МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1998

УДК 539.3

© 1998 г. А.С. КОСМОДАМИАНСКИЙ, Н.М. НЕСКОРОДЕВ,
Р.Н. НЕСКОРОДЕВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ, ГРАНИЦА КОТОРОГО ИМЕЕТ НЕПРЕРЫВНУЮ КАСАТЕЛЬНУЮ

В [1] предложен способ аппроксимации границы области пластинки произвольного очертания с помощью криволинейных элементов. В качестве таких элементов взяты части эллиптических контуров. При этом, в точках стыковки эллиптических контуров не выполняется условие гладкости (нарушена непрерывность касательной) граничной линии, что не позволяет определять в этих точках компоненты напряженного состояния рассматриваемой пластинки.

В данной работе приводится методика аппроксимации выпуклой границы области с гладким стыкованием элементов. На базе этой аппроксимации исследуется напряженное состояние анизотропных пластинок с отверстиями, имеющими границу с непрерывной касательной.

1. Аппроксимация границы области. Рассмотрим часть границы, ограниченную двумя прямолинейными граничными элементами $t_r t_{r+1}$ и $t_{r+1}t_{r+2}$ с угловой точкой t_{r+1} (фиг. 1). Аппроксимируем эти элементы эллиптическими контурами L_r и L_{r+1} так, чтобы эти контуры пересекались в некоторой точке t_{0r} и имели в этой точке одну и ту же нормаль. В этом случае обеспечивается построение контура с непрерывной касательной в точке стыкования t_{0r}.

В [2] показано, что выбирая значение полуоси $b_r = \beta_r a_r$, можно аппроксимировать прямую $t_r t_{r+1}$ полуэллипсом L_r сколь угодно точно за счет выбора параметра β_r.

Считая параметр $\beta_r \neq 0$, но малым, проведем эллипс L_r через точки $\overset{*}{t}_r$ и $\overset{**}{t}_{r+1}$, координаты которых выражаются формулами

$$\overset{*}{t}_r = t_r + \frac{t_r - t_{r+1}}{|t_r - t_{r+1}|} c_r, \quad \overset{**}{t}_{t+1} = t_{r+1} - \frac{t_r - t_{r+1}}{|t_r - t_{r-1}|} d_r \tag{1.1}$$

где c_r и d_r – вещественные постоянные, значения которых будут определены ниже.

Уравнение контура L_r имеет вид [1] (θ_r – полярный угол):

$$t = z_r + R_r\sigma + m_r/\sigma \tag{1.2}$$

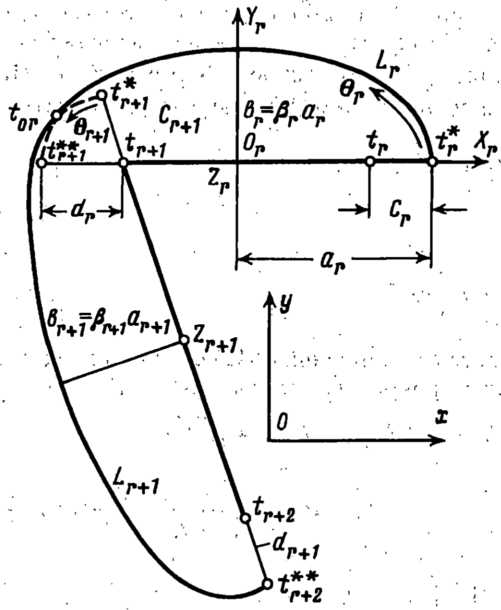
$$R_r = \frac{\overset{*}{t}_r - \overset{**}{t}_{r+1}}{4}(1+\beta_r), \quad m_r = \frac{\overset{*}{t}_r - \overset{**}{t}_{r+1}}{4}(1-\beta_r) \tag{1.3}$$

$$z_r = (\overset{*}{t}_r + \overset{**}{t}_{r+1})/2, \quad \sigma = e^{i\theta}$$

Аналогичные соотношения имеют место и для контура L_{r+1}.

Уравнение нормали к контуру L_r имеет вид

$$\mathbf{n}_r = \cos(x,\ n_r) + i\cos(y,\ n_r) = \frac{dy}{ds} - i\frac{dx}{ds} = -i\frac{dz}{ds} = \frac{R_r\sigma - m_r/\sigma}{|R_r\sigma - m_r/\sigma|} \tag{1.4}$$



Фиг. 1

Для контуров L_r и L_{r+1} в точке их стыковки t_{0r} имеем

$$\sigma_r = \cos(\pi-\theta_r) + i\sin(\pi-\theta_r) = -\cos\theta_r + i\sin\theta_r$$

$$\sigma_{r+1} = \cos(\theta_{r+1}) + i\sin(\theta_{r+1}) \tag{1.5}$$

Считаем, что углы θ_r и θ_{r+1} в окрестности точки t_{0r} связаны с параметрами β_r и β_{r+1} соотношениями

$$\theta_r = \beta_r p_r, \quad \theta_{r+1} = \beta_{r+1} p_r \tag{1.6}$$

где p_r – постоянная, подлежащая определению.

