

УДК 539.3

© 1998 г. В.В. ВОРОБЕЙ, Н.Г. МОРОЗ, М.С. РЕЗАЕВ

ТРАНСФОРМАЦИЯ СЕТЕВЫХ ОБОЛОЧЕК В ИЗДЕЛИЯ СЛОЖНЫХ ФОРМ

В настоящее время известны отдельные технологические приемы изготовления оболочечных конструкций сложных форм из волокнистых композиционных материалов, базирующиеся на трансформации технологически реализуемых известными способами заготовок. Возможность получения конкретного изделия методом трансформации связана с существованием подходящей заготовки и ее непрерывного преобразования как поверхности с сетью армирующего материала в поверхность и некоторую наперед заданную сеть изделия. При существовании указанного геометрического преобразования трансформация заготовки может быть реализована нагрузками, определяемыми из уравнений равновесия промежуточных состояний заготовки. Основными задачами, возникающими при реализации названного приема, изготовления изделий сложных форм являются:

по форме изделия и структуре его материала указать подходящую заготовку и отображение ее поверхности, технологически реализуемой известными способами укладки армирующих нитей, на поверхность изделия;

описать совокупность возможных преобразований указанной заготовки в изделие и определить преобразование, осуществляемое с наименьшими технологическими затратами;

указать вид и процесс приложения нагрузок, переводящих сетевую заготовку в изделие конечных форм.

В настоящей работе ограничимся рассмотрением задачи выбора заготовок по известным формам изделия, которая может быть решена методами геометрии, т.е. с использованием преобразований поверхностей типа изгибаний, бесконечно малых деформаций, конформных, аффинных и другого рода преобразований.

1. Представим заготовку с поверхностью Σ_0 в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2)$, а ее отображение $\Sigma_t (t > 0) - \mathbf{R} = \mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2, t)$. Предполагая, что отображение Σ_t является аналитической функцией t в окрестности начального значения $t = 0$ в первом приближении Σ_t представим в виде

$$\mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2, t) = \mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2) + t\mathbf{v}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mathbf{v} = \partial \mathbf{R} / \partial t \quad (1.1)$$

где α_1 – система координат, связанная с поверхностью Σ_0 , $\mathbf{v}$ – векторное поле скоростей перемещений, заданное вдоль поверхности Σ_0 и которое представляется соотношением

$$\mathbf{v} = a^i \mathbf{r}_i + b \mathbf{n} \quad (1.2)$$

Здесь $(\mathbf{r}_i, \mathbf{n})$ – локальный базис координатной системы, $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности Σ_0 , $a^i(\alpha_1, \alpha_2)$, $b(\alpha_1, \alpha_2)$ – некоторые функции класса C^1 . Изменение внутренних свойств Σ_0 в процессе деформации оболочки-заготовки определим тензором скоростей деформации $\mathbf{a} = (a_{ij})$ из соотношения

$$G_{ij} = g_{ij} + 2ta_{ij}, \quad a_{ij} = \frac{1}{2} \{ (\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_j) + (\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_i) \} \quad (1.3)$$

где G_{ij}, g_{ij} – компоненты метрического тензора поверхностей Σ_t и Σ_0 соответственно. Из (1.3) следует, что бесконечно малая деформация поверхности Σ_0 является ее изгибанием тогда и только тогда, когда тензор деформации $\mathbf{a}$ равен нулю.

Деформацию линейного элемента поверхности Σ_0 в точке $(\alpha_i)\Sigma_0$ определим в виде

$$\frac{dS_t^2}{ds^2} = \frac{G_{ij}\partial\alpha^i\partial\alpha^j}{g_{ij}\partial\alpha^i\partial\alpha^j} = 1 + 2\lambda \quad (1.4)$$

$$\lambda = a_{ij} \frac{\partial\alpha^i\partial\alpha^j}{\partial s \partial s} = a_{ij} \tau^i \tau^j$$

где τ^i – компоненты единичного вектора τ направления (α^1, α^2) .

Представление о характере деформаций метрики поверхности Σ_0 в окрестности точки (α^i) дает индикатриса тензора деформаций, расположенная в касательной плоскости данной точки и описываемая в декартовом базисе уравнением $a_{ij}x^ix^j = \pm 1$. При этом радиус вектор ее точек $\mathbf{x} = x^i\mathbf{r}_i$ в направлении орта τ имеет длину

$$|\mathbf{x}| = 1 / \sqrt{a_{ij}\tau^i\tau^j} = 1 / \sqrt{\lambda}$$

Направления, для которых $\lambda = 0$ и $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ назовем асимптотическими направлениями в данной точке поверхности Σ_0 . Экстремальные значения функции λ при этом определяются из характеристического уравнения

$$\det(a_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0 \text{ или } \lambda^2 - 2A\lambda + B = 0 \quad (1.5)$$

$$2A = g^{ij}a_{ij}, \quad B = d/q, \quad d = \det(a_{ij}), \quad g = \det(g_{ij})$$

В силу симметрии тензора $\mathbf{a}$ корни характеристического уравнения λ_1, λ_2 всегда вещественны и являются главными значениями деформации, причем $\lambda_1 + \lambda_2 = 2A$, $\lambda_1\lambda_2 = B$.

