \\
 & \left. + \frac{\partial w}{\partial s_v} \frac{\partial^2 w}{\partial s_t^2} + \frac{1}{2} p_t \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial s_v} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial s_t} \right)^2 \right] \right] \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

3. Получим теперь полный набор деформационных величин. Так как величины, соответствующие тангенциальной деформации, уже получены, рассмотрим лишь изгибную деформацию. Главный вектор перерезывающих сил на участке  $\widehat{s_0s_t}$  граничного контура определяется формулой (см. фиг. 1):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{n} \int_{s_0}^{s_t} Q'_{vn} ds'_t \quad (3.1)$$

Соответственно главный момент относительно текущей точки  $s_t$  перерезывающей силы и изгибающего момента можно представить так:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \int_{s_0}^{s_t} (M'_{vv} \mathbf{t}' + (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times Q'_{vn} \mathbf{n}) ds'_t = \\
 &= \mathbf{B}_0 + \int_{s_0}^{s_t} (M'_{vv} \mathbf{t}' - \mathbf{v}' \int_{s_0}^{s_t} Q''_{vn} ds''_t) ds'_t
 \end{aligned}$$

Далее, оставаясь в рамках изгибной деформации, имеем

$$\mathbf{u} = w \mathbf{n}, \quad d\mathbf{u} / ds_t = -\vartheta_t \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\omega}_t = -\vartheta_t \mathbf{v} + \vartheta_v \mathbf{t}$$

$$\mathbf{k}_t = d\boldsymbol{\omega}_t / ds_t = -k_{tt} \mathbf{v} + k_{tv} \mathbf{t} \quad (3.2)$$

$$k_{tt} = -\Delta_{tt} w, \quad k_{tv} = -\Delta_{tv} w$$

С учетом формул (3.1), (3.2) нетрудно убедиться в справедливости преобразований

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial\Omega} Q_{vn} \delta w ds_t &= \oint_{\partial\Omega} \frac{d\mathbf{F}}{ds_t} \cdot \delta \mathbf{u} ds_t = \Gamma_n \delta w(s_0) + \oint_{\partial\Omega} F_n \delta \vartheta_t ds_t, \\
 \oint_{\partial\Omega} \frac{d\mathbf{B}}{ds_t} \cdot \delta \boldsymbol{\omega}_t ds_t &= \oint_{\partial\Omega} (M_{vv} \delta \vartheta_v + F_n \delta \vartheta_t) ds_t = \mathbf{B} \cdot \delta \boldsymbol{\omega}_t - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{k}_t ds_t \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

$$\Gamma_n = \oint_{\partial\Omega} Q_{vn} ds_t, \quad \mathbf{B} = \oint_{\partial\Omega} (M_{vv} \mathbf{t} - F_n \mathbf{v}) ds_t$$

Складывая подчеркнутые в (3.3) слагаемые, будем иметь

$$\oint_{\partial\Omega} (M_{vv}\delta\vartheta_v + Q_{vn}\delta\psi)ds_t = \Gamma_n\delta\psi(s_0) + \mathbf{B} \cdot \delta\omega_t - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{k}_t ds_t, \quad (3.4)$$

Объединяя тангенциальные (2.5) и изгибные (3.4) деформационные величины получим следующий вариант граничных величин для пластины Кáрмана:

$$\begin{array}{cccc} F_t & B_n & B_v & B_t \\ \varepsilon_{tt} & -k_m & -k_{tt} & k_{tv} \end{array} \quad (3.5)$$

В случае пластины с многосвязной областью срединной поверхности при формулировке граничных условий в терминах деформационных граничных величин следует учитывать условия однозначности смещений на внутренних контурах  $\partial\Omega_i$  области  $\Omega$  [3]. Эти условия можно записать так

$$\oint_{\partial\Omega_i} (\varepsilon_{tt}\mathbf{t} + \mathbf{r} \times \mathbf{k}_t)ds_t = 0, \quad \oint_{\partial\Omega_i} \mathbf{k}_t ds_t = 0$$