Разложим соотношения (1.5) в ряды и ограничиваясь величинами β_r и β_{r+1} в степени не выше второй, получим

$$\sigma_r = -1 + \beta_r^2 p_r^2/2 + i\beta_r p_r, \quad \sigma_{r+1} = 1 - \beta_{r+1}^2 p_r^2/2 + i\beta_{r+1} p_r \tag{1.7}$$

Подставляя разложения (1.7) и представления (1.3) в уравнения (1.4) и учитывая (1.1), найдем

$$n_r = \frac{t_r - t_{r+1}}{|t_r - t_{r+1}|}\frac{-1+ip_r}{\sqrt{1+p_r^2}}, \quad n_{r+1} = \frac{t_{r+1} - t_{r+2}}{|t_{r+1} - t_{r+2}|}\frac{1+ip_r}{\sqrt{1+p_r^2}} \tag{1.8}$$

Сравнивая правые части уравнений (1.8) находим величину p_r:

$$p_r = i(B + A)/(B - A) \tag{1.9}$$

$$A = \frac{t_r - t_{r+1}}{|t_r - t_{r+1}|}, \quad B = \frac{t_{r+1} - t_{r+2}}{|t_{r+1} - t_{r+2}|} \tag{1.10}$$

Величина p_r является вещественной.

Действительно, соотношения (1.10) можно представить так

$$A = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1, \quad B = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2 \tag{1.11}$$

Подставим представления (1.11) в правую часть соотношений (1.9). После ряда преобразований получим $p_r = \mathrm{ctg}((\varphi_2 - \varphi_1)/2)$ – вещественная величина.

Определим постоянные c_r и d_r, входящие в формулы (1.1). Подставив в уравнения (1.2) контуров L_r и L_{r+1} значения (1.3) и (1.7), найдем координату точки t_{0r}:

$$t_{0r} = t_{r+1}^{**} + \frac{t_r^{*} - t_{r+1}^{**}}{2}\beta_r^2 p_r\left(i + \frac{p_r}{2}\right)$$

$$t_{0r} = t_{r+1}^{*} + \frac{t_{r+1}^{*} - t_{r+2}^{**}}{2}\beta_r^2 p_r\left(i - \frac{p_r}{2}\right) \tag{1.12}$$

Сравнивая правые части соотношений (1.12) с учетом представлений (1.1), получим алгебраическую систему для определения величин c_r и d_r:

$$d_r A_{rr} + d_{r+1}A_{r,r+1} + c_r B_{rr} + c_{r+1}B_{r,r+1} = q_r \quad (r = \overline{1,\ N}) \tag{1.13}$$

$$A_{rr} = \frac{t_r - t_{r+1}}{|t_r - t_{r+1}|}\left(1 - \frac{\beta_r^2 p_r}{2}\left(i + \frac{p_r}{2}\right)\right), \quad B_{rr} = -\frac{t_r - t_{r+1}}{|t_r - t_{r+1}|}\frac{\beta_r^2 p_r}{2}\left(i + \frac{p_r}{2}\right)$$

$$A_{r,r+1} = \frac{t_{r+1} - t_{r+2}}{|t_{r+1} - t_{r+2}|}\frac{\beta_{r+1}^2 p_r}{2}\left(i - \frac{p_r}{2}\right)$$

$$B_{r,r+1} = \frac{t_{r+1} - t_{r+2}}{|t_{r+1} - t_{r+2}|}\left(1 + \frac{\beta_{r+1}^2 p_r}{2}\left(i - \frac{p_r}{2}\right)\right) \tag{1.14}$$

$$q_r = \frac{t_r - t_{r+1}}{2}\beta_r^2 p_r\left(i + \frac{p_r}{2}\right) - \frac{t_{r+1} - t_{r+2}}{2}\beta_{r+1}^2 p_r\left(i - \frac{p_r}{2}\right)$$

После решения системы уравнений (1.13) становятся известными величины d_r и c_r $(r = \overline{1,\ N})$. Координаты новых точек t_r^{*} и t_{r+1}^{**}, на которых строится гладкий контур, определяются формулами (1.1).