В зависимости от типа тензора $\mathbf{a}$ в рассматриваемой точке возможны следующие случаи деформации поверхности:

1. $\det(a_{ij}) > 0$, а квадратичная форма $a_{ij}x^ix^j$ положительно определена, то во всех направлениях $\lambda > 0$ и происходит расширение поверхности. Асимптотических направлений нет;

2. $\det(a_{ij}) > 0$, а форма $a_{ij}x^ix^j$ отрицательно определена, то во всех направлениях происходит сжатие поверхности, асимптотических направлений также нет;

3. $\det(a_{ij}) < 0$, форма $a_{ij}x^ix^j$ знаконеопределена. В рассматриваемой точке существуют два различных направления ($\lambda = 0$), которые разделяют направления деформации растяжения и сжатия. Тип деформации гиперболический;

4. $\det(a_{ij}) = 0$, но не все $a_{ij} = 0$. Имеется одно асимптотическое направление, в котором $dS_t = ds$;

5. $a_{ij} = 0, \lambda = 0$ – тип деформации – изгибание поверхности ($G_{ij} = g_{ij}$).

Для поставленной задачи выбора оптимальной заготовки по известной форме изделия наибольший интерес представляют деформации поверхности Σ_0 по случаям 3 и 5.

Более подробно рассмотрим деформирование поверхности по случаю 3. Определим на Σ_0 такие линии, которые в каждой своей точке имеют асимптотические направления деформаций. При гиперболическом типе деформаций таких направлений два, которые образуют некоторую сеть. Накладывая на эти направления специальные ограничения (например, задавая геодезическую сеть) и выбирая эту сеть за координатную, задача трансформации поверхности Σ_0 сводится к определению функций a^i, b , при наложенных на них ограничениях. В силу (1.3) для вновь

выбранной координатной сети будем иметь $a_{11}^1 = a_{22}^1 = 0$ и поэтому матрица тензора деформации существенно упрощается

$$a_{ij}^1 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12}^1 \\ a_{12}^1 & 0 \end{vmatrix} \quad (1.6)$$

При этом целесообразно перейти к новой системе координат (u_1, u_2) . Преимущество перехода к новым координатам состоит в том, что длины координатных линий при деформации поверхности не изменяются. Обозначая через G^1 матрицу метрического тензора в координатах (u_1, u_2) и используя теперь соотношения (1.4) получаем систему дифференциальных уравнений для определения функций a^i, b, c дополнительными ограничениями на их вид.

Таким образом, имея решение рассмотренной задачи или рассматривая вариант деформации поверхности в виде ее изгибания, можно однозначно ответить на вопрос: существует ли для данного типа изделия некоторая форма заготовки с заданной сетью нитей, которая путем трансформации может быть переведена в форму изделия соответствующим образом подобранным набором нагрузок.

2. Рассмотрим реализацию предлагаемого подхода на примере трансформации поверхности Σ_0 , являющейся поверхностью вращения

$$\mathbf{r}(z, \varphi) = \rho(z)\mathbf{e}(\varphi) + z\mathbf{k}, \quad \rho(z) > 0 \quad (2.1)$$

В принятых выше обозначениях имеем $u^1 = z, u^2 = \varphi$. Компоненты метрических тензоров поверхности вращения примут вид

$$(g_{ij}) = \begin{vmatrix} \dot{\rho}^2 + 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{vmatrix}, \quad (h_{ij}) = \begin{vmatrix} \ddot{\rho}/\Omega & 0 \\ 0 & \rho/\Omega \end{vmatrix}$$

Единичный нормальный вектор поверхности определяется выражением

$$\mathbf{n} = (\dot{\rho}\mathbf{k} - \mathbf{e}(\varphi))/\Omega, \quad \Omega = \sqrt{\dot{\rho}^2 + 1}, \quad \dot{\rho} = \partial\rho/\partial z$$

Используя (1.4), компоненты тензора деформации $\mathbf{a}$ поверхности определим из соотношений

$$\begin{aligned} a_{11} &= \Omega^2 \partial_1 a^1 + \dot{\rho} \ddot{a}^1 + \ddot{\rho} b / \Omega \\ a_{12} &= 1/2 \Omega^2 \partial_2 a^1 + \rho^2 \partial_1 a^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$a_{22} = \rho^2 \partial_2 a^2 + \rho \dot{\rho} a - \rho / \Omega$$

$$\partial_1 = \partial / \partial u^1, \quad \partial_2 = \partial / \partial u^2,$$

где a^1, a^2 – компоненты вектора $\mathbf{a}$ в соотношении (1.2).