или

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega_i} (\varepsilon_{tt} \sin \gamma + x_2 k_m) ds_t &= 0 \\ \oint_{\partial\Omega_i} (\varepsilon_{tt} \cos \gamma + x_1 k_m) ds_t &= 0, \quad \oint_{\partial\Omega_i} k_m ds_t = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega_i} (k_{tt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{t}) + k_{tv}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})) ds_t &= 0 \\ \oint_{\partial\Omega_i} (k_{tt} \cos \gamma + k_{tv} \sin \gamma) ds_t &= 0, \quad \oint_{\partial\Omega_i} (k_{tt} \sin \gamma - k_{tv} \cos \gamma) ds_t = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом, условия однозначности смещений (4.6) разбиваются на две группы равенств. Равенства (3.6) соответствуют тангенциальной деформации, где следует дополнительно задать величины

$$\Gamma_1 = \oint_{\partial\Omega_i} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial s_t} \cos \gamma + \frac{\partial\Phi}{\partial s_v} \sin \gamma \right) ds_t \quad (3.8)$$

$$\Gamma_2 = \oint_{\partial\Omega_i} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial s_t} \sin \gamma - \frac{\partial\Phi}{\partial s_v} \cos \gamma \right) ds_t, \quad B_n = \oint_{\partial\Omega_i} \Phi ds_t$$

Вторая группа условий однозначности соответствует изгибной деформации с дополнительными статическими величинами

$$B_1 = - \oint_{\partial\Omega_i} (M_{vv} \sin \gamma + F_n \cos \gamma) ds_t \quad (3.9)$$

$$B_2 = \oint_{\partial\Omega_i} (M_{vv} \cos \gamma + F_n \sin \gamma) ds_t, \quad \Gamma_n = \oint_{\partial\Omega_i} Q_{vn} ds_t$$

*Замечание.* Рассмотрим двойной тензор [2]:

$$\Omega_t = \nu^* \otimes \nu + \mathbf{t}^* \otimes \mathbf{t} + \mathbf{n}^* \otimes \mathbf{n} \quad (3.10)$$

связанный как с исходной ( $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ), так и с деформированной ( $\mathbf{v}^*$ ,  $\mathbf{t}^*$ ,  $\mathbf{n}^*$ ) конфигурациями элемента боковой поверхности оболочки (пластины). Используя формулы дифференцирования ортов

$$dt/ds_t = \sigma_t \mathbf{n} - \rho_t \mathbf{v}, \quad d\mathbf{n}/ds_t = \tau_t \mathbf{v} - \sigma_t \mathbf{t}, \quad d\mathbf{v}/ds_t = \rho_t \mathbf{t} - \tau_t \mathbf{n} \quad (3.11)$$

и аналогичные им для ортов ( $\mathbf{v}^*$ ,  $\mathbf{t}^*$ ,  $\mathbf{n}^*$ ), в результате дифференцирования тензора  $\Omega_t$ ,

приходим к следующему тензору:

$$\mathbf{K}_t \stackrel{\Delta}{=} \frac{d\Omega_t}{ds_t^*} = k_n^\vee(\mathbf{t} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{t}) - k_v^\vee(\mathbf{n} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{n}) + k_m^\vee(\mathbf{v} \otimes \mathbf{t} - \mathbf{t} \otimes \mathbf{v}) \quad (3.12)$$

$$-k_n^\vee = \sigma_t^* - \lambda_t^{-1} \sigma_t, \quad k_v^\vee = \tau_t^* - \lambda_t^{-1} \tau_t, \quad -k_m^\vee = \rho_t^* - \lambda_t^{-1} \rho_t$$

где  $\lambda_t = ds_t^*/ds_t$  – кратность изменения длины бокового элемента.

Деформационные граничные величины ( $\epsilon_n, -k_m, -k_n, k_v$ ) введены в общую нелинейную теорию оболочек К.Ф. Черныхом [2]. Соответствующие линейные величины для оболочек с односвязной областью срединной поверхности были предложены им же [4]. Для оболочек с многосвязными областями эти величины можно получить преобразованием выражения

$$\oint_{\partial\Omega} (\mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{u} + M_{vv} \vartheta_v) ds_t$$

с использованием интегрирования по частям к виду [3]:

$$\Gamma \cdot \mathbf{u}(s_0) + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}_t - \oint_{\partial\Omega} (F_t \epsilon_n + \mathbf{B} \cdot \mathbf{k}_t) ds_t \quad (3.13)$$

$$\Gamma = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{Q}_v ds_t, \quad \mathbf{B} = \oint_{\partial\Omega} (M_{vv} \mathbf{t} + \mathbf{F} \times \mathbf{t}) ds_t$$

Выражение (3.13) получено в предположении, что векторы  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\omega}_t$  являются однозначными функциями на внутреннем контуре  $\partial\Omega$ .

