МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1998

УДК 539.3

© 1998 г. В.В. ВАСИЛЬЕВ

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИН – ИСТОРИЯ И СОВРЕМЕННЫЙ АНАЛИЗ

В 1992–97 гг. на страницах журнала "Изв. АН. Механика твердого тела" имела место дискуссия, посвященная истории и современным концепциям теории изгиба тонких пластин [1–9]. В процессе дискуссии высказывались и опровергались критические замечания в отношении теории изгиба пластин, которая была построена в прошлом веке и которую принято называть классической.

Настоящая работа не является попыткой продолжить эту дискуссию. Она по замыслу имеет конструктивный, а не полемический характер и посвящена обоснованию теории, которую предлагается считать современной формой классической теории пластин. Основная идея такого предложения заключается в совмещении теории Кирхгофа [10], которая сейчас считается классической теорией пластин, с теорией Рейсснера [11, 12] и Генки [13], которые квалифицируются в настоящее время как уточненные теории первого порядка, учитывающие деформации поперечного сдвига.

Ниже после исторического обзора, в котором обсуждаются результаты, имеющие непосредственное отношение к рассматриваемой теории, формулируется система физических гипотез, выводится система уравнений теории пластин, имеющая шестой порядок, записываются типовые формы граничных условий и формулируются соответствующие краевые задачи.

Следует подчеркнуть, что вывод всех соотношений осуществляется традиционным прямым методом [14]. Вариационные и асимптотические методы используются только для более полной иллюстрации рассматриваемой теории.

1. История вопроса. История теории тонких упругих пластин насчитывает более двух столетий. Не останавливаясь на всех этапах ее развития, описанных в известных работах [15–18], начнем анализ с работы Кирхгофа [10], в которой была построена математически корректная теория пластин, признанная впоследствии классической теорией.

Рассмотрим изотропную пластину, имеющую толщину h и отнесенную к декартовой системе координат x, y, z. Оси x и y расположены в срединной плоскости пластины, а ось z нормальна к этой плоскости так, что $-h/2 \leqslant z \leqslant h/2$.

Для построения теории пластин Кирхгоф сформулировал систему гипотез, обобщающую гипотезу плоских сечений Бернулли – Эйлера на двумерную задачу. В частности, считается, что элемент нормали к срединной плоскости пластины остается при изгибе пластины прямолинейным и нормальным к поверхности, в которую трансформируется срединная плоскость, постулируется отсутствие деформаций (растяжения, сжатия и сдвига) срединной плоскости и не учитывается поперечное нормальное напряжение σ_z.

В результате перемещения произвольной точки пластины по осям x, y и z представляются в виде

$$u_x = -z\,\partial w/\partial x, \quad u_y = -z\,\partial w/\partial y, \quad u_z = w \tag{1.1}$$

В исходной теории Кирхгофа учитывается зависимость прогиба w от поперечной координаты z, связанная с эффектом Пуассона. Позднее, Томсон и Тэт [19] дополнили систему гипотез Кирхгофа условием отсутствия поперечной нормальной деформации. При этом прогиб оказывается зависящим только от x и y, т.е. $w = w(x, y)$. Тогда поле перемещений (1.1) соответствует нулевым трансверсальным деформациям. Действительно, подставляя (1.1) в соответствующие геометрические соотношения

$$e_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad e_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{1.2}$$

получим $e_{xz} = 0$, $e_{yz} = 0$, $e_z = 0$.

Воспользовавшись далее оставшимися геометрическими соотношениями

$$e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \tag{1.3}$$

и соотношениями упругости

$$\sigma_x = \overline{E}(e_x + \nu e_y), \quad \sigma_y = \overline{E}(e_y + \nu e_x), \quad \tau_{xy} = G e_{xy} \tag{1.4}$$

$$\overline{E} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.5}$$

можно получить следующие выражения для напряжений

$$\sigma_x = z\overline{E}(k_x + \nu k_y), \quad \sigma_y = z\overline{E}(k_y + \nu k_x), \quad \tau_{xy} = zGk_{xy} \tag{1.6}$$

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{1.7}$$

Поскольку напряжения линейно зависят от z, они статически эквивалентны моментам

$$M_x = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \tag{1.8}$$

которые с учетом (1.5) и (1.6) принимают вид

$$M_x = D(k_x + \nu k_y), \quad M_y = D(k_y + \nu k_x), \quad M_{xy} = \tfrac{1}{2} D(1-\nu)k_{xy} \tag{1.9}$$

$$D = \tfrac{1}{12}\overline{E}h^3 \tag{1.10}$$

является изгибной жесткостью пластины.

