

УДК 539.3

© 1998 г. Э.А. БОНДАРЕВ, В.А. БУДУГАЕВА, Е.Л. ГУСЕВ

**СИНТЕЗ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК ИЗ КОНЕЧНОГО
НАБОРА ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ**

Современное состояние проблемы оптимального проектирования сложных конструкций из заданного набора материалов при различных ограничениях на их служебные характеристики с достаточной полнотой освещено в монографиях [1–3]. В них, в частности, изложены разработанные авторами методы решения задач синтеза упругих слоистых цилиндрических оболочек, обеспечивающих необходимое гашение колебаний при различных внешних воздействиях и при ограничениях на массу или общую толщину конструкции.

Среди задач динамики упругих конструкций особое место занимают задачи о свободных колебаниях. Объясняется это тем, что характеристики свободных колебаний (собственные частоты и собственные формы) полностью определяют индивидуальные свойства механической системы и имеют первостепенное значение также при анализе ее вынужденных колебаний. В этой связи несомненный интерес представляют задачи синтеза конструкций из конечного набора материалов при различных ограничениях, накладываемых на частоту собственных колебаний. Здесь необходимо отметить работу В.В. Алексина¹, в которой рассмотрена задача синтеза слоистых цилиндра и сферы минимальной массы.

Широкое применение полимерных материалов в технике привело к необходимости изучения задач оптимального проектирования неоднородных конструкций, обладающих вязкоупругими свойствами. В соответствии с этим представляет значительный интерес анализ особенностей задач оптимального проектирования вязкоупругих систем по отношению к аналогичным задачам для упругих конструкций. Такой анализ интересен и важен еще и потому, что наличие демпфирующих свойств вязкоупругих материалов может показаться достаточным, чтобы предпочесть их для создания соответствующих конструкций из какого-либо материала, обладающего требуемыми свойствами. Иными словами, возникает вопрос о возможности улучшения вязко-упругой конструкции за счет особенностей прохождения волн через границы различных материалов. Этот вопрос можно сформулировать и таким образом: не окажется ли вязкоупругость подавляющим физическим фактором по сравнению с эффектами отражения и преломления на границах?

Имеется значительное число публикаций, посвященных решению прямых задач расчета характеристик вязкоупругих конструкций (см., например, [4, 5]). Наиболее существенный научный результат, полученный авторами этих работ, заключается в выявлении немонотонной зависимости диссипативных характеристик конструкций из вязкоупругих материалов от их геометрических и других параметров структурной неоднородности. Этот результат может служить основой для постановки задач синтеза слоистых конструкций из вязкоупругих материалов с ограничениями, обеспечивающими выполнение практических важных конструктивных требований (минимальный вес, максимальный декремент затухания и др.).

1. Особенности влияния структуры конструкции (вязкоупругие параметры материалов, взаимное расположение и толщины слоев), синтезируемой из конечного набора вязкоупругих материалов, на уровень демпфирования свободных колебаний проанализируем на примере многослойной сферической оболочки, где каждый слой

¹ См. Алексин В.В. Оптимальное проектирование неоднородно-упругих и слоистых тел: Дис. канд. физ.-мат. наук: Новосибирск, 1986.

заполнен вязкоупругим материалом, механические свойства которого зависят от номера слоя n .

Задачи о свободных колебаниях относятся к классу задач, для которых инерционные члены полностью определяют поведение материалов. Для этого необходимо, чтобы граничные условия соответствовали тождественному равенству нулю работы всех внешних сил. Кроме того, тождественно равными нулю должны считаться массовые силы.

С учетом принципа соответствия решение прямой задачи о собственных колебаниях вязкоупругой сферической оболочки можно получить тем же способом, что и соответствующей задачи теории упругости, в которой модули заменены комплексными вязкоупругими модулями.

