МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1998

УДК 539.3

© 1998 г. Ф.С. ХАЙРУЛЛИН

МЕТОД РАСЧЕТА ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Для расчета тонких оболочек сложной формы чаще всего используется метод конечных элементов. При этом построение конечного элемента оболочки существенно зависит от способа параметризации срединной поверхности оболочки. Обычно радиус-вектор срединной поверхности задают аналитически, как функцию от двух гауссовых координат. Наиболее просто решается задача, когда в введенной системе координат граничные линии описываются линейными функциями. В этом случае в гауссовой системе координат оболочку можно разбить на прямоугольные и треугольные элементы с прямолинейными границами. Если же граничные линии не описываются линейными функциями, то требуется построение четырехугольных или треугольных конечных элементов с криволинейными сторонами, что существенно усложняет задачу. В данной работе предлагается метод, позволяющий рассчитывать оболочки с произвольными граничными линиями, а также составные оболочечные конструкции.

Рассмотрим тонкую оболочку, заданную в ортогональной криволинейной системе координат α_1, α_2 в линиях главных кривизн. Пусть границы срединной поверхности области Ω не совпадают с координатными линиями, т.е. оболочка имеет сложную форму в плане. Предположим, что область Ω разбивается на подобласти Ω_k в виде криволинейных четырехугольников (фиг. 1), границы которых описываются уравнениями $\alpha_2 = f_1(\alpha_1)$, $\alpha_2 = f_2(\alpha_1)$, $\alpha_1 = f_3(\alpha_2)$, $\alpha_1 = f_4(\alpha_2)$. Причем функции f_i – однозначные функции класса C^1. В подобласти Ω_k введем локальную систему координат β_1, β_2 следующим образом:

$$\alpha_1 = f_3(g_3(s_3^0\beta_2))(1-\beta_1) + f_4(g_4(s_4^0\beta_2))\beta_1$$

$$\alpha_2 = f_1(g_1(s_1^0\beta_1))(1-\beta_2) + f_2(g_2(s_2^0\beta_1))\beta_2 \tag{1}$$

$$s_i \equiv q_i(\alpha_1) = \int\limits_{\alpha_{1,2i-1}}^{\alpha_1} \sqrt{A_{1i}^2 + A_{2i}^2 f_i'^2(\alpha_1)}\, d\alpha_1, \quad s_j \equiv q_j(\alpha_2) = \int\limits_{\alpha_{2,i}}^{\alpha_2} \sqrt{A_{2j}^2 + A_{1j}^2 f_j'^2(\alpha_2)}\, d\alpha_2$$

Здесь $\overset{0}{s_i} = q_i(\alpha_{1,2i})$, $\overset{0}{s_j} = q_j(\alpha_{2,j})$ – длины дуг кривых γ_i, γ_j; $\alpha_1 = q_i(s_i)$, $\alpha_2 = q_j(s_j)$ – функции обратные к функциям $s_i = q_i(\alpha_1)$, $s_j = q_j(\alpha_2)$ ($j = i + 2$, $i = \overline{1,2}$); A_{1i}, A_{2i} – коэффициенты первой квадратичной формы системы координат α_1, α_2, вычисленные на линиях γ_i; $(\alpha_{1i}, \alpha_{2i})$ – координаты угловых точек A, B, C, D ($i = \overline{1,4}$).

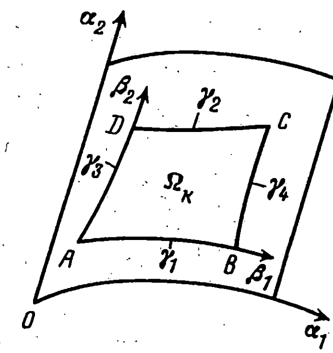
В системе координат β_1, β_2 границы подобласти Ω_k совпадают с координатными линиями $\beta_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$, $\beta_2 = 1$. Причем, на граничных линиях γ_i координатная сетка является равномерной и уравнения (1) переходят в уравнения линий γ_i.