Из равенств (1.6) и (1.9) следует, что

$$\sigma_x = z\frac{12}{h^2}M_x, \quad \sigma_y = z\frac{12}{h^2}M_y, \quad \tau_{xy} = z\frac{12}{h^2}M_{xy} \tag{1.11}$$

Полная потенциальная энергия пластины, соответствующая полю перемещений (1.1), имеет вид

$$U = \iint \left[\frac{1}{2}(M_x k_x + M_y k_y + M_{xy} k_{xy}) - pw\right] dxdy \tag{1.12}$$

Здесь p – нормальное давление, действующее на пластину. Минимизация функционала (1.12) по функции прогиба $w(x, y)$ позволяет получить следующее уравнение

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0 \tag{1.13}$$

и два естественных граничных условия, которые для края $x = \text{const}$ имеют вид

$$M_x \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + 2\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)\delta w = 0 \tag{1.14}$$

Если контур пластины имеет угловую точку, то в этой точке

$$2M_{xy}\delta w = 0 \tag{1.15}$$

Выражая в уравнении (1.13) моменты через прогиб с помощью равенств (1.7) и (1.9), получим бигармоническое уравнение теории пластин

$$D\Delta\Delta w = p, \qquad \Delta(\,) = \partial^2(...)/\partial x^2 + \partial^2(...)/\partial y^2 \tag{1.16}$$

Следует сделать два важных замечания. Во-первых, Кирхгоф строил теорию пластин применительно к задаче о свободных колебаниях пластины, т.е. в исходном варианте уравнения (1.16) вместо давления p фигурировал инерционный член. Интересно отметить, что уравнение (1.16) для поперечного изгиба пластины было получено Навье в 1820 г. [16, 18], однако его работа не упоминается Кирхгофом. Во-вторых, Кирхгоф оперировал с деформациями и не вводил интегральных сил и моментов (1.8). В связи с этими особенностями теории Кирхгофа, вопросы о равновесии пластины, нагруженной давлением, и о физическом смысле естественных граничных условий вообще не возникали. Более того, в окончательном варианте теории [20] трансверсальные касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} считаются равными нулю, что вообще исключает равновесие пластины, нагруженной давлением.

Непосредственное рассмотрение равновесия элемента пластины приводит, как известно, к следующим трем уравнениям

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \qquad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \tag{1.18}$$

содержащим поперечные усилия

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \qquad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \tag{1.19}$$

которые отсутствуют в теории Кирхгофа. Если выразить Q_x и Q_y из уравнений (1.17) и подставить в уравнение (1.18), то получим уравнение (1.13) и далее – (1.16), т.е. формально получаем основное уравнение теории Кирхгофа. Второе естественное граничное условие (1.14), преобразованное с помощью первого уравнения (1.17), принимает вид

$$K_x \delta w = 0, \qquad K_x = Q_x + \partial M_{xy} / \partial y \tag{1.20}$$

Следующий шаг в разработке теории пластин был сделан Томсоном и Тэтом, которые ввели обобщенное поперечное усилие K_x, определяемое вторым равенством (1.20). При этом использовалась теорема статики, согласно которой распределение крутящего момента вдоль некоторой плоской кривой статически эквивалентно распределению поперечной силы, интенсивность которой равна производной от момента по дуге кривой. В результате K_x в соотношениях (1.20) оказалось возможным интерпретировать как эффективное поперечное усилие, действие которого эквивалентно действию усилия Q_x и крутящего момента M_{xy}, а составляющая $2M_{xy}$ в условии (1.15) оказывается сосредоточенной силой, действующей в угловой точке пластины.

Поскольку в теории появились усилия Q_x и Q_y, являющиеся согласно равенствам (1.19) равнодействующими касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz}, необходимо определить и сами эти напряжения. В связи с тем, что соотношения упругости для них отсутствуют (согласно принятым гипотезам соответствующие деформации равны нулю), для этой цели используются трехмерные уравнения равновесия, т.е.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=0 \quad (x,y,z)$$

Символ (x, y, z) обозначает круговую перестановку индексов. Интегрируя эти уравнения по z, учитывая соотношения (1.8), (1.17), (1.19) и удовлетворяя статические граничные условия на лицевых плоскостях пластины

$$\tau_{xz}(z=\pm h/2)=0, \qquad \tau_{yz}(z=\pm h/2)=0 \tag{1.21}$$

окончательно получим

$$\tau_{xz}=\frac{3Q_x}{2h}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right), \qquad \tau_{yz}=\frac{3Q_y}{2h}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right) \tag{1.22}$$

Таким образом, рассматриваемая теория позволяет полностью описать напряженно-деформированное состояние пластины и уже более столетия успешно используется для решения широкого класса прикладных задач по расчету пластин самого разнообразного назначения.

Однако, как и любая приближенная теория, она обладает недостатками, к числу которых можно отнести следующие:

1. Из равенств (1.1) следует, что поле перемещений пластины в плоскостях, параллельных срединной плоскости (т.е. при z = const) является потенциальным. Действительно, определяя угол поворота бесконечно малого элемента пластины в своей плоскости

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tag{1.23}$$

получаем $\omega_z=0$.

2. Из (1.1) также следует, что потенциалом для перемещений u_x и u_y служит zw. Это приводит к тому, что в рамках рассматриваемой теории элемент пластины не обладает необходимым числом независимых степеней свободы, которые он должен иметь как твердое тело (в рассматриваемом случае это смещение вдоль оси z и повороты вокруг осей x и y). Кинематика элемента пластины полностью определяется прогибом $w(x, y)$. В результате из принципа Лагранжа вместо трех уравнений равновесия (1.17), (1.18) следует лишь одно вариационное уравнение (1.13). Это уравнение не противоречит системе (1.17), (1.18), но и не эквивалентно ей, т.е. не обеспечивает равновесия элемента пластины как твердого тела.