Таким образом, в линейную теорию оболочек деформационные величины введены в совокупности с отвечающими им обобщенными силами, что позволяет, в частности, контролировать выполнение теоремы единственности решения. Весьма простой способ вывода деформационных величин дифференцированием тензора  $\Omega_t$  не позволяет выписать соответствующие обобщенные силы. Полученные этим способом параметры действительно характеризуют деформацию бокового элемента и при линеаризации совпадают с вполне обоснованными деформационными граничными величинами линейной теории оболочек. Однако величины ( $\epsilon_n, -k_m, -k_n, k_v$ ), вообще говоря, не удовлетворяют вариационным принципам теории упругости. Кроме этого при их использовании выпадает из рассмотрения целый класс оболочек, имеющих многосвязную область срединной поверхности. Сказанное относится и к вариантам деформационных величин, предложенным в [5–8].

В подтверждение сделанных предположений выведем деформационные величины для теории Кáрмана с помощью формул (3.12). Используя уравнения срединной поверхности до и после деформации  $\mathbf{r} = x_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ ,  $\mathbf{r}^* = (x_\alpha + u_\alpha) \mathbf{e}_\alpha + w \mathbf{n}$  ( $x_1, x_2 \in \Omega$ , находим (в кáрмановском приближении):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^* &= \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial x_1} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial x_1} \right| = \left( 1 - \frac{1}{2} w_{,1}^2 \right) \mathbf{e}_1 + u_{2,1} \mathbf{e}_2 + w_{,1} \mathbf{n}, \\ \mathbf{e}_2^* &= (1 \leftrightarrow 2) \mathbf{e}_1^*, \\ \mathbf{n}^* &= \frac{\mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_2^*}{|\mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_2^*|} = \left( 1 - \frac{1}{2} \vartheta_v^2 - \frac{1}{2} \vartheta_t^2 \right) \mathbf{n} + \vartheta_v \mathbf{v} + \vartheta_t \mathbf{t} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Далее получаем

$$\mathbf{t}^* = \frac{d\mathbf{r}^*}{ds_t^*} = \lambda_t^{-1} \frac{d\mathbf{r}^*}{ds_t} = \lambda_t^{-1} [(1 + \epsilon_n) \mathbf{t} - \omega_n \mathbf{v} - \vartheta_t \mathbf{n}]$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_t = 1 + \varepsilon_{tt} + \frac{1}{2} \vartheta_t^2 \quad (3.15)$$

Поэтому

$$\mathbf{t}^* = (1 - \frac{1}{2} \vartheta_t^2) \mathbf{t} - \omega_{tt} \mathbf{v} - \vartheta_t \mathbf{n}$$

И, наконец, имеем

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{t}^* \times \mathbf{n}^* = (1 - \frac{1}{2} \vartheta_v^2) \mathbf{v} + (\omega_{tt} - \vartheta_v \vartheta_t) \mathbf{t} - \vartheta_v \mathbf{n}$$

Дифференцируя  $\mathbf{t}^*$  и  $\mathbf{n}^*$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}^*}{ds_t} &= \lambda_t^{-1} \frac{dt^*}{ds_t} = -\left( \vartheta_t \frac{d\vartheta_v}{ds_t} + \omega_{tt} \rho_t \right) \mathbf{t} - \frac{d\vartheta_t}{ds_t} \mathbf{n} - \left( 1 - \varepsilon_{tt} + \frac{1}{\rho_t} \frac{d\omega_{tt}}{ds_t} - \frac{1}{2} \vartheta_v^2 - \frac{1}{2} \vartheta_t^2 \right) \rho_t \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{n}^*}{ds_t} &= \lambda_t^{-1} \frac{dn^*}{ds_t} = -\left( \vartheta_v \frac{d\vartheta_v}{ds_t} + \vartheta_t \frac{d\vartheta_t}{ds_t} \right) \mathbf{n} - \Delta_{vt} \omega \mathbf{v} - \Delta_{tt} \omega \mathbf{t} \end{aligned} \quad (3.16)$$