Деформация в точке (z, φ) в направлении с угловым коэффициентом $\dot{\varphi} = d\varphi/dz$ согласно (1.5) будет равна

$$\begin{aligned} \lambda &= 1/(\rho^2 \dot{\varphi}^2 + \Omega^2) \{ (\rho \partial_1 a^2 + \dot{\rho} a^1 - b/\Omega) \dot{\rho} \varphi^2 + (\Omega^2 \partial_2 a^1 + \\ &+ \rho^2 \partial_1 a^2) \dot{\varphi} + \Omega^2 \partial_1 a + \dot{\rho} \ddot{a}^1 + \ddot{\rho} b / \Omega \} \end{aligned} \quad (2.3)$$

В случае нормальной деформации приведенные соотношения существенно упрощаются, а именно

$$(a_{ij}) = b/\Omega \begin{vmatrix} \ddot{\rho} & 0 \\ 0 & -\dot{\rho} \end{vmatrix}$$

$$\lambda = b(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) / \left\{ \Omega \sqrt{\rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{\rho}^2 + 1} \right\}$$

Для описания возможных типов нормальной деформации поверхности от типа точек поверхности получаем

$$\det(a_{ij}) = -\rho \ddot{\rho} b^2 / \Omega^2 \quad (2.4)$$

Отметим, что Гауссова кривизна поверхности вращения Σ_0 равна [1]

$$K = -\ddot{\rho} / \rho \Omega^2$$

Рассматривая (2.4) видно, что знак $\det(a_{ij})$ всегда совпадает со знаком Гауссовой кривизны поверхности. Учитывая это и принимая во внимание различные формы деформации поверхности, получаем:

1) эллиптический тип нормальной деформации поверхности вращения имеет место в области эллиптических точек поверхности, когда $K > 0$. При этом при $b < 0$ происходит растяжение поверхности, при $b > 0$ сжатие;

2) гиперболический тип нормальной деформации поверхности вращения имеет место в области гиперболических (седлообразных) точек поверхности, когда $K < 0$. При этом асимптотические направления деформации ($\lambda = 0$) соответствуют значениям $\dot{\phi} = \pm \sqrt{\ddot{\rho} / \rho}$;

3) параболический тип нормальной деформации имеет место в тех точках, в которых $K = 0$, или $\ddot{\rho} = 0$. Этими точками являются точки перегиба меридианов;

4) тензор деформаций равен нулю лишь в тривиальном случае, когда $b = 0$ и, следовательно, $v = 0$.

Пусть на поверхности вращения (2.1) задана сеть вращения описываемая уравнениями

$$\varphi = \varphi(z) + c_1, \quad \psi = -\varphi(z) + c_2 \quad (2.5)$$

где $c_1, c_2 = \text{const}$, $0 \leq c_i \leq 2\pi$. Предполагается, что при деформации поверхности линии сети не изменяют своей длины, т.е. с точностью до малых более высокого порядка $dS_i = ds_0$. Отметим, что в соответствии с предыдущими результатами указанный тип деформации должен быть гиперболическим ($\det(a_{ij}) = 0$) или быть изгибанием.

Рассмотрим задачу следующего содержания: найти векторное поле скоростей перемещений $v(z, \varphi)$, удовлетворяющее условию $\det(a_{ij}) \leq 0$.

Будем рассматривать два способа решения указанной задачи.

Первый способ. Если на поверхности вращения с сетью (2.5) задана некоторая функция $F(z, \varphi)$, то рассматривая ее поведение вдоль линий первого семейства, будем полагать $F(z, c_1) = F(z, \varphi(z) + c_1)$ и аналогично, вдоль линий второго семейства $F(z, c_2) = -F(z, \varphi(z) + c_2)$. Рассматривая первое семейство из условия задачи имеем, что вдоль этих линий должно выполняться условие $\lambda = 0$, т.е. в силу (2.3) получаем

$$(\rho \partial_2 a^2 + \rho a^1 - b/\Omega) \rho \dot{\phi}^2(z) + (\Omega^2 \partial_2 a^1 + \rho^2 \partial_1 a^2) \dot{\phi}(z) + \Omega^2 \partial_1 a^1 + \rho \ddot{\rho} a^1 + \ddot{\rho} b/\Omega = 0$$

Отсюда, учитывая, что полная производная по z функции $v(z, c_1) = v(z, \varphi(z) + c_1)$ равна $dv/dz = \partial_1 v + \rho \dot{\varphi} v$, получаем следующее уравнение для координат векторного поля $\mathbf{v}$:

$$\Omega^2 \partial_1 a^1 + \rho^2 \dot{\varphi} \partial_1 a^2 + \dot{\rho}(\ddot{\rho} + \rho \dot{\varphi}^2) a^1 + (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) b / \Omega = 0 \quad (2.6)$$

Аналогично, рассматривая вдоль линий второго семейства векторное поле $\mathbf{v}(z, c_2) = \mathbf{v}(z, -\varphi(z) + c_2)$ и полагая $\lambda = 0$ и одновременно учитывая, что $d\bar{v}/dz = \partial_1 \bar{v} - \dot{\varphi} \partial_1 \bar{v}$ получаем

$$\Omega^2 \partial_1 \bar{a}^1 - \rho^2 \dot{\varphi} \partial_1 \bar{a}^2 + \dot{\rho}(\ddot{\rho} + \rho \dot{\varphi}^2) \bar{a}^1 + (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \bar{b} / \Omega = 0 \quad (2.7)$$