3. По этой же причине вместо трех реально действующих на краю пластины силовых факторов (изгибающего момента, крутящего момента и поперечного усилия) граничные условия теории позволяют учесть только два. Из них физический смысл имеет только первое условие (1.14), накладываемое на изгибающий момент. Сведение крутящего момента к поперечному усилию в общем случае неправомерно [2, 5], так как использованная для этого Томсоном и Тэтом теорема статики справедлива лишь для недеформируемого тела, а для упругой пластины, в общем случае, неверна. Таким образом, второе естественное граничное условие (1.14) так же, как и условие (1.15) для угловой точки контура пластины, физического смысла не имеют.

4. Решение уравнения (1.16), удовлетворяющее естественным граничным условиям (1.14) и (1.15), не позволяет обратить в ноль напряжения на свободном краю пластины. На свободном краю x = const остаются касательные напряжения τ_{xy}, статически эквивалентные некоторому крутящему моменту M_{xy} и напряжения τ_{xz}, статически эквивалентные некоторому поперечному усилию Q_x. Теория Кирхгофа позволяет обратить в ноль на свободном краю пластины только комбинацию M_{xy} и Q_x, т.е. величину K_x, определяемую вторым равенством (1.20).

Это последнее свойство теории Кирхгофа было замечено еще в прошлом веке. В работах Томсона и Тэта, Буссинеска и Леви [15] была поставлена задача о напряженном состоянии полубесконечной пластины, на краю $x = 0$ которой действуют касательные напряжения τ_{xy} и τ_{xz} такие, что $M_{xy} \neq 0$, $Q_x \neq 0$, а $K_x = 0$. Наиболее существенной для настоящего анализа является работа Леви [21], в которой для решения этой задачи была введена потенциальная функция $F(x, y, z)$ такая что

$$u_x = \partial F / \partial y, \quad u_y = -\partial F / \partial x, \quad u_z = 0 \tag{1.24}$$

и получено следующее уравнение для F:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 \tag{1.25}$$

Разлагая F в тригонометрический ряд

$$F = \sum_n F_n(x, y) \sin \lambda_n z$$

где $\lambda_n = \pi(2n + 1)/h$, Леви привел уравнение (1.25) к системе уравнений Гельмгольца

$$\Delta F_n - \lambda_n^2 F_n = 0 \tag{1.26}$$

и предложил использовать решение этой системы для постановки дополнительного граничного условия на свободном краю пластины (например, $M_{xy} = 0$ или $Q_x = 0$). Однако это предложение не было поддержано. К сожалению, в теории пластин получил распространение другой подход, согласно которому напряженное состояние пластины, соответствующее полю перемещений (1.24), можно не учитывать. Дело в том, что уравнения (1.26), содержащие при малой толщине пластины h большой параметр λ_n, определяют решение, которое для полубесконечной пластины быстро затухает при удалении от края $x = 0$ и которое можно игнорировать на основании принципа Сен-Венана.

Итак, теория Кирхгофа, сводящаяся к уравнению (1.16) и граничным условиям (1.14), (1.15), получила статус классической теории пластин и до настоящего времени является основой расчета тонкостенных элементов конструкций.

Попытки уточнения этой теории сопровождали ее всегда и продолжаются по настоящее время. Наиболее существенный шаг в этом направлении был сделан Рейсснером [11, 12], который, по-существу, получил двумерный аналог уравнения Леви (1.25).

Уточняя теорию Кирхгофа, Рейсснер принял в качестве статически возможных напряжений следующие из теории Кирхгофа напряжения (1.11) и (1.22) и воспользовался принципом минимума потенциальной энергии деформации. Окончательная система уравнений (с 1944 по 1989 г. Рейсснером было предложено несколько форм записи этих уравнений) после некоторых упрощений может быть представлена в следующем виде

$$D\Delta\Delta w = p - \frac{D}{C_s}\Delta p \qquad (1.27)$$

$$\Delta\chi - \frac{2C_s}{D(1-\nu)}\chi = 0 \qquad (1.28)$$

где $C_s = 5Gh/6$ – жесткость пластины при поперечном сдвиге, а χ – функция напряжений, через которую выражаются поперечные усилия Q_x и Q_y.

В отличие от уравнения (1.16) теории Кирхгофа, система (1.27), (1.28) имеет шестой порядок и лишена недостатков этой теории, которые обсуждались выше.

К сожалению, в литературе утвердилось не вполне правильное понимание теории Рейсснера как теории пластин, уточняющей теорию Кирхгофа на случай учета деформаций поперечного сдвига.

Более того, ее, как правило, называют сдвиговой теорией первого порядка и иногда интерпретируют как обобщение на пластины сдвиговой теории балок, предложенной С.П. Тимошенко. Для этого есть определенные основания, так как при $C_s \to \infty$ (что соответствует отсутствию поперечного сдвига) система (1.27), (1.28) вырождается в уравнение (1.16). Однако по-существу (и независимо от субъективных намерений ее автора) теория Рейсснера не уточняет теорию Кирхгофа, а дополняет ее до физически корректной теории пластин, которую и следует называть классической теорией.