Свободные колебания однородной сферы из вязкоупругого материала описываются следующей краевой задачей:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

$$\sigma_r = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \partial u / \partial r + 2\bar{\lambda} u / r \quad (1.2)$$

$$\sigma_\phi = 2(\bar{\lambda} + \bar{\mu})u / r + \bar{\lambda} \partial u / \partial r, \quad R_1 < r < R_2 \quad (1.3)$$

$$\sigma_r(R_1) = \sigma_r(R_2) = 0 \quad (1.4)$$

Здесь R_1 и R_2 – внутренний и внешний радиусы сферической оболочки, $\bar{\lambda}$ и $\bar{\mu}$ – вязкоупругие параметры Ляме, которые при помощи метода замораживания [6] можно представить в виде

$$\bar{\lambda}_n = \lambda_n [1 - \Gamma_{\lambda n}^c(\omega_R) - i\Gamma_{\lambda n}^s(\omega_R)], \quad \bar{\mu}_n = \mu_n [1 - \Gamma_{\mu n}^c(\omega_R) - i\Gamma_{\mu n}^s(\omega_R)] \quad (1.5)$$

$$\Gamma_{\lambda n}^c(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\lambda n}(\tau) \cos(\omega_R \tau) d\tau, \quad \Gamma_{\lambda n}^s(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\lambda n}(\tau) \sin(\omega_R \tau) d\tau \quad (1.6)$$

$$\Gamma_{\mu n}^c(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\mu n}(\tau) \cos(\omega_R \tau) d\tau, \quad \Gamma_{\mu n}^s(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\mu n}(\tau) \sin(\omega_R \tau) d\tau$$

где λ_n , μ_n , $R_{\lambda n}$, $R_{\mu n}$ – параметры Ляме и ядра релаксации материала, занимающего слой n (для однородной сферы $n = 1$); ω_R – действительная константа.

Решение задачи (1.1)–(1.4) для $n = 1$ можно представить в виде:

$$u(r) = (C_1 + C_2) \left\{ -\frac{k^2}{r} \cos(kr) + \frac{k}{r^2} \sin(kr) \right\} - i(C_1 - C_2) \left\{ \frac{k}{r^2} \cos(kr) + \frac{k^2}{r} \sin(kr) \right\} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) = (C_1 + C_2) & \left[\frac{4\mu k}{r} \cos(kr) - \left(\frac{4\mu}{r^2} - k^2(\lambda + 2\mu) \right) \sin(kr) \right] \frac{k}{r} + \\ & + i(C_1 - C_2) \left[\frac{4\mu k}{r} \sin(kr) + \left(\frac{4\mu}{r^2} - k^2(\lambda + 2\mu) \right) \cos(kr) \right] \frac{k}{r} \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $k^2 = \rho\omega^2/(\lambda + 2\mu)$, черта над λ и μ опущена.

N	ρ	λ	μ	ω
1	1	6	6	7,04
2	2	16	16	8,14
3	4	34	34	8,39

Определяя константы из граничных условий (1.4), получим следующее характеристическое уравнение:

$$\cos[k(R_2 - R_1)] \left\{ \frac{4\mu k}{R_1} \left(\frac{4\mu}{R_2^2} - \rho\omega^2 \right) - \frac{4\mu k}{R_2} \left(\frac{4\mu}{R_1^2} - \rho\omega^2 \right) \right\} + \\ + \sin[k(R_2 - R_1)] \left\{ \frac{(4\mu k)^2}{R_1 R_2} + \left(\frac{4\mu}{R_1^2} - \rho\omega^2 \right) \left(\frac{4\mu}{R_2^2} - \rho\omega^2 \right) \right\} = 0 \quad (1.9)$$