Если $\mathbf{v}(z, c_1)$ – какое либо решение уравнения (2.6), то полагая $c_1 = \varphi - \varphi(z)$, получим $\mathbf{v}(z, \varphi - \varphi(z)) = \mathbf{v}(z, \varphi)$ искомое решение задачи, определяющее допустимую деформацию (1.1):

$$\mathbf{R}(z, \varphi, t) = \mathbf{r}(z, \varphi) + t \mathbf{v}(z, \varphi)$$

Аналогично, всякое решение $\mathbf{v}(z, c_2)$ уравнения (2.7) после подстановки $c_2 = \varphi + \varphi(z)$ дает тоже самое векторное поле, так как

$$\mathbf{v}(z, \varphi + \varphi(z)) = \mathbf{v}(z, \varphi)$$

В связи с данными замечаниями в дальнейшем ограничимся рассмотрением только одного решения.

Таким образом отмечаем, что отыскание бесконечно малых деформаций поверхности вращения с заданной на ней сетью вращения (2.5) произвольного вида сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения с тремя неизвестными функциями a^1, a^2, b от z и параметра c_1 .

Для интегрирования уравнения (2.6) зададим компоненты a^2 и b как произвольные функции от z . Тогда (2.6) сводится к линейному неоднородному уравнению вида

$$da^1/dz + f(z)a^1 = q(z)$$

которое имеет решение вида

$$a^1(z, c) = 1/\mu(z) \left\{ \int q(z)\mu(z)dz + c_1 \right\} \quad (2.8)$$

с интегрирующим множителем $\mu(z) = \exp \left\{ \int f(z)dz \right\}$.

В рассматриваемом случае

$$f(z) = \dot{\rho}(\ddot{\rho} + \rho \dot{\varphi}^2) / \Omega^2$$

$$q(z) = (\rho \dot{\varphi} - \ddot{\rho})b(z) / \Omega^3 - \rho^2 \dot{\varphi} d_z a^2 / \Omega^2$$

Таким образом всякая бесконечно малая деформация поверхности вращения с заданной сетью вращения определяется векторным полем (1.2), координаты которого вдоль линий сети первого семейства есть (a^1, a^2, b) , где функции $a^1(z, c_1)$ имеют вид (2.8), и $a^2(z), b(z)$ задаются произвольно.

Второй способ. Так как линии сети вращения образуют правильную сеть, то ее можно принять за координатную. Переход к новым координатам $(z, \varphi) - (x, y)$ имеет вид

$$x = \varphi - \varphi(z), \quad y = \varphi + \varphi(z)$$

с матрицей преобразования

$$J = \begin{vmatrix} -\dot{\phi} & 1 \\ \phi & 1 \end{vmatrix}$$

Преимущество рассмотрения координат (x, y) состоит в том, что условие сохранения длины первого семейства координатных линий при деформации имеет простой вид $a_{11} = 0$. Это вытекает из тех соображений, что направление координатных линий $y = \text{const} = c_2$ имеет координаты $(dx, 0)$ и является асимптотическим направлением для тензора (a_{ij}) (см. (1.5)). Аналогично, направление линий $x = c_1$ является вторым направлением для этого тензора и поэтому $a_{22} = 0$. Таким образом, при условии сохранения длин линий сети $a_{11} = 0, a_{22} = 0$ остается определить в координатах (x, y) компоненты метрического тензора и по формулам (2.2) компоненты тензора деформации.

Обозначим через $G = (g_{ij})$ матрицу метрического тензора в координатах (z, ϕ) . При переходе к координатам (x, y) она преобразуется по формуле $\bar{G} = (J^{-1})^T C J^{-1}$. Учитывая, что

$$J^{-1} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1/\dot{\phi} & 1/\phi \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

получим

$$(\bar{g}_{ij}) = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \rho^2 + \Omega^2 / \dot{\phi}^2 & \rho^2 - \Omega^2 / \dot{\phi}^2 \\ \rho^2 - \Omega^2 / \dot{\phi}^2 & \rho^2 + \Omega^2 / \dot{\phi}^2 \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

Аналогично преобразуется и матрица второго фундаментального тензора поверхности

$$(\bar{h}_{ij}) = 1/4\Omega \begin{vmatrix} \rho - \dot{\rho} / \dot{\phi}^2 & \rho + \dot{\rho} / \dot{\phi}^2 \\ \rho + \dot{\rho} / \dot{\phi}^2 & \rho - \dot{\rho} / \dot{\phi}^2 \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

Используя теперь условия $\bar{a}_{11} = 0, \bar{a}_{22} = 0$ или, что эквивалентно $\bar{a}_{11} - \bar{a}_{22} = 0, \bar{a}_{11} + \bar{a}_{22} = 0$, получаем

$$q_{11}(\partial_1 a^1 - \partial_2 a^2) + q_{12}(\partial_1 a^2 - \partial_2 a^1) = 0$$

$$q_{11}(\partial_1 a^1 + \partial_2 a^2) + q_{12}(\partial_1 a^2 + \partial_2 a^1) + (a^1 - a^2)\partial_1 q_{11} - 2bh_{11} = 0$$