Рассмотрим некоторые важные особенности теории Рейсснера. Уравнение (1.27), в отличие от соответствующего уравнения теории Кирхгофа (1.16), содержит в правой части член, учитывающий влияние деформации поперечного сдвига на прогиб пластины. Его одномерный аналог соответствует уравнению Тимошенко для балки. Таким образом, обобщенная на пластину модель Тимошенко для балки описывается уравнением (1.27). Однако теория Рейсснера содержит еще одно уравнение, которое имеет принципиальное значение, поскольку оно описывает принципиальное различие между пластиной и системой перекрестных балок, работающих на изгиб. Такая система балок моделирует пластину, если балки работают не только на изгиб, но и на кручение. Именно этот эффект и описывается уравнением (1.28), а поскольку без деформации сдвига кручение невозможно, это уравнение исчезает при $C_s \to \infty$. Таким образом, теория Рейсснера не только уточняет теорию Кирхгофа, учитывая деформацию поперечного сдвига, но и принципиально отличается от нее тем, что учитывает кручение пластины.

К сожалению, правильная интерпретация теории Рейсснера существенно затрудняется тем, что она была построена в напряжениях, для задания которых использовано решение, следующее из теории Кирхгофа. Более простой и естественной была бы теория, построенная в перемещениях, т.е. так же, как и теория Кирхгофа. Однако Рейсснер не использовал метод перемещений, полагая, что это приведет к потере точности теории.

Действительно, рассмотрим теорию пластин, основанную на следующей аппроксимации перемещений

$$u_x = z\theta_x, \qquad u_y = z\theta_y, \qquad u_z = w(x,y) \qquad (1.29)$$

Здесь θ_x и θ_y – углы поворота нормали к срединной плоскости пластины, которые не связаны с прогибом w. Поле перемещений (1.29) было предложено Генки [13] практически одновременно с публикацией работы Рейсснера (в [13] указана дата поступления статьи – ноябрь 1944 г.). В работе Генки получена система трех уравнений равновесия относительно θ_x, θ_y и w и осуществлено ее преобразование к системе, аналогичной системе (1.27) и (1.28). Однако анализ этой системы, формулировка краевой задачи и какие-либо примеры отсутствуют.

Найдем напряжения, соответствующие полю перемещений (1.29). Подставляя (1.29) в соотношения (1.3) и далее в (1.4) и используя равенства (1.8), получим выражения (1.11) для σ_x, σ_y и τ_{xy}, т.е. результат, следующий из теории Кирхгофа. Однако если найти трансверсальные деформации сдвига (1.2) и подставить их в соотношения упругости для соответствующих касательных напряжений

$$\tau_{xz} = Ge_{xz}, \quad \tau_{yz} = Ge_{yz} \tag{1.30}$$

получим

$$\tau_{xz} = G(\theta_x + \partial w / \partial x), \quad \tau_{yz} = G(\theta_y + \partial w / \partial y) \tag{1.31}$$

Эти напряжения не удовлетворяют статическим граничным условиям (1.21). Это противоречие традиционно считается основным недостатком обсуждаемого подхода и было впервые отмечено Генки [13]. Именно из-за этого теория пластин, основанная на аппроксимации перемещений в форме (1.29) квалифицируется в настоящее время как сдвиговая теория первого порядка. Как известно, имеется большое количество теорий высшего порядка, основанных на более сложных аппроксимациях перемещений, которые здесь не обсуждаются.

Заметим, что противоречивость теории, приводящей к напряжениям (1.31), по-существу, заключается не в том, что они не удовлетворяют граничным условиям (1.21), а в том, что они не совпадают с соотношениями (1.22), следующими из уравнений равновесия. Отсутствие такого противоречия в теории Кирхгофа связано лишь с тем, что в ней нет соотношений упругости (1.30) и равенствам (1.22) нет альтернативы. Как будет показано ниже, аналогичная ситуация имеет место и в отношении теории, основанной на аппроксимации (1.29).

2. Уравнения теории пластин. Для вывода уравнений теории пластин введем следующие две известные гипотезы:

1. Элемент нормали к срединной плоскости пластины (нормальный элемент) при изгибе пластины не изменяет своей длины и остается прямолинейным.

2. Трансверсальное нормальное напряжение σ_z мало по сравнению с напряжениями σ_x и σ_y.

Эти гипотезы отличаются от современной формы гипотез Кирхгофа только тем, что не требуют ортогональности нормального элемента пластины к ее изогнутой срединной плоскости. При этом нормальный элемент приобретает три независимые степени свободы, соответствующие перемещению $w(x, y)$ или прогибу пластины и углам поворота $\theta_x(x, y)$ и $\theta_y(x, y)$. В результате, поле перемещений пластины совпадает с аппроксимацией Генки (1.29). Повторяя традиционный вывод соотношений (1.9), получим

$$M_x = D(r_x + \nu r_y), \quad M_y = D(r_y + \nu r_x), \quad M_{xy} = \frac{1}{2} D(1-\nu) r_{xy} \tag{2.1}$$

$$r_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad r_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \quad r_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \tag{2.2}$$

Напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy}, равнодействующими которых являются моменты M_x, M_y и M_{xy}, определяются, как и в теории Кирхгофа, равенствами (1.11).