На основании формул (3.12) и (3.14)–(3.16) находим

$$k_m^\vee = \frac{dt^*}{ds_t} \cdot \mathbf{v}^* - \lambda_t^{-1} \frac{dt}{ds_t} \cdot \mathbf{v} = k_m + \frac{\partial w}{ds_v} \frac{\partial^2 w}{ds_t^2} + \frac{1}{2} \rho_t \left[ \left( \frac{\partial w}{ds_v} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{ds_t} \right)^2 \right]$$

$$\varepsilon_{tt}^\vee = \lambda_t - 1 = \varepsilon_{tt} + \frac{1}{2} (\partial w / \partial s_t)^2 \quad (3.17)$$

$$k_{vv}^\vee = \frac{dn^*}{ds_t} \cdot \mathbf{v}^* - \lambda_t^{-1} \frac{dn}{ds_t} \cdot \mathbf{v} = -\Delta_{vt} w = k_{vv}$$

$$k_{tt}^\vee = \frac{dn^*}{ds_t} \cdot \mathbf{t}^* - \lambda_t^{-1} \frac{dn}{ds_t} \cdot \mathbf{t} = -\Delta_{tt} w = k_{tt}$$

Таким образом, при вычислении деформационных граничных величин, характеризующих тангенциальную деформацию края пластины, по формулам (3.12) нелинейные слагаемые исчезают. Это означает, что обобщенные смещения  $\varepsilon_{tt}^\vee$ ,  $k_m^\vee$ , вообще говоря, не удовлетворяют вариационному уравнению Лагранжа (1.7), которому отвечает система уравнений Кáрмана (1.11).

Главная особенность деформационных граничных величин линейной теории оболочек в том, что они без интегрирования выражаются через усилия и моменты. Это свойство сохраняют и соответствующие величины для "полной" нелинейной теории. Именно путем формулирования геометрических граничных условий в усилиях и моментах были впервые введены деформационные граничные величины в нелинейную теорию оболочек К.З. Галимовым [5]. Однако при частичном учете нелинейности, как это делается, например, в теории Кáрмана, названное выше важнейшее свойство деформационных величин может быть нарушено. Действительно, формулу (2.8) можно представить в виде

$$\varepsilon_{tt} = \frac{1}{Eh} (T_{tt} - v T_{vv}) - \frac{1}{2} \vartheta_t^2$$

откуда с учетом (1.12), (1.13) усматривается справедливость сделанного замечания.

4. Если выполнить преобразования, аналогичные проведенными в работе [8], при допущениях принимаемых в теории пластин Кáрмана, то можно убедиться, что граничные условия подкрепленного края формально сохраняют тот же вид как они

имеют в линейной теории [9]:

$$\begin{bmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & -I_{vn} & 0 \\ 0 & -I_{vn} & I_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{tt} \\ -k_{tn} \\ -k_{tt} \\ k_{tv} \end{bmatrix} = \frac{1}{E_b} \begin{bmatrix} F_t \\ B_n \\ B_v \\ B_t \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Здесь  $S$  – площадь поперечного сечения подкрепляющего край пластины стержня;  $I_v, I_n, I_{vn}$  – моменты инерции поперечного сечения стержня относительно центральных осей, связанных с направлениями  $v$  и  $n$ ;  $I_t = 2(1 + v_b)I_t^* = S^2/4\pi^2(I_v + I_n)$  – геометрическая жесткость стержня при сен-венановом кручении;  $E_b, v_b$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала стержня.

В отличие от [9], геометрические условия сопряжения пластины и стержня выполняются не по величинам (3.17), а по величинам таблицы (3.5). Таким образом, с учетом соотношений (2.2) и (3.1) граничные условия подкрепленного края (в предположении, что  $I_{vn} = 0$ ) можно записать в виде

$$E_b I_n k_{tn} = -\Phi, \quad E_b S \varepsilon_{tt} = -\Phi_{,v} \quad (4.2)$$

$$-E_b I_v k_{tn} v + E_b I_t^* k_{tv} t = B_0 + \int_{s_0}^{s_t} (M'_{vv} t' + (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times Q'_{vn} \mathbf{n}) ds'$$