С учетом (2.9) и (2.10) из данных соотношений получаем систему двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{aligned} &(\rho^2 \dot{\phi}^2 + \Omega^2)(\partial_x a^1 - \partial_y a^2) + (\rho^2 \dot{\phi}^2 - \Omega^2)(\partial_x a^2 - \partial_y a^1) = 0 \\ &(\rho^2 \dot{\phi}^2 + \Omega^2)(\partial_x a^1 + \partial_y a^2) + (\rho^2 \dot{\phi}^2 - \Omega^2)(\partial_x a^2 + \partial_y a^1) + \\ &+ (a^1 - a^2)(\Omega^2 \dot{\phi} / \dot{\phi}^2 - \rho \dot{\rho} \dot{\phi} - \rho \dot{\rho} / \phi) - 2b(\rho \dot{\phi}^2 - \dot{\rho}) / \Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из приведенных рассуждений следует, что отыскание бесконечно малых деформаций поверхности вращения с заданной сетью вращения сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений (2.11) относительно неизвестных функций $a^i(x, y), b(x, y)$.

В качестве примеров рассмотрим деформацию поверхности вращения с геодезической сетью. Известно [1], что геодезическая кривизна некоторой линии $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$,

отнесенная к произвольному регулярному параметру (τ) на поверхности, определяется зависимостью $k_g = \text{mod}(\mathbf{n}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})/|\dot{\mathbf{r}}|^3$. В частности для поверхности вращения (2.1) с линией $\varphi = \varphi(z)$ получим

$$k_g = A / \Omega(\rho^2 \dot{\varphi}^2 + \Omega^2)^{3/2}$$

$$A = \Omega^2[\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}] + \rho \dot{\rho} \dot{\varphi}[\rho \dot{\varphi}^2 - \ddot{\rho}]$$

В силу теоремы Клеро вдоль геодезических $J(z) = \rho(z) \cos \varphi = \text{const}$.

Используя данные замечания отметим, что геодезическая кривизна линий сети (2.5) на поверхности вращения может быть определена формулой $k_g = |J|/\rho\Omega$, а угловой коэффициент линий сети

$$\dot{\varphi} \pm \Psi \Omega / \rho \sqrt{\rho^2 - \Psi^2}, \quad \Psi = C + \varepsilon F$$

$$C = \text{const}, \quad \varepsilon = \text{sign}(J), \quad F(z) = \int k_g(z) \rho(z) \Omega dz$$

В частности, когда линии сети являются геодезическими (геодезическая сеть вращения), то имеем

$$\dot{\varphi} = \pm C \Omega / \rho \sqrt{\rho^2 - C^2}. \quad (2.12)$$

Полученные зависимости позволяют решать основную задачу в том случае, когда линии сети заданы уравнениями через геодезическую кривизну.

3. Используя приведенные выше зависимости рассмотрим несколько примеров деформаций поверхностей вращения.

Прямой круговой цилиндр. Если R – радиус цилиндра, то его параметрическое уравнение есть $\mathbf{r} = R\mathbf{e}(\varphi) + z\mathbf{k}$ с компонентами

$$\rho(z) = R, \quad \dot{\rho} = 0, \quad \ddot{\rho} = 0$$

$$(g_{ij}) = \begin{Bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad (a_{ij}) = \begin{Bmatrix} R^2 \partial_2 a^1 + R^2 b & 1/2 (R \partial_1 a^1 + \partial_2 a^2) \\ 1/2 (R^2 \partial_1 a^1 + \partial_2 a^2) & \partial a^2 \end{Bmatrix}$$

Деформация λ в направлении $\dot{\varphi}$:

$$\lambda = \left\{ (R^2 \partial_2 a^1 + Rb) \dot{\varphi}^2 + (R^2 \partial_1 a^1 + \partial_2 a^2) \dot{\varphi} + \partial_1 a^2 \right\} / (R^2 \dot{\varphi}^2 + 1)$$

Геодезическими на цилиндре являются винтовые линии, частными случаями которых могут быть окружности ($z = \text{const}$) и образующие ($\varphi = \text{const}$). Из (2.12) получаем

$$\dot{\varphi} \pm C / R \sqrt{R^2 - C^2}, \quad C = R \cos \varphi \leq R$$

Если при деформации линии геодезической сети не меняют длин, то из (2.11) получаем систему дифференциальных уравнений следующего вида

$$C^2 R \partial_2 a^1 + R(R^2 - C^2) \partial_1 a^2 = -C^2 b \quad (3.1)$$

$$R^2 \partial_1 a^1 + \partial_2 a^2 = 0$$

Рассмотрим сначала случай нормальной деформации $a^1 = a^2 = 0$. Тогда $C^2 b = 0$ и т.к. $C \neq 0$, то $b = 0$, т.е. прямой круговой цилиндр не допускает нормальной деформации с сохранением длин дуг геодезической сети вращения.