Рассмотрим трансверсальные касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} и покажем, что получаемые традиционно равенства (1.31) не определяют эти напряжения. Действительно, подстановка перемещений (1.29) в соотношения (1.2) для e_{xz} и e_{yz} требует дифференцирования по z. Однако дифференцировать аппроксимирующие соотношения, как известно, нельзя и поэтому соотношения (1.31) являются неправомерными.

Корректный результат можно получить только для поперечных усилий Q_x и Q_y. Интегрирование в равенствах (1.19) исключает необходимость в дифференцировании перемещений по z, т.е. с учетом (1.2), (1.29) и (1.30) имеем

$$Q_x = G\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)dz = G\left[u_x\left(\frac{h}{2}\right)-u_x\left(-\frac{h}{2}\right)+h\frac{\partial w}{\partial x}\right] = Gh\left(\theta_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Таким образом, в рамках рассматриваемой теории физические соотношения можно получить только для поперечных усилий

$$Q_x = Cs_x,\ Q_y = Cs_y,\ C = Gh \tag{2.3}$$

$$s_x = \theta_x + \partial w/\partial x,\quad s_y = \theta_y + \partial w/\partial y \tag{2.4}$$

Отсутствие аналогичных соотношений для напряжений показывает, что поведение пластины не зависит от закона распределения τ_{xz} и τ_{yz} по толщине пластины, что совершенно естественно, поскольку, согласно принятым выше гипотезам, при изгибе пластины ее нормальные элементы не изменяют своей длины. Как известно, поведение недеформируемого тела не зависит от распределения приложенных к нему сил и определяется только их равнодействующими, которыми и являются в рассматриваемом случае Q_x и Q_y. Отсюда также следует, что поправочные коэффициенты (например, 5/6), традиционно вводимые для учета влияния распределения τ_{xz} и τ_{yz} по толщине пластины на ее поведение, в рамках теории изгиба пластин, игнорирующей деформацию e_z, существовать не могут. Что же касается напряжений τ_{xz} и τ_{yz}, то для их определения, как и в теории Кирхгофа, остается только один путь – использовать трехмерные уравнения равновесия. В результате приходим к равенствам (1.22).

Получив с помощью системы физических гипотез соотношения упругости (2.1) и (2.3) и используя традиционный метод построения теории пластин, рассмотрим равновесие ее элемента. В результате получаем уравнения (1.17) и (1.18). В принципе, эти три уравнения после подстановки соотношений (2.1), (2.3) и далее (2.2), (2.4) образуют полную систему уравнений относительно неизвестных θ_x, θ_y и w. Однако желательно привести эту систему к форме, аналогичной уравнениям (1.27) и (1.28). Для этого воспользуемся уравнением (1.13), которое следует из системы (1.17), (1.18), если исключить Q_x и Q_y. Подставляя моменты согласно равенствам (2.1), (2.2), получим

$$D\Delta\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)+p=0 \tag{2.5}$$

Структура этого уравнения показывает, что введением потенциальной функции $\varphi(x, y)$ такой, что

$$\theta_x = -\partial\varphi/\partial x,\quad \theta_y = -\partial\varphi/\partial y \tag{2.6}$$

его можно привести к следующей форме

$$D\Delta\Delta\varphi = p \tag{2.7}$$

Теперь воспользуемся уравнениями моментов (1.17). Подставляя в них моменты и усилия с помощью равенств (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4) и учитывая соотношения (2.6), будем иметь

$$\partial F_\varphi/\partial x = 0,\quad \partial F_\varphi/\partial y = 0 \tag{2.8}$$

$$F_\varphi = \frac{D}{C}\Delta\varphi - \varphi + w$$

Из уравнений (2.8) следует, что $F_\varphi = \text{const}$. Несущественная для потенциальной функции константа может быть принята равной нулю. Тогда $F_\varphi = 0$ и следовательно

$$w = \varphi - \frac{D}{C}\Delta\varphi \tag{2.9}$$

Таким образом, потенциальная часть поля перемещений определяется уравнениями (1.29), (2.6), (2.7) и (2.9). В том, что для полного описания поведения пластины его недостаточно, можно убедиться подстановкой (1.29) и (2.6) в соотношение (1.23) для ω_z. Как и в теории Кирхгофа, поворот элемента пластины в ее плоскости при этом отсутствует. Как известно из механики сплошной среды [22], для описания вращательного движения необходимо ввести еще одну функцию (функцию тока) $\psi(x, y)$. Структура соответствующего преобразования снова следует из уравнения (2.5). Однородный вариант этого уравнения (при $p = 0$) имеет решение вида

$$\theta_x = \partial\psi / \partial y, \quad \theta_y = -\partial\psi / \partial x \tag{2.10}$$