Дифференцируя векторное уравнение (4.2) по дуге контура  $\partial\Omega$  в предположении, что жесткость подкрепляющего стержня является постоянной, придем к следующим двум скалярным граничным уравнениям:

$$E_b I_v \frac{dk_{tn}}{ds_t} + E_b I_t^* \rho_t k_{tv} = C_0 + \int_{s_0}^{s_t} Q'_{vn} ds' \quad (4.3)$$

$$E_b I_t^* \frac{dk_{tv}}{ds_t} - E_b I_v \rho_t k_{tn} = M_{vv}, \quad C_0 = E_b \left( I_v \frac{dk_{tn}}{ds_t} + I_t^* \rho_t k_{tv} \right) (s_0)$$

При использовании полудеформационного варианта граничных величин (2.6) можно сформулировать граничные условия тангенциально подкрепленного края

$$E_b I_n k_{tn} = -\Phi, \quad E_b S \varepsilon_{tt} = -\Phi_{,v}, \quad w = 0, \quad w_{,v} = 0 \quad (4.4)$$

которые, как и следовало ожидать, являются линейными. При этом в силу того, что тангенциальная жесткость пластины намного превышает соответствующую жесткость стержня, первое граничное условие из (4.4) приближенно можно заменить следующим:

$$\Phi(s_t) = 0 \quad (4.5)$$

**5.** В качестве примера рассмотрим задачу о контактном взаимодействии двух одинаковых осесимметрично деформируемых круглых пластин с тангенциально подкрепленными краями. Предположим, что зазор между пластинами  $d = \text{const}$  и нагрузка  $q_h$  на "верхнюю" пластину таковы, что в результате деформации у пластин образуется область контакта с заранее неизвестной (свободной) границей.

Если ввести безразмерную координату  $\rho = r/a$  (где  $r$  – расстояние от центра пластины,  $a$  – радиус пластины), граничные условия (4.4) для рассматриваемой осесимметричной деформации примут вид ( $\rho = 1$ ):

$$\underline{\Phi - \frac{I_n}{a^3 h} \left( \frac{d^3 \Phi}{d\rho^3} + \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{d\Phi}{d\rho} \right) \right)} = 0$$

$$\underline{\frac{d\Phi}{d\rho} + \frac{S}{ah} \left( \frac{d^2 \Phi}{d\rho^2} - \nu \frac{d\Phi}{d\rho} \right)} = 0$$

$$w = 0, dw/d\rho = 0 \quad (5.1)$$

Учитывая соотношения  $I_n \sim \eta^4$ ,  $S \sim \eta^2$ ,  $\eta/a \ll 1$ ,  $\eta/h \sim 1$  ( $\eta$  – характерный размер поперечного сечения кольца), подчеркнутыми в (5.1) слагаемыми, как правило, можно пренебречь. Окончательно граничные условия подкрепленного края (при  $\rho = 1$ ) будем принимать в виде

$$w = 0, \frac{dw}{d\rho} = 0, \Phi = 0, \frac{d\Phi}{d\rho} + \sigma \frac{d^2 \Phi}{d\rho^2} = 0 \quad (5.2)$$

$$\sigma = S/ah$$

Краевые задачи для верхней ( $i = 1$ ) и нижней ( $i = 2$ ) пластин в соответствии с (5.2) можно сформулировать так

$$\begin{aligned} \Delta^2 w_i &= \frac{1}{D} \left[ a^4 p_i + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{d\Phi_i}{d\rho} \frac{dw_i}{d\rho} \right) \right] \\ \Delta^2 \Phi_i &= -\frac{Eh}{\rho} \frac{dw_i}{d\rho} \frac{d^2 w_i}{d\rho^2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$w_i(1) = \left( \frac{dw_i}{d\rho} \right)(1) = 0, \Phi_i(1) = \left( \frac{d\Phi_i}{d\rho} + \sigma \frac{d^2 \Phi_i}{d\rho^2} \right)(1) = 0$$

$$\Delta^2 = \left( \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^2, p_1 = q_n - R, p_2 = R$$

где  $R(\rho)$  – реакция нижней пластины на давление со стороны верхней.