В общем случае система (3.1) допускает большой произвол решений. Например, вводя добавочные условия $a^1 = a^1(\varphi)$, $b = b(z)$ получаем $a^2 = a^2(z)$:

$$da^2 / dz = -C^2 b(z) / R(R^2 - C^2)$$

и неравенство $(Rda^1/d\varphi + b)b(z) > 0$, которые дают следующее решение:

$$a^2(z) = -C^2 / R(R^2 - C^2) \int b(z) dz + m, \quad m = \text{const}$$

Учитывая, что единичный вектор нормали $\mathbf{n} = \mathbf{e}(\varphi)$, определим вектор скорости перемещений в виде

$$\mathbf{v} = b(z)\mathbf{e}(\varphi) + a^1 \mathbf{q}(\varphi) + \left\{ m - C^2 / R(R^2 - C^2) \int b(z) dz \right\} \mathbf{k}$$

а линеаризованное уравнение деформированной поверхности в виде

$$\mathbf{R} = (R + tb(z))\mathbf{e}(\varphi) + ta^1 \mathbf{q}(\varphi) + \left[z + t \left\{ m - C^2 / R(R^2 - C^2) \int b(z) dz \right\} \right] \mathbf{k}$$

или в координатной форме

$$X = (R + tb(z)) \cos \varphi - ta^1 \sin \varphi$$

$$Y = (R + tb(z)) \sin \varphi + ta^1 \cos \varphi \quad (3.2)$$

$$Z = z + t \left\{ m - C^2 / R(R^2 - C^2) \int b(z) dz \right\}$$

Из уравнений (3.2) получаем $X^2 + Y^2 = (R + tb(z))^2 \approx R^2 + 2tb(z)$, а так как z выражается только через Z , то деформированная поверхность также поверхность вращения. При этом преобразовывая третье уравнение системы (3.2) к виду $tb(z) = R(R^2 - C^2)(1 - dZ/dz)/C^2$ получаем линеаризованное уравнение деформированной поверхности вращения в виде

$$C^2(X^2 + Y^2 - R^2) = 2R(R^2 - C^2)(1 - dZ/dz)$$

Полагая, например, $b(z) = z$ и преобразовывая третье уравнение (3.2) к виду $tZ = tZ$ получаем $X^2 + Y^2 = R^2 + 2tZ$, т.е. деформированная поверхность – параболоид вращения с вершиной в точке $X = 0, Y = 0, Z = -R^2/(2t)$.

Второе частное решение системы (3.1) получим из следующих условий $a^1 = a^1(\varphi)$, $a^2 = a^2(z)$, $b(\varphi)$ – некоторая периодическая функция $b(\varphi) = b(\varphi + 2\pi)$.

Первое уравнение (3.1) принимает вид

$$C^2 R da^1 / d\varphi + R(R^2 - C^2) da^2 / dz = -C^2 b(\varphi) \quad (3.3)$$

откуда следует, что $a^2(z) = lz + m$ – линейная функция z и в силу ее периодичности имеем $a^2 = \text{const}$: $Rda^1/d\varphi = -b(\varphi)$ откуда

$$a^1 = m - 1/R \int b(\varphi) d\varphi, \quad m = \text{const}$$

и вектор скорости деформации равен

$$\mathbf{v} = b(\varphi)\mathbf{e}(\varphi) + (mR - \int b(\varphi) d\varphi) \mathbf{q}(\varphi) + a^2 \mathbf{k}$$

а параметрическое уравнение деформированной поверхности представляется в виде

$$X = (R + tb(\varphi)) \cos \varphi - t(mR - \int b(\varphi) d\varphi) \sin \varphi$$

$$Y = (R + tb(\varphi)) \sin \varphi + t(mR - \int b(\varphi) d\varphi) \cos \varphi$$

$$Z = z + ta^2, \quad a^2 = \text{const}$$

или

$$X^2 + Y^2 = (R + tb(\varphi))^2 = R^2 + 2tRb(\varphi)$$

В качестве второго примера рассмотрим деформацию прямого кругового конуса, описываемого уравнением $\mathbf{r} = z(\operatorname{tg} \theta \mathbf{e}(\varphi) + \mathbf{k})$, $0 < \theta < \pi/2$, где θ — угол между образующими конуса, их направление определяется вектором $\operatorname{tg} \theta \mathbf{e}(\varphi) + \mathbf{k}$, его ось Oz . При этом ограничиваемся рассмотрением только верхней части конуса, считая $z > 0$.

Для такой оболочки имеем

$$\rho(z) = z \operatorname{tg} \theta, \quad \mathbf{r}_2 = \operatorname{tg} \theta \mathbf{e}(\varphi) + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_1 = z \operatorname{tg} \theta \mathbf{q}(\varphi), \quad \mathbf{n} = \cos \theta \mathbf{e}(\varphi) - \sin \theta \mathbf{k}, \quad \dot{\rho} = \operatorname{tg} \theta, \quad \ddot{\rho} = 0$$

$$(q_{ij}) = \begin{vmatrix} z^2 \operatorname{tg}^2 \theta & 0 \\ 0 & z^2 \operatorname{tg}^2 \theta \end{vmatrix}$$

$$\dot{\varphi} = \pm C / \left(z \sin \theta \sqrt{z^2 \operatorname{tg}^2 \theta - C^2} \right)$$