Уравнение контура L_r (1.2) определено в системе координат Oxy. В местной системе координат $O_r x_r y_r$, связанной с центром эллипса L_r (фиг. 1) это уравнение имеет каноническую форму:

$$x_r = a_r \cos(\theta),\ y_r = \beta_r a_r \sin(\theta),\ a_r = |R_r + m_r| \tag{1.15}$$

Если кривая задана уравнениями (1.15), то кривизна k вычисляется по формуле[3]:

$$k = \left(x_r' y_r'' - x_r'' y_r'\right) / (x_r'^2 + y_r'^2)^{3/2} = \beta_r (1 - (1 - \beta_r^2)\cos^2\theta)^{-3/2} / a_r \tag{1.16}$$

Кривизна в точке стыковки контуров t_{0r}, где $\theta = \pi - \beta_r p_r$, вычисляется из соотношения

$$k = \beta_r^{-2} a_r^{-1}(1 + p_r^2)^{-3/2} \tag{1.17}$$

и имеет значение порядка β_r^{-2}.

При проведении расчетов удобнее использовать безразмерную приведенную кривизну K, которая вводится как произведение кривизны k на полусумму полуосей эллипса L_r, т.е. $K = k(a_r + b_r)/2$.

2. Определение напряженного состояния. В [4] показано, что решение задачи о напряженном состоянии анизотропной пластинки с отверстиями при заданных внешних усилиях приводится к определению функций $\Phi_j(z_j)$ $(j = 1, 2;\ z_j = x + \mu_j y)$ из граничных условий на контурах отверстий. Функции $\Phi_j(z_j)$ определены в областях S_j, которые получаются из области S, занимаемой пластинкой, аффинными преобразованиями:

$$x_j = x + \alpha_j y, \quad y_j = \beta_j y, \quad \mu_j = \alpha_j + i\beta_j \tag{2.1}$$

Учитывая, что аффиксы точек t_j на эллиптических контурах в областях S_j выражаются соотношениями $t_j = x + \mu_j y$, из уравнения (1.2) и сопряженного к нему найдем:

$$t_j = z_{jr} + R_{jr}\sigma + m_{jr} / \sigma, \quad z_{jr} = x_r + \mu_j y_r \tag{2.2}$$

$$R_{jr} = \frac{R_r + \overline{m}_r - i\mu_j(R_r - \overline{m}_r)}{2}, \quad m_{jr} = \frac{\overline{R}_r + m_r + i\mu_j(\overline{R}_r - m_r)}{2} \tag{2.3}$$

На основании уравнений (2.2) можно записать функции, отображающие внешность единичной окружности на внешности эллипсов в областях S_j:

$$z_j = z_{jr} + R_{jr}\zeta_{jr} + m_{jr} / \zeta_{jr} \quad (|\zeta_{jr}| \geq 1) \tag{2.4}$$

Для каждого эллиптического контура L_r границы области будем вводить в области пластинки комплексные потенциалы

$$\Phi_{jr} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{rkj} / \zeta_{jr}^k \tag{2.5}$$

Если контур границы пластинки состоит из N эллиптических контуров L_r, то комплексные потенциалы $\Phi_j(z_j)$, описывающие ее напряженное состояние, будут представлены в виде суммы функций, голоморфных вне контуров:

$$\Phi_j(z_j) = \sum_{r=1}^{N} \Phi_{jr} = \sum_{r=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} a_{rkj} / \zeta_{jr}^k \tag{2.6}$$

Будем считать, что каждый контур L_r подвержен действию нормального p_r и касательного t_r усилий. Внешние усилия $\sigma_x^0 = p$, $\sigma_y^0 = q$, $\tau_{xy}^0 = t$ могут также действовать вдали от отверстий. Проекции этих усилий на координатные оси запишутся так

$$\begin{aligned} X_n &= n_{1r}p_r - n_{2r}t_r - (n_{1r}p + n_{2r}t) \\ Y_n &= n_{2r}p_r + n_{1r}t_r - (n_{1r}t + n_{2r}q) \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $n_{1r} = \cos(n_r, x)$, $n_{2r} = \cos(n_r, y)$, n_r – внешняя нормаль к контуру L_r.