Кроме уравнений (5.3) функции  $w_i(\rho)$ ,  $R(\rho)$  очевидно должны удовлетворять следующим условиям:

$$R \geq 0, w_1 - w_2 - d \leq 0, r(w_1 - w_2 - d) = 0 \quad (5.4)$$

Эти условия можно записать в виде одного уравнения [10, 11]:

$$R = [R + \beta(w_1 - w_2 - d)]_+, \beta > 0 \quad (5.5)$$

где знаком (+) помечена положительная часть функции:  $f_+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$ .

Уравнение (5.5) замыкает систему (5.3). В отличие от геометрически нелинейных уравнений (5.3) конструктивно нелинейное уравнение (5.5) не допускает линеаризации, обладая нелинейностью как существенным свойством.

Изложим алгоритм решения контактной задачи {(5.3), (5.5)}. Функции Грина, соответствующие вспомогательным краевым задачам ( $\delta(\dots)$  – делта-функция Дирака):

$$\Delta^2 G_\phi = \delta(\rho - \xi)$$

$$G_\phi|_{\rho=1} = 0, \left( \frac{\partial G_\phi}{\partial \rho} + \sigma \frac{\partial^2 G_\phi}{\partial \rho^2} \right) \Big|_{\rho=1} = 0$$

$$\Delta^2 G_w = \delta(\rho - \xi), \quad G_w|_{\rho=1}, \quad \frac{\partial G_w}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = 0$$

определяются формулами ( $H(\dots)$  – функция Хевисайда):

$$\begin{aligned} G_\phi(\sigma, \rho, \xi) &= \frac{1}{4} \xi \left( \xi^2 - \rho^2 + (\xi^2 + \rho^2) \ln \frac{\rho}{\xi} \right) H(\rho - \xi) - \\ &- \frac{1}{4} \xi (\xi^2 - 1 - (\xi^2 + \rho^2) \ln \xi) - \frac{1}{8} \xi \frac{1-\sigma}{1+\sigma} (1-\xi^2)(1-\rho^2) \\ G_w(\rho, \xi) &= G_\phi(0; \rho, \xi) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Используя введенные функции Грина, краевые задачи (5.3) можно преобразовать к следующей системе нелинейных операторных уравнений второго рода:

$$\begin{aligned} u_i(\rho) &= \frac{1}{P} \int_0^1 p_i(\xi) G_w(\rho, \xi) d\xi - \\ &- k \int_0^1 \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{du_i}{d\xi} \left( \int_0^1 t \frac{d}{dt} \left( \frac{du_i}{dt} \right)^2 \frac{\partial G_\phi(\xi t)}{\partial \xi} dt \right) \right) G_w(\rho, \xi) d\xi \triangleq f_i(R, u_i) \\ \frac{1}{P} &= \frac{12(1-v^2)}{E} \left( \frac{a}{h} \right)^4, \quad u_i = \frac{w_i}{h} \end{aligned} \quad (5.7)$$

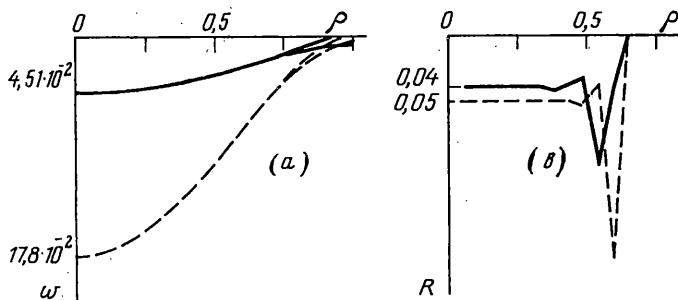
где  $h$  – толщина пластины;  $k = 0$  для теории Кирхгофа и  $k = 6(1-v^2)$  для теории Кáрмана.