Если подставить (1.29) и (2.10) в равенство (1.23), получим

$$\omega_z = z\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y}$$

Отсюда следует, что функция $\psi(x, y)$ определяет вращательное движение элемента пластины. Для вывода уравнения, определяющего эту функцию, повторим вывод соотношения (2.9). Уравнения моментов (1.17) с учетом равенств (2.6) дают следующие уравнения, аналогичные (2.8)

$$\partial F_\psi / \partial x = 0, \quad \partial F_\psi / \partial y = 0$$

$$F_\psi = \Delta\psi - k^2\psi, \quad k^2 = \frac{2C}{D(1-\nu)} \tag{2.11}$$

Повторая рассуждения, приведенные к равенству (2.9), окончательно получим

$$\Delta\psi - k^2\psi = 0 \tag{2.12}$$

Ввиду того, что рассматриваемая задача линейна, можно использовать принцип суперпозиции и представить углы поворота нормального элемента пластины в следующем окончательном виде

$$\theta_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \theta_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2.13}$$

Входящие сюда функции φ и ψ определяются уравнениями (2.7) и (2.12), а прогиб w находится по формуле (2.9).

Если не учитывать деформацию поперечного сдвига и принять $C \to \infty$, то из уравнения (2.12) следует $\psi = 0$, равенство (2.9) дает $\varphi = w$, а уравнение (2.7) переходит в уравнение (1.16) теории Кирхгофа.

3. Граничные условия. Уравнения (2.7) и (2.12) имеют в совокупности шестой порядок и соответствующая краевая задача требует трех граничных условий. Для определения рассмотрим типовые граничные условия для края $x = \text{const}$.

Для жестко закрепленного края пластины $u_x = 0$, $u_y = 0$, $u_z = 0$ и равенства (1.29) дают следующие три условия $\theta_x = 0$, $\theta_y = 0$, $w = 0$.

На свободном краю пластины должны отсутствовать напряжения, т.е. $\sigma_x = 0$, $\tau_{xy} = 0$, $\tau_{xz} = 0$. Из равенств (1.11) и (1.22) при этом следует $M_x = 0$, $M_{xy} = 0$, $Q_x = 0$. После некоторых преобразований [1] эти три условия можно записать через функции φ и ψ, т.е.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-(1-\nu)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{D}{C}(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Delta\varphi\right]=0$$

$$\frac{D}{C}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$$

При $C \to \infty$ и $\psi = 0$ третье условие исчезает, а первые два соответствуют условиям теории Кирхгофа $M_x = 0$ и $K_x = 0$. Заметим, что последнее условие получено без привлечения вариационного метода, который был использован Кирхгофом и без приведения крутящего момента к силе, проведенного Томсоном и Тэтом.

Для свободно опертого края рассматриваемая теория дает два варианта граничных условий.

Канонический вариант, допускающий точное решение в тригонометрических рядах, соответствует шарнирной опоре и может быть записан в виде

$$w=0,\ \ \theta_y=0,\ \ M_x=0 \tag{3.1}$$

После некоторых преобразований [1] получим для края $x = \mathrm{const}$

$$\varphi=0,\quad \partial^2\varphi/\partial x^2=0,\quad \partial\psi/\partial x=0 \tag{3.2}$$

и для края $y = \mathrm{const}$:

$$\varphi=0,\quad \partial^2\varphi/\partial y^2=0,\quad \partial\psi/\partial y=0 \tag{3.3}$$

Как известно [23], уравнение (2.12) для функции ψ с однородными граничными условиями (3.2) и (3.3) для этой функции имеет лишь тривиальное решение. Таким образом $\psi\equiv 0$ и изгиб шарнирно опертой пластины описывается уравнением (2.7).

Второй вариант граничных условий соответствует пластине, лежащей на опорном контуре. В этом случае на краю $x = \mathrm{const}$:

$$w=0,\ \ M_{xy}=0,\ \ M_x=0 \tag{3.4}$$

Такая форма свободного опирания уже не допускает точного решения в тригонометрических рядах и была исследована Кроммом [24].

В заключение заметим, что приведенные выше уравнения и граничные условия могут быть получены как условия стационарности следующего функционала Лагранжа

$$U=\iint\left[\frac{1}{2}(M_xr_x+M_yr_y+M_{xy}r_{xy}+Q_xs_x+Q_ys_y)-pw\right]dxdy$$

4. Асимптотический анализ. Особенностью полученных выше уравнений является то, что для тонкой пластины они содержат малый параметр h/a, где h – толщина пластины, а a – ее характерный размер в плане. Для того, чтобы ввести этот параметр в явном виде, перейдем к безразмерным координатам $\bar{x} = x/a$, $\bar{y} = y/a$. Тогда уравнения