Граничные условия на r-м контуре с учетом соотношений (2.7) представим в виде

$$2\,\mathrm{Re} \sum_{j=1,2} a_{jr}\Phi'_{jr} = P_r^1, \quad 2\,\mathrm{Re} \sum_{j=1,2} b_{jr}\Phi'_{jr} = P_r^2 \tag{2.8}$$

$$a_{jr} = (n_{2r} - \mu_j n_{1r})(n_{2r} - \mu_j n_{1r}), \quad b_{jr} = (n_{2r} - \mu_j n_{1r})(n_{1r} + \mu_j n_{2r})$$

$$\begin{aligned} P_r^1 &= p_r - (n_{1r}^2 p + 2n_{1r}n_{2r}t + n_{2r}^2 q) \\ P_r^2 &= t_r - (n_{1r}n_{2r}(q - p) + (n_{1r}^2 - n_{2r}^2)t) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Для определения комплексных постоянных $a_{rkj} = \overset{1}{a}_{rkj} + i\overset{2}{a}_{rkj}$, входящих в разложения функций Φ_{jr}, воспользуемся дискретным методом наименьших квадратов. Составим функционал

$$J=\sum_{m=1}^{M}\sum_{r=1}^{N}\left[\left(\sum_{j=1}^{2}(a_{jr}\Phi'_{jr}(t_{jm})+\overline{a_{jr}\Phi'_{jr}(t_{jm})})-P_r^1\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{j=1}^{2}(b_{jr}\Phi'_{jr}(t_{jm})+\overline{b_{jr}\Phi'_{jr}(t_{jm})})-P_r^2\right)^2\right] \tag{2.10}$$

где t_{jm} – аффиксы точек на граничном контуре; величина M определяет количество этих точек.

Удовлетворяя условиям $\partial J/\partial a_{lpi}^1=\partial J/\partial a_{lpi}^2=0$ $(l=\overline{1,\ N};\ p=\overline{1,\ n};\ i=1,2)$, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $\overset{1}{a}_{rkj}$ и $\overset{2}{a}_{rkj}$:

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{r=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\left[a_{rkj}^1(A_{mrkj}^1A_{mlpi}^1+B_{mrkj}^1B_{mlpi}^1)+a_{rkj}^2(A_{mrkj}^2A_{mlpi}^1+B_{mrkj}^2B_{mlpi}^1)\right]=$$

$$=\sum_{m=1}^{M}\left[P_{lm}^1A_{mlpi}^1+P_{lm}^2B_{mlpi}^1\right] \tag{2.11}$$

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{r=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\left[a_{rkj}^1(A_{mrkj}^1A_{mlpi}^2+B_{mrkj}^1B_{mlpi}^2)+a_{rkj}^2(A_{mrkj}^2A_{mlpi}^2+B_{mrkj}^2B_{mlpi}^2)\right]=$$

$$=\sum_{m=1}^{M}\left[P_{lm}^1A_{mlpi}^2+P_{lm}^2B_{mlpi}^2\right]\quad(l=\overline{1,\ N};\ i=1,2;\ p=\overline{1,\ n})$$

$$A_{mrkj}^1=2\operatorname{Re}a_{jr}\varphi_{mjrk},\quad A_{mrkj}^2=2\operatorname{Re}ia_{jr}\varphi_{mjrk}$$

$$B_{mrkj}^1=2\operatorname{Re}b_{jr}\varphi_{mjrk},\quad B_{mrkj}^2=2\operatorname{Re}ib_{jr}\varphi_{mjrk} \tag{2.12}$$

$$\varphi_{mjrk}=\frac{d}{dz_j}(\zeta_{jr}^{-k})=-\frac{k}{(R_{jr}\zeta_{jr}^2-m_{jr})}\frac{1}{\zeta_{jr}^{k-1}}$$

После нахождения коэффициентов $a_{rkj}=\overset{1}{a}_{rkj}+i\overset{2}{a}_{rkj}$ из системы алгебраических уравнений (2.11) становятся известными функции $\Phi_j(z_j)$. Напряжения, возникающие в пластинке, определяются из соотношений

$$\sigma_x=2\operatorname{Re}\sum_{j=1,2}\mu_j^2\Phi'_j(z_j),\quad \sigma_y=2\operatorname{Re}\sum_{j=1,2}\Phi'_j(z_j),\quad \tau_{xy}=-2\operatorname{Re}\sum_{j=1,2}\mu_j\Phi'_j(z_j) \tag{2.13}$$