В случае упругих материалов коэффициенты λ и μ будут действительными, что соответствует равенствам $\bar{\lambda} = \lambda$, $\bar{\mu} = \mu$ в формулах (1.5). Теперь, используя результаты вычислений В.В. Алехина, можно проверить решение (1.9). Значения исходных параметров приведены в табл. 1 (N – номер материала). Кроме того принималось $R_1 = 0,8$; $R_2 = 1,0$. Значения собственных частот для каждого из трех материалов, приведенные в этой же таблице, совпадают с результатами В.В. Алехина с точностью до третьего знака после запятой. При описании вязкоупругих материалов считалось, что объемная деформация является чисто упругой, т.е. модуль объемной сжимаемости $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ является константой, а для описания сдвиговых деформаций использовалось ядро Ржаницына – Колтунова [7], как наиболее употребительное в механике полимеров:

$$R_\mu = A \exp(-\beta t) / t^{1-\alpha}$$

Решения (1.7) и (1.8) могут быть очевидным путем обобщены на случай многослойной сферы. Обозначим

$$\Delta_n = (c_n(r_{n-1})b_n(r_{n-1}) - d_n(r_{n-1})a_n(r_{n-1}))^{-1} \quad (n = \overline{1, N}) \quad (1.10)$$

$$\Lambda_n = \Delta_n \begin{vmatrix} a_n(r_n) & ib_n(r_n) \\ c_n(r_n) & id_n(r_n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -d_n(r_{n-1}) & b_n(r_{n-1}) \\ -ic_n(r_{n-1}) & ia_n(r_{n-1}) \end{vmatrix} \quad (n = \overline{1, N}) \quad (1.11)$$

$$a_n = -\frac{k_n^2}{r} \cos(k_n r) + \frac{k_n}{r} \sin(k_n r), \quad b_n = -\frac{k_n}{r} \cos(k_n r) - \frac{k_n^2}{r} \sin(k_n r)$$

$$c_n = \frac{k_n}{r} \left[\frac{4\mu_n k_n}{r} \cos(k_n r) - \left(\frac{4\mu_n}{r^2} - \rho_n \omega^2 \right) \sin(k_n r) \right]$$

$$d_n = \frac{k_n}{r} \left[\frac{4\mu_n k_n}{r} \sin(k_n r) + \left(\frac{4\mu_n}{r^2} - \rho_n \omega^2 \right) \cos(k_n r) \right], \quad r_{n-1} < r < r_n, \quad (n = \overline{1, N})$$

Тогда при условиях непрерывности смещения и нормального напряжения на границах слоев получим

$$\begin{vmatrix} u_N(r) \\ \sigma_N(r) \end{vmatrix} = G \begin{vmatrix} u_1(r_0) \\ \sigma_1(r_0) \end{vmatrix} \quad (1.12)$$

где G – результирующая квадратная матрица вида

$$G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \equiv \Lambda_n \Lambda_{n-1} \dots \Lambda_1 \quad (1.13)$$

При этом выполняются граничные условия (1.4):

$$\sigma_N(r_N) = \sigma_1(r_0) = 0 \quad (1.14)$$

Проверку полученных решений осуществим путем сравнения с результатами расчетов В.В. Алехина, выполненными для сферы, состоящей из трех упругих материалов, физические характеристики которых приведены в табл. 1. Первый слой состоял из третьего материала; второй слой – из второго материала, а третий слой – из первого материала табл. 1; $r_0 = 0,7718$, $r_1 = 0,7901$, $r_2 = 0,82657$, $r_N = 1,0$. На основе численных расчетов было получено значение квадрата основной собственной частоты равное 65,01, что совпадает с результатом В. Алехина.

Из решения (1.12) с учетом граничных условий (1.14) получим характеристическое уравнение для определения частоты ω :

$$g_{21} = 0 \quad (1.15)$$

Его корни определялись методом Мюллера [9], а в качестве начального приближения брались собственные частоты упругих колебаний.

2. Теперь рассмотрим задачу синтеза многослойной сферической оболочки из заданного набора вязкоупругих материалов, обеспечивающей максимальное демпфирование свободных колебаний.