Интегрируя последнее выражение и разрешая относительно z , получим

$$z = C \operatorname{ctg} \theta / \cos((\varphi - q) \sin \theta)$$

При $C > 0$ эта функция достигает минимального значения при $\varphi_0 = q$. Симметричная ее геодезическая другого семейства получается заменой C на $-C$ и достигает того же минимального значения z_0 , если $(\varphi - q) \sin \theta = \pi$. Таким образом оба семейства геодезической сети вращения (г.с.в.) можно определить уравнением $z = \pm z_0 / \cos((\varphi - q) \sin \theta)$. Система (2.11) при этом приобретает вид

$$\begin{aligned} C^2(z \partial_2 a^1 + a^2 + b \cos^2 \theta / \sin \theta) + z(z^2 \operatorname{tg}^2 \theta - C^2) \partial_1 a^2 &= 0 \\ z^2 \sin^2 \theta \partial_1 a^1 + \partial_2 a^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

При рассмотрении случая нормальной деформации $a^1 = 0$ получаем $bC^2 \cos^2 \theta / \sin \theta = 0$ или $b = 0$, так как $c \neq 0$ откуда следует, что круговой конус не допускает нормальных деформаций с сохранением длин дуг геодезической сети вращения.

Полагая $a^1 = a^1(\varphi)$, будем иметь $a = a(z)$ и $b = b(z)$ первое уравнение (3.4) примет вид

$$C^2(a^2(z) + b(z) \cos \theta / \sin \theta) + z(z^2 \operatorname{tg} \theta - C^2) da^2 / dz = 0$$

решением которого будет функция

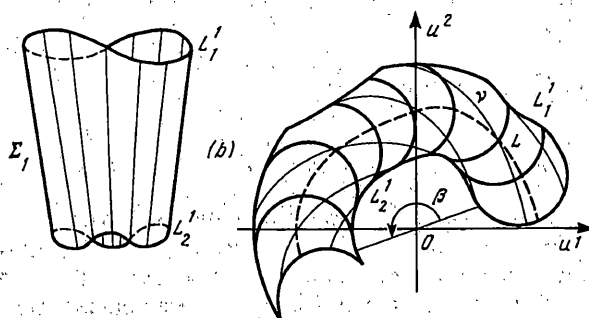
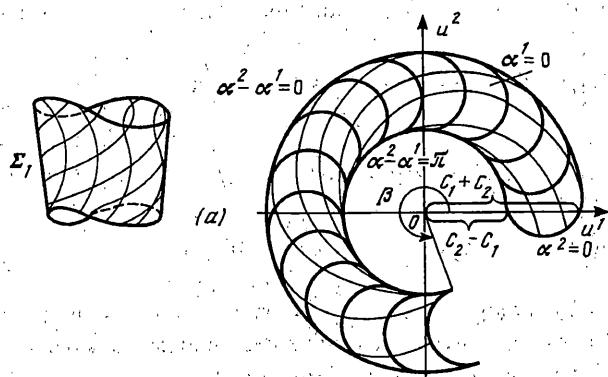
$$a^2(z) = -zz_0^2 \cos^2 \theta / \sin \theta \sqrt{z^2 - z_0^2} \left\{ \int b(z) / z^2 \sqrt{z^2 - z_0^2} dz + m \right\}$$

Полагая, что $b(z) = z$ получаем следующее частное решение системы (3.4):

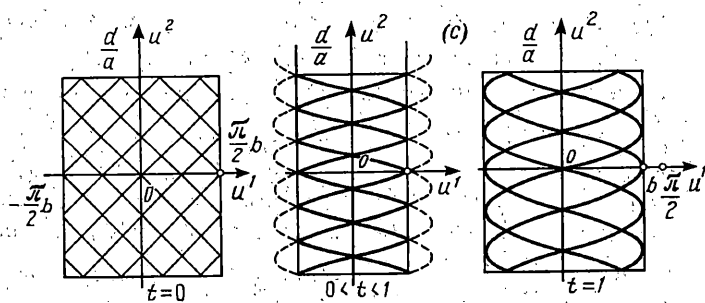
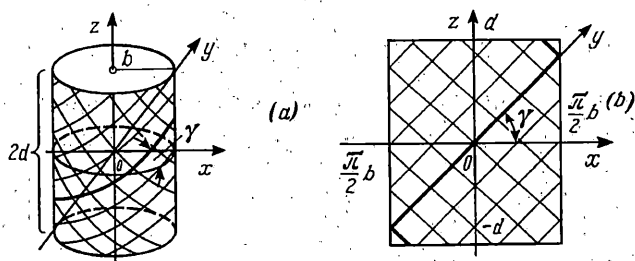
$$a^1 = \text{const}$$

$$a^2 = -zz_0^2 \cos^2 \theta (m + \arccos z_0 / z) / \sin \theta \sqrt{z^2 - z_0^2}$$

$$b = z$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Параметрическое уравнение деформированной поверхности будет иметь вид

$$X = z \operatorname{tg} \theta \cos \varphi + tz \left\{ \left[\cos \theta - z_0^2 \cos \theta (m + \arccos z_0 / z) / \sqrt{z^2 - z_0^2} \right] \cos \varphi - a^1 \operatorname{tg} \theta \sin \varphi \right\}$$

$$Y = z \operatorname{tg} \theta \sin \varphi + tz \left\{ \left[\cos \theta - z_0^2 \cos \theta (m + \arccos z_0 / z) / \sqrt{z^2 - z_0^2} \right] \sin \varphi + a^1 \operatorname{tg} \theta \cos \varphi \right\}$$

$$Z = z - tz \left[z_0^2 \cos \theta (m + \arccos z_0 / z) / \sqrt{z^2 - z_0^2} \right] + \sin \theta$$