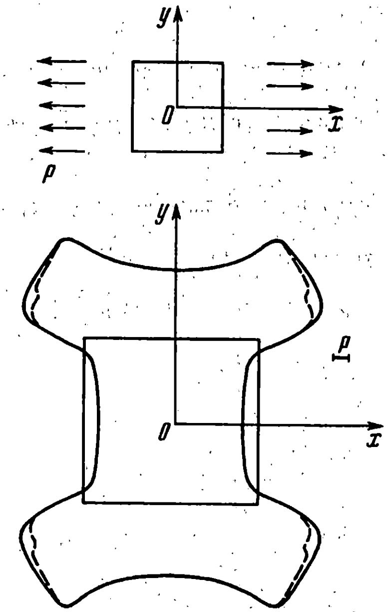
Наибольший интерес представляют напряжения, действующие на контурах или вблизи контуров отверстий на площадках, касательных и нормальных к ним:

$$\sigma_n=\sigma_x n_1^2+\sigma_y n_2^2+2\tau_{xy}n_1n_2$$

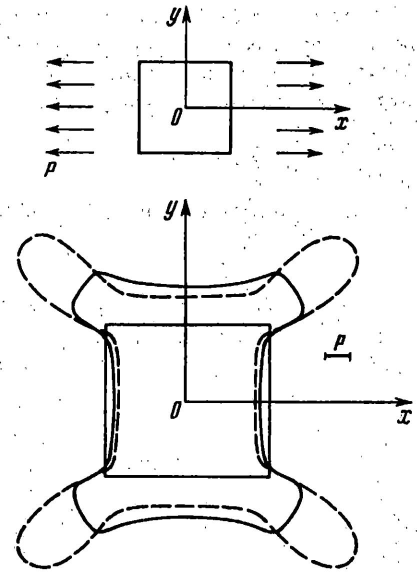
$$\sigma_\theta=\sigma_x n_2^2+\sigma_y n_1^2-2\tau_{xy}n_1n_2 \tag{2.14}$$

$$\tau_{n\theta}=(\sigma_y-\sigma_x)n_1n_2+\tau_{xy}(n_1^2-n_2^2)$$

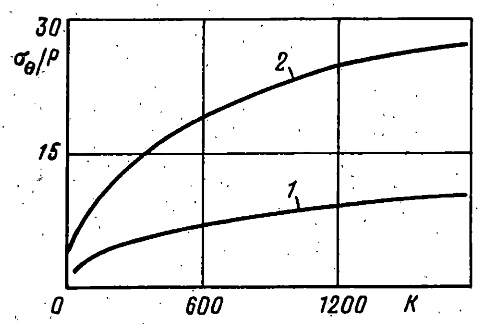
Численные исследования проводились для анизотропных и изотропных материалов. Результаты исследований, полученные на основе изложенного метода, с высокой точностью совпадают с известными результатами других авторов. Предложенный метод позволяет определять компоненты напряженного состояния в точках стыковки эллиптических контуров. На фиг. 2 даны графики изменения напряжения



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

σ_θ/p для случая, когда пластинка, изготовленная из авиационной фанеры ($\mu_1 = 4{,}11\ i$, $\mu_2 = 0{,}343\ i$) и вдали от квадратного отверстия загружена усилиями $\overset{0}{\sigma}_x = p$, $\overset{0}{\sigma}_y = \overset{0}{\tau}_{xy} = 0$. Сплошная линия соответствует распределению напряжений вблизи контура с гладким стыкованием элементов; штриховая – с нарушением гладкости [1]. Из рисунка видно, что результаты совпадают с большой точностью.

Анализ численных результатов показал, что с появлением в пластинке анизотропии концентрация напряжений вблизи угловых точек уменьшается. На фиг. 3 даны графики изменения напряжения σ_θ/p в точках контура квадратного отверстия в случае, когда пластинка загружена на бесконечности усилиями $\overset{0}{\sigma}_x = p$, $\overset{0}{\sigma}_y = \overset{0}{\tau}_{xy} = 0$ (приведенная кривизна в угловой точке равна 75), сплошная линия соответствует распределению напряжения для анизотропной пластинки ($\mu_1 = 4{,}11i$, $\mu_2 = 0{,}343i$); штриховая – для изотропной ($\mu_1 = \mu_2 = i$). На фиг. 4 приведены графики изменения напряжения σ_θ/p в точке стыкования эллиптических контуров, аппроксимирующих квадратное отверстие пластинки, в зависимости от кривизны K в этой точке. Кривая *1* – напряжения в авиационной фанере, кривая *2* – напряжения в изотропном материале.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Космодамианский А.С., Нескородев Н.М.* Напряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями произвольной формы // ДАН Украины. 1993. № 7. С. 54–56.
2. *Нескородев Н.М.* Метод граничных элементов в задачах о напряженном состоянии анизотропной пластинки с отверстиями // Теорет. и прикл. механика. 1993. Вып. 24. С. 44–49.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 стр.
4. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.

Донецк

Поступила в редакцию
5.I.1997