Выбирая в качестве управляющих переменных функцию $\Theta(x)$, характеризующую структуру материала, т.е. наличие в данной точке x некоторого материала из множества W , можно сформулировать задачу оптимизации следующим образом. Среди кусочно-постоянных функций $\Theta(x)$, область значений которых принадлежит заданному конечному дискретному множеству W :

$$\Theta(x) \in W = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$$

где m – число различных материалов, найти управление $\Theta(x)$, доставляющее минимум функционалу

$$F = \text{Im}[\omega(\Theta)] \quad (2.1)$$

Квадрат частоты найдем методом Рэлея. Для гармонических колебаний систему (1.1)–(1.4) можно свести к краевой задаче для векторного уравнения

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z} \cdot A, \quad z_2(0) = z_2(1) = 0 \quad (2.2)$$

где введена новая переменная $x \in [0, 1]$, связанная с прежней соотношением $r = r_0 + x(r_N - r_0)$. Штрих означает дифференцирование по x , а матрица A в каждом слое имеет вид

$$A = \begin{vmatrix} -2\lambda gr & gr^2 \\ 4\mu(3\lambda + 2\mu)g - \rho\omega^2(r_N - r_0) & 4\mu gr \end{vmatrix}$$

$$g = (r_N - r_0) / r^2(\lambda + 2\mu)$$

Теперь умножим первое уравнение системы (2.2) на $z_1 r^2$ и проинтегрируем по x от 0 до 1. Используя правило интегрирования по частям и первое уравнение системы (2.2), получим

$$\omega^2(\theta) = \int_0^1 J_1(z, \theta) dx / \int_0^1 J_2(z, \theta) dx \quad (2.3)$$

$$J_1(z, \theta) = \left\{ \frac{4\mu(3\lambda + 2\mu)}{r^2(\lambda + 2\mu)} z_1^2 + \frac{1}{\lambda + 2\mu} z_2^2 \right\} r^2, \quad J_2(z, \theta) = \rho z_1^2 r^2 \quad (2.4)$$

Вывод необходимых условий оптимальности начнем с нахождения вариаций функционала $F_1 = \omega^2(\theta)$, определяемых возмущенным управлением:

$$\theta^*(x) = \begin{cases} \bar{\theta}(x); & x \in M, \quad \theta \in W, \quad \text{mes } M \ll 1 \\ \theta(x); & x \notin M \end{cases}$$

Из (2.3) следует, что

$$\delta F_1(M, \theta) = 2\omega \delta(\omega) = \left[\int_0^1 J_2 dx \right]^{-1} \times \times \left\{ \int_M [J_1(z, \theta) - J_1(z, \theta) - \omega^2 J_2(z, \theta) + \omega^2 J_2(z, \theta)] dx + \int_0^1 \left[\frac{\partial J_1}{\partial z} - \omega^2 \frac{\partial J_2}{\partial z} \right] \delta z dx \right\} \quad (2.5)$$

Последнее слагаемое в фигурных скобках соответствует вариациям фазовых переменных z . Его можно после ряда преобразований с учетом выражений (2.4) представить в виде

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial J_1}{\partial z} - \omega^2 \frac{\partial J_2}{\partial z} \right] \delta z dx = \int_0^1 z_2 r^2 \left(\frac{2}{\lambda + 2\mu} \delta z_2 - \frac{4\lambda}{r(\lambda + 2\mu)} \delta z_1 \right) dx - 2 \int_0^1 \left[\frac{r^2 z_2^2}{r_N - r_0} \delta \left(\frac{dz_1}{dx} \right) \right] dx$$

Теперь, используя первое уравнение системы (2.2), после ряда преобразований получим

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial J_1}{\partial z} - \omega^2 \frac{\partial J_2}{\partial z} \right] \delta z dx = \frac{2r^2 z_2^2}{r_N - r_0} \int_M [-(f_1(\bar{\theta}) - f_1(\theta))] dx \quad (2.6)$$

Здесь f_1 – правая часть первого уравнения системы (2.2).