(2.7), (2.9) и (2.12) принимают следующую форму

$$\Delta\Delta\varphi = \frac{12pa}{\bar{E}}\left(\frac{a}{h}\right)^3 \tag{4.1}$$

$$w = \varphi - \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{1}{6(1-\nu)}\Delta\varphi \tag{4.2}$$

$$\Delta\psi = 12\left(\frac{a}{h}\right)^2 \psi \tag{4.3}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа в координатах $\bar{x}, \bar{y}$. Из уравнения (4.1) следует, что функция φ имеет асимптотический порядок $(a/h)^3$. Поскольку параметр a/h не входит в левую часть уравнения (4.1) и, следовательно, корни соответствующего характеристического уравнения от него не зависят, порядок производных функции φ будет также $(a/h)^3$. Это означает, что функция φ сравнительно медленно изменяется по координатам. Второй член в правой части равенства (4.2) содержит $(h/a)^2$, т.е. мал по сравнению с первым. Следовательно, прогиб w имеет такие же свойства, что и функция φ. Уравнение (4.3) показывает, что функция ψ возрастает при дифференцировании пропорционально большому параметру a/h. Это означает, что она быстро изменяется по координатам, т.е. решение уравнения (4.3) имеет характер краевого эффекта. Асимптотический порядок функции ψ зависит от порядка функции φ и от типа связывающих эти функции граничных условий. Анализ имеющихся точных решений позволяет заключить следующее.

Для тонких изотропных пластин, нагруженных давлением и закрепленных по контуру, в уравнениях (4.1), (4.2), (4.3) можно принять $w = \varphi$ и $\psi = 0$ (что соответствует $C \to \infty$). Следует однако подчеркнуть, что несмотря на формальное совпадение получаемых в результате такого упрощения уравнений с уравнениями теории Кирхгофа, имеется принципиальное отличие от нее, связанное с отсутствием как обобщенного поперечного усилия K (1.20), так и угловых сил, имеющих место в современном варианте теории Кирхгофа.

Для иллюстрации рассмотрим самую распространенную задачу теории пластин – изгиб прямоугольной шарнирно опертой пластины, нагруженной равномерным давлением p. Граничные условия (3.2), (3.3) удовлетворяются, если искать решение в виде

$$\varphi = \sum_m \sum_n \varphi_{mn} \sin(\lambda_m x)\sin(\lambda_n y) \tag{4.4}$$

$$\psi = \sum_m \sum_n \psi_{mn} \cos(\lambda_m x)\cos(\lambda_n y) \tag{4.5}$$

где $\lambda_m = \pi m/a$, $\lambda_n = \pi n/b$, a и b – длина и ширина пластины. Подставляя ряд (4.5) в уравнение (2.12), получим $\psi_{mn} = 0$. Подставляя ряд (4.4) в уравнение (2.7) и разлагая давление в аналогичный ряд, найдем φ_{mn} и далее с помощью равенства (2.9) определим прогиб пластины, т.е.

$$w = \frac{16p}{\pi^6 D}\sum_m \sum_n \frac{1+(D/C)(\lambda_m^2+\lambda_n^2)}{(\lambda_m^2+\lambda_n^2)^2}\sin(\lambda_m x)\sin(\lambda_n y)$$

Для тонкой пластины второй член в числителе мал и прогиб практически совпадает с решением, следующим из теории Кирхгофа. Однако если в обсуждаемой теории равнодействующая давления $F = pab$ уравновешивается контурными усилиями Q_x и Q_y и решение на этом заканчивается, то в теории Кирхгофа в качестве реакций выступают обобщенные усилия K_x и K_y, равнодействующая которых больше F. Для сохранения равновесия пластины как твердого тела вводятся угловые силы, которых в действительности нет. Заметим, что обоснование наличия этих сил с помощью решения Кромма, приведенное в [14], неправомерно, так как решение Кромма [24] относится к граничным условиям типа (3.4), а рассматриваемая задача имеет граничные условия типа (3.1). Таким образом, самая распространенная задача теории пластин имеет в рамках обсуждаемой теории более простое и правильное решение, чем решение, следующее из теории, которую принято называть классической.

Для пластин, нагруженных по краям, игнорировать уравнение краевого эффекта (4.3) в общем случае не рекомендуется. Например, в задаче о кручении длинной пластины моментами, приложенными к коротким сторонам, напряженное состояние пластины определяется уравнением (4.3) [1]. И наконец, особое место занимают задачи, в которых решение уравнения (4.1) вырождается, т.е. когда асимптотический порядок функции φ оказывается меньшим, чем $(a/h)^3$. В таких задачах неучет уравнения (4.3) может привести к физически некорректному результату [2, 5, 6].

Быстрая изменяемость решений уравнения (4.3) или исходного уравнения (2.12) позволяют записать приближенное асимптотическое уравнение, принципиально упрощающее задачу определения функции ψ. Рассматривая для определенности край пластины $x = 0$ и следуя Рейсснеру [25], предположим, что решение уравнения (2.12) изменяется быстро только при удалении от края, а вдоль края оно изменяется медленно. Тогда второй производной функции ψ по y можно пренебречь по сравнению с производной по x и представить уравнение (2.12) в следующей приближенной форме: $\partial^2\psi / \partial x^2 - k^2\psi = 0$.