4. При рассмотрении деформации поверхности в виде изгиба (случай 5) выбираем заданную на ней сеть в качестве координатной с параметрами α_1, α_2 . В этом случае заготовка ищется в виде поверхности вращения (2.1).

В силу нерастяжимости направлений армирования имеем $G_{ii} = g_{ii}$ и если сеть на поверхности геодезическая, то $\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$, что в конечном итоге приводит к системе уравнений вида

$$\begin{aligned} (\partial z / \partial \alpha^i)^2 + (\partial r / \partial \alpha^i)^2 + r^2 (\partial / \partial \alpha^i)^2 &= G_{ii} \\ \partial r / \partial \alpha^1 \partial r / \partial \alpha^2 + \partial z / \partial \alpha^1 \partial z / \partial \alpha^2 + r^2 \partial \theta / \partial \alpha^1 \partial \theta / \partial \alpha^2 &= G_{12} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Каждое решение данной системы определяет форму заготовки с геодезической сетью на ней. В некоторых случаях система сводится к более простому виду и интегрируется. Рассмотрим класс изделий – оболочек с сетью, образованной вращением вокруг оси двух кривых, симметричных относительно меридиана. В данном случае

$$\mathbf{R}_n = r_n (\alpha^1 - \alpha^2) \mathbf{e} \left(\frac{1}{2} (\alpha^1 + \alpha^2) \right) + z_n (\alpha^1 - \alpha^2) \mathbf{k}$$

$$g_{11}(\alpha^1, \alpha^2) = g_{22}(\alpha^1, \alpha^2) = g(\alpha^1 - \alpha^2), \quad G = -g + C\sqrt{g}$$

из условия положительной определенности метрического тензора $0 < C < 2\sqrt{g}$.

Система уравнений (4.1) в данном случае имеет решение в виде

$$z = \int \sqrt{g - C/2\sqrt{g} - C/8(\partial g / \partial x)^2} g^{-3/2} d\lambda$$

$$\lambda = \alpha^1 - \alpha^2, \quad \theta = \frac{1}{2}(\alpha^1 \alpha^2), \quad r = \sqrt{2C\sqrt{g}}$$

Рассмотрим следующие примеры: 1. Изделие имеет форму усеченного конуса, развертка которого на плоскость представлена на фиг. 1. Сеть в данном случае является сетью переноса, определяемую окружностями радиуса C_1 и C_2 и удовлетворяющая уравнениям $u^1 = C_1 \cos \alpha^1 + C_2 \cos \alpha^2$, $u^2 = C_1 \sin \alpha^1 + C_2 \sin \alpha^2$.

Данное изделие может быть получено изгибанием заготовки в виде цилиндра вращения с $r = b/2\pi\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $z = \pi C_1 C_2 / \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Здесь b – угол раствора развертки изделия на плоскости. Геодезическая сеть на цилиндре состоит из винтовых линий, пересекающих параллели цилиндра под углами γ_1 и γ_2 .

2. Изделие имеет форму геликоида (архимедова винта, шнека), заданного уравнением $\mathbf{r} = u^1 \mathbf{e}(u) + au^2 \mathbf{k}$, $|u^1| \leq b$, $|u^2| \leq d/a$, где a, b, d – константы, характеризующие форму изделия и его размеры.

Заготовка для такого изделия может быть представлена в виде двух переходов: (а) в виде цилиндра радиусом b и высотой $2d$ с геодезической сетью вращения, линии

которой наклонены к параллелям под углом γ : $\sin \gamma = a/\sqrt{a^2 + b^2}$, которая трансформируется на кусок плоскости $|x| \leq \pi b/2$, $y = 0$, $|z| \leq d$. При этом происходит двойное покрытие; (b) трансформация заготовки (a) в изделие по закону $\mathbf{r} = u\mathbf{e}(tu) + a\mathbf{u}\mathbf{k}t$ $[0, 1]$. При этом за время t точка M_0 переходит в точку M_t по закону $x_t = b/t \sin(x_0 t/b) \cos(z_0 t/a)$, $y_t = b/t \sin(x_0 t/b) \sin(z_0 t/a)$, $z_t = z_0$. Общий вид трансформации представлен на фиг. 2.

Используя метод трансформации, базирующийся на идее изгибания поверхностей, можно получать различные классы поверхностей изделий. Ближайшим аналогом такой технологии является технология изготовления автошин или криволинейных трубопроводов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.И. Шуликовский. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М.: Физматгиз, 1963.

Москва

Поступила в редакцию
2.II.1996