Уравнения (5.7) можно решать итерационными методами в сочетании с конечно-разностной аппроксимацией при использовании простых итераций для уравнения (5.5). В [11] было показано, что хотя итерационная схема для уравнения (5.5), вообще говоря, расходится, соответствующие последовательности для смещений сходятся с некоторым числом первых производных. Однако сказанное относится к линейным краевым задачам с положительно определенными операторами. Простейшие предварительные вычисления показали, что в рассматриваемой задаче при прогибах порядка толщины пластины (т.е., когда следует использовать при нецилиндрическом изгибе теорию Кáрмана вместо теории Кирхгофа) метод простых итераций для уравнения (5.7) перестает сходиться. Поэтому в численном эксперименте на базе уравнений (5.5), (5.7) применялась (несколько более надежная) итерационная схема стационарного метода Ричардсона. В соответствии со сказанным использовалась следующая итерационная схема:

$$R^{(n)} = [R^{(n-1)} + \beta(u_1^{(n-1)} - u_2^{(n-1)} - \delta)]_+ \quad (5.8)$$

$$u_i^{(n)} = (1-\tau)u_i^{(n-1)} + \tau f_i(R^{(n)}, u_i^{(n-1)}) \quad (i=1,2; \quad \tau \in (0,1), \quad \delta = d/h)$$

Выпишем первые шаги итерационной схемы (5.8).



Фиг. 2

*Нулевое приближение:*

$$R^{(0)} = 0, \quad u_1^{(0)} = \frac{1}{P} \int_0^1 q_n(\xi) G_w(\rho, \xi) d\xi, \quad u_2^{(0)} = 0$$

*Первое приближение:*

$$R^{(1)} = \beta(u_1^{(0)} - \delta)_+, \quad u_1^{(1)} = (1 - \tau)u_1^{(0)} + \tau f_1(R^{(0)}, u_1^{(0)})$$

$$u_2^{(1)} = \frac{\tau}{P} \int_0^1 R^{(1)}(\xi) G_w(\rho, \xi) d\xi$$

Если  $u_1^{(0)} \leq \delta$ , то контактная задача не состоялась и процесс (5.8) на первом шаге прекращается.

На фиг. 2 показаны характерные графики прогибов и соответствующих им реакций как по линейной (пунктирная линия), так и по нелинейной (сплошная линия) теориям пластин. Этим графикам соответствуют следующие параметры упругой системы и нагрузки:  $a = 1$  м,  $h = d = 7 \cdot 10^{-3}$  м,  $q_n = 0,14$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $v = 0,3$  м/м,  $\sigma = 5$ .

Пики на графиках для контактных реакций, по-видимому, свидетельствуют о наличии сосредоточенных сил на границе области контакта [11].

Для сравнения приведем предельные значения максимальных прогибов пластин (5.9), вычисленные для тангенциально свободного края ( $\sigma = 0$ ) и абсолютно жесткого края ( $\sigma = \infty$ ):  $w_{\max}^{(0)} = 6,12 \cdot 10^{-2}$  м,  $w_{\max}^{(\infty)} = 4,36 \cdot 10^{-2}$  м.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Karman Th. Festigkeitsprobleme in Maschinenbau // Enzykl. der Math. Wissensch. 1910. Bd. 4. № 2. S. 311–385.
2. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
3. Михайловский Е.И., Черных К.Ф. О некоторых особенностях деформационного варианта граничных величин // Изв. АН СССР. МТГ. 1985. № 2. С. 155–162.
4. Черных К.Ф. О сопряженных задачах теории тонких оболочек // Докл. АН СССР. 1957. Т. 117. № 6. С. 949–951.
5. Галимов К.З. О формулировке геометрических граничных условий нелинейной теории оболочек в усилиях и моментах // Изв. Казан. филиала АН СССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1958. № 12. С. 17–27.
6. Шамина В.А. Определение вектора перемещения по компонентам деформации и деформационные граничные условия в теории оболочек Е. Рейсснера // Проблемы механики твердого деформированного тела. Л.: Судостроение, 1970. С. 487–492.

7. Петрашкевич В. Некоторые соотношения нелинейной теории оболочек Рейсснера // Вестн. ЛГУ. Сер. математика, механика, астрономия. 1979. № 1. С. 115–124.
8. Михайловский Е.И. Граничные условия подкрепленного края жесткогибкой оболочки в нелинейной теории типа Тимошенко – Рейсснера // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 2. С. 109–119.
9. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.
10. Михайловский Е.И., Тарасов В.Н. Контактные задачи для гибких элементов конструкций // Проблемы нелинейной теории упругости. Калинин: Изд-во Калинин. политехн. ин-та, 1989. С. 100–108.
11. Михайловский Е.И., Тарасов В.Н. О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 128–136.

Сыктывкар

Поступила в редакцию  
23.VI.1997