Подставив теперь выражение (2.6) в (2.5), получим

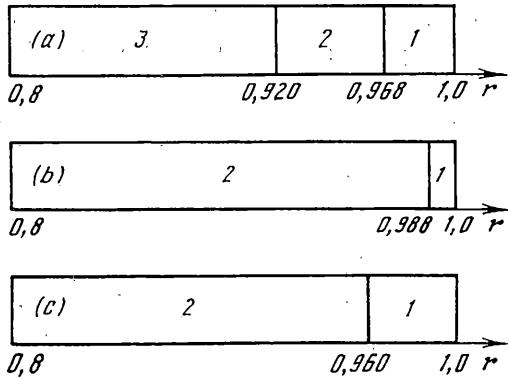
$$\delta F_1(M, \bar{\theta}) = \int_M \left[J_1(\bar{\theta}) - J_1(\theta) - \omega^2 (J_2(\bar{\theta}) - J_2(\theta)) - \frac{2z_2 r^2}{r_N - r_0} (f_1(\bar{\theta}) - f_1(\theta)) \right] dx \left/ \int_0^1 J_2 dx \right. \quad (2.7)$$

Теперь, варьируя функционал (2.1), можно записать $\delta F = \text{Im } \delta(\omega) = \text{Im}(\delta F_1 / 2\omega)$. Окончательно, с учетом (2.7) будем иметь

$$\delta F = \text{Im} \left\{ \frac{1}{2\omega} \left[\int_0^1 J_2 dx \right]^{-1} \int_M [H(\dots, \bar{\theta}) - H(\dots, \theta)] dx \right\} \quad (2.8)$$

$$H(\dots, \bar{\theta}) = J_1(\dots, \bar{\theta}) - \omega^2 J_2(\dots, \bar{\theta}) - \frac{2z_2 r^2}{r_N - r_0} f_1(\dots, \bar{\theta}) \quad (2.9)$$

Представление вариации функционала (2.1) в виде (2.8) позволяет необходимое условие оптимальности $\delta F(z, \theta) \leq 0$ сформулировать в форме принципа максимума:



пусть $\{\theta^{opt}\}$ – оптимальное управление в задаче (2.1), (2.2), (2.3), (2.5), при котором существует нетривиальное решение системы (2.2). Тогда построенная функция Гамильтона (2.9) достигает минимума по аргументу θ на оптимальном управлении θ^{opt} почти при каждом $x \in [0, 1]$, т.е.

$$H(\dots, \theta^{opt}) = \min_{\theta \in W} H(\dots, \theta) \quad (2.10)$$

В рассматриваемой задаче гамильтониан (2.9) не содержит сопряженных переменных.

3. С учетом всего вышесказанного вычислительный алгоритм строится следующим образом:

1. Интервал $[0, 1]$ разбьем равномерной сеткой узлов $\{x_n\}$ на достаточно большое число отрезков малой длины $h = x_{n+1} - x_n$, моделирующих множество малой меры M .

2. При известном управлении $\{\theta(x)\}$ находим собственную частоту, решая уравнение (1.15).

3. С найденной частотой решаем систему (1.12), считая, что значения вектора фазовых переменных на отрезке M_i характеризуются его значением в середине отрезка $x = x_n + h/2$.

4. Задаем новое управление $\{\bar{\theta}\}$ на отрезке M_n из условия

$$H[\mathbf{z}(x_n + h/2), \bar{\theta}] = \min_{\theta \in W} H[\mathbf{z}(x_n + h/2), \theta]$$

Процесс считается законченным, если управление не изменяется ни на одном отрезке. Если в результате решения задачи управление $\theta(x)$ принимает одно и то же значение на двух или нескольких рядом стоящих отрезках M_i , то эти отрезки объединяются в один макрослой.