Решение этого уравнения, затухающее при удалении от края $x = 0$, имеет вид

$$\psi = f(y)e^{-kx} \tag{4.6}$$

Аналогичное решение можно записать для каждого края пластины. В результате, задача сводится к уравнению четвертого порядка (2.7), решение которого позволяет удовлетворить два граничных условия. Третье условие удовлетворяется с помощью функции интегрирования f, входящей в решение (4.6).

5. Заключение. Подведем некоторые итоги. Признание несостоятельности преобразования Томсона и Тэта (имеется ввиду преобразование крутящего момента к силе, неправомерность которого выявилась в процессе дискуссии по теории пластин [1–9]) ставит теорию пластин, считающуюся в настоящее время классической, в трудное положение. Приходится признать, что как физическая теория она возвращается к состоянию, в котором находилась в середине прошлого века – как известно, теория Кирхгофа получила всеобщее признание и стала классической теорией пластин только после того, как "Кельвин и Тэт сделали невозможными какие-либо дальнейшие сомнения по поводу теории" [26] (интересно отметить, что этой фразы, напечатанной в 1927 г., нет в первом издании книги Лява, вышедшем в 1883 г.). Естественно, в настоящее время существуют математические методы, позволяющие формально корректно построить теорию Кирхгофа, т.е. получить бигармоническое уравнение с двумя граничными условиями и замаскировать то обстоятельство, что одно из них не имеет физического смысла. Однако для физической и тем более для инженерной теории, которой является теория пластин, достижение математической корректности за счет утраты физического смысла недопустимо. Кроме того, отсутствие физического смысла контурной реакции, за которую, согласно преобразованию Томсона – Тэта, традиционно принималось уже несуществующее обобщенное поперечное усилие, не позволяет рассматривать без привлечения вариационных методов задачи о взаимодействии пластин с другими конструктивными элементами.

Изложенное вынуждает заключить, что теория Кирхгофа не может более претендовать на роль классической теории пластин. Такой теорией предлагается признать теорию, приводящую к уравнениям шестого порядка (естественно, не обязательно построенную так, как это предлагается выше). Основы этой теории были объективно заложены в работах Рейсснера и Генки, однако субъективной целью этих авторов являлось уточнение теории Кирхгофа путем учета деформации поперечного сдвига.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В.В.* О теории тонких пластин // Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 26–47.
2. *Жилин П.А.* О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин // Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 48–64.
3. *Алфутов Н.А.* О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин // Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 65–72.
4. *Даревский В.М.* О статических граничных условиях в классической теории оболочек и пластин // Изв. АН. МТТ. 1995. № 4. С. 130–133.
5. *Жилин П.А.* О классической теории пластин и преобразовании Кельвина – Тэта // Изв. АН. МТТ. 1995. № 4. С. 134–140.
6. *Васильев В.В.* К дискуссии по классической теории пластин // Изв. АН. МТТ. 1995. № 4. С. 140–150.
7. *Гольденвейзер А.Л.* О приближенных методах расчета тонких упругих оболочек и пластин // Изв. АН. МТТ. 1997. № 3. С. 134–149.
8. *Васильев В.В.* Об асимптотическом методе обоснования теории пластин // Изв. АН. МТТ. 1997. № 3. С. 150–155.
9. *Гольденвейзер А.Л.* Замечания о статье В.В. Васильева "Об асимптотическом методе обоснования теории пластин" // Изв. АН. МТТ. 1997. № 4. С. 150–158.
10. *Kirchhoff G.* Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe // J. Reine Angew. Math. 1850. Bd. 40. S. 51–58.
11. *Reissner E.* On the theory of bending of elastic plates // J. Math. and Phys. 1944. V. 23. No 4. P. 184–191.
12. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // Trans. ASME. 1945. V. 67. P. A69–A77.
13. *Hencky H.* Über die Berücksichugung der Schubverzerrung in ebenen Platten // Ing. Arch. 1947. Bd. 16. H 1. S. 72–76.
14. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
15. *Todhunter I., Pearson K.* History of the Theory of Elasicity and of the Strength of Materials. N.-Y.: Dover, 1960. V. 2. Pt. 1. 762 p.; Pt. 2. 546 p.
16. *Timoshenko S.P.* History of Strength of Materials. N.-Y.: Dover, 1983. 452 p.
17. *Reissner E.* Reflections on the theory of elastic plates // Appl. Mech. Revs. 1985. V. 38. No 11. P. 1453–1464.
18. *Jemielita G.* On the winding paths of the theory of plates // Mechanika Teoretyczna i Stosowana. 1993. V. 2. No 31. P. 317–327.
19. *Thomson W., Tait P.* Treatise on Natural Philosophy. P. 2. Cambridge: Univ. Press, 1883. 592 p.
20. *Кирхгоф Г.* Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.
21. *Levy M.* Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes // J. Math. Pures Appl. V. 30. P. 219–306.
22. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
23. *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1964. 559 с.
24. *Kromm A.* Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik // Ing. Arch. 1993. Bd. 21. H. 4. S. 266–286.
25. *Reissner E.* On the theory of transverse bending of elastic plates // Intern. J. Solids Struct. 1976. V. 12. No 8. P. 545–554.
26. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М., Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 674 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.I.1998