Рассмотрим характерные примеры расчетов. Во всех вариантах требуется синтезировать сферическую оболочку с максимальным затуханием собственных колебаний. Пусть задан набор из трех вязкоупругих материалов, характеристики которых (в безразмерном виде) приведены в табл. 2. Внутренний и внешний радиусы оболочки фиксированы: $r_0 = 0,8$, $r_n = 1,0$. Этот вариант характерен тем, что реологические параметры всех материалов одинаковы. В двух последних колонках табл. 2 приведены действительная и мнимая части собственных частот соответствующих однослойных оболочек. Синтезированная с помощью описанного алгоритма трехслойная оболочка имеет следующие параметры: $\text{Re } \omega = 8,47$, $\text{Im } \omega = 9,94 \cdot 10^{-3}$. Ее конструкция показана на фиг. 1, a, где цифры внутри соответствуют номеру материала в табл. 2. Во втором примере все характеристики материалов за исключением параметра α такие же, как в

Таблица 2

<i>N</i>	ρ	<i>E</i>	v	<i>A</i>	α	β	$Re \omega$	$Im \omega \cdot 10^3$
1	1	15	0,25	0,01	0,5	0,05	7,04	9,00
2	2	40	0,25	0,01	0,5	0,05	8,13	9,70
3	4	85	0,25	0,01	0,5	0,05	8,35	9,89

Таблица 3

<i>N</i>	α	$Re \omega$	$Im \omega \cdot 10^3$
1	0,10	6,89	25,7
2	0,12	8,00	27,0
3	0,15	8,28	25,3

Таблица 4

<i>N</i>	ρ	<i>E</i>	v	<i>A</i>	α	β	$Re \omega$	$Im \omega \cdot 10^3$
1	1	15	0,25	0,01	0,8	0,05	7,05	4,4
2	4	48	0,20	0,01	0,5	0,05	5,77	7,3
3	8	42	0,15	0,01	0,5	0,05	5,50	6,5

табл. 2. Его значения и соответствующие действительные и мнимые части комплексных частот содержатся в табл. 3. Наибольшее затухание собственных частот обеспечивает двухслойная сферическая оболочка ($Re \omega = 8,0$, $Im \omega = 27,2 \cdot 10^{-3}$), представленная на фиг. 1, *b*.

Далее рассмотрим три материала, параметры которых приведены в табл. 4. Синтезируемая оболочка оказывается двухслойной (фиг. 1, *c*) со следующими характеристиками: $Re \omega = 5,96$, $Im \omega = 7,6 \cdot 10^{-3}$.

Анализ результатов вычислений позволяет положительно оценить возможность повышения уровня демпфирования за счет особенностей прохождения волн через границы различных материалов. В то же время следует отметить, что во всех примерах это повышение по сравнению с однослойной оболочкой из самого "хорошего" материала (наибольшее значение $Im \omega$ в таблицах 2–4) невелико. Во всех слоистых оболочках первый внутренний слой всегда состоит из этого "хорошего" материала, причем его толщина, как правило, много больше, чем у остальных слоев. Это особенно заметно во втором примере (см. фиг. 1, *b*).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабе Г.Д., Гусев Е.Л. Математические методы оптимизации интерференционных фильтров. Новосибирск: Наука, 1987. 216 с.
2. Гусев Е.Л. Математические методы синтеза слоистых структур. Новосибирск: Наука, 1993. 262 с.
3. Каниболотский М.А., Уржумцев Ю.С. Оптимальное проектирование слоистых конструкций. Новосибирск: Наука, 1989. 176 с.
4. Колтунов М.А., Майборода В.П., Кравчук А.С. Прикладная механика деформируемого твердого тела. М.: Высш. шк., 1983. 1345 с.
5. Трошинский И.Е. Собственные колебания неоднородных вязкоупругих тел // Изв. АН СССР. МТТ. № 2. 1983. С. 117–123.
6. Филатов А.М. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегральных уравнений. Ташкент: Фан, 1974. 216 с.
7. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. М.: Высш. шк., 1976. 274 с.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.

Якутск

Поступила в редакцию
24. I. 1996