Для определения напряженно-деформированного состояния оболочек используем соотношения теории оболочек типа Тимошенко без учета обжатия поперечных слоев [1, 2] и вариационный принцип Лагранжа [3]. Предполагаем, что справедлив закон

Гука, перемещения и деформации малы, материал оболочек изотропен. На основании вариационного принципа Лагранжа

$$\delta E = \sum_{k=1}^{K} \delta E_k(\mathbf{U}) = \sum_{k=1}^{K} \int_{\Omega} (\delta P_k - \delta' A_k) d\Omega = 0 \qquad (2)$$

где E – полная энергия оболочки; E_k – полная энергия подобласти Ω_k; P_k, $\delta' A_k$ – соответственно удельная потенциальная энергия деформации и вариация работы внешних сил единицы площади подобласти Ω_k; $\mathbf{U} = (u_1, u_2, w, \psi_1, \psi_2)^T$ – вектор перемещений u_1, u_2, w и углов сдвига ψ_1, ψ_2 в системе координат α_1, α_2.



Фиг. 1

В подобласти Ω_k искомые функции аппроксимируем функциями, заданными в системе координат β_1, β_2 следующим образом:

$$\mathbf{U} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{D}_{mn} t_m(\beta_1) t_n(\beta_2) \qquad (3)$$

Здесь $\mathbf{D}_{mn} = (D_{mn}^{(1)}, D_{mn}^{(2)}, D_{mn}^{(3)}, D_{mn}^{(4)}, D_{mn}^{(5)})^T$ – вектор неизвестных постоянных

$$t_1(\beta_1) = 1 - \beta_1, \quad t_2(\beta_1) = \beta_1, \quad t_m(\beta_1) = t_1(\beta_1)[t_2(\beta_1)]^{m-2} \quad (m = \overline{3, M})$$

На границах подобласти

$$\mathbf{U}(\gamma_i) = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{D}_{mi} t_m(\beta_1), \quad \mathbf{U}(\gamma_{i+2}) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{D}_{in} t_n(\beta_2) \quad (i = \overline{1,2}) \qquad (4)$$

т.е. искомые функции определяются одномерными полиномами, являющимися инвариантными величинами относительно преобразования системы координат. Это обеспечивает непрерывность искомых функций при переходе из одной подобласти в другую. Например, если граница γ_2 подобласти Ω_k совпадает с границей $\overset{*}{\gamma}_3$ подобласти $\overset{*}{\Omega}_k$, то для обеспечения непрерывности вектора перемещений $\mathbf{U}$ достаточно выполнить условия $\mathbf{D}_{m2} = \overset{*}{\mathbf{D}}_{1m}$ $(m = \overline{1, M}, N = M)$.

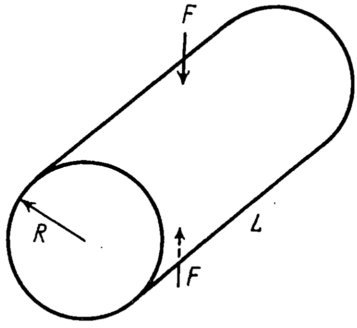
В удельную потенциальную энергию P_k входят частные производные от компонент вектора $\mathbf{U}$ по координатам α_i. Вычисление этих производных производится по обычным формулам дифференцирования сложных функций:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial U / \partial \beta_1 \partial \alpha_2 / \partial \beta_2 - \partial U / \partial \beta_2 \partial \alpha_2 / \partial \beta_1}{\partial \alpha_1 / \partial \beta_1 \partial \alpha_2 / \partial \beta_2 - \partial \alpha_1 / \partial \beta_2 \partial \alpha_2 / \partial \beta_1},$$

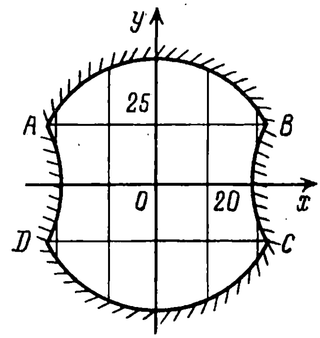
$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial U / \partial \beta_2 \partial \alpha_1 / \partial \beta_1 - \partial U / \partial \beta_1 \partial \alpha_1 / \partial \beta_2}{\partial \alpha_1 / \partial \beta_1 \partial \alpha_2 / \partial \beta_2 - \partial \alpha_1 / \partial \beta_2 \partial \alpha_2 / \partial \beta_1} \qquad (5)$$

где частные производные, входящие в знаменатель, определяются из соотношений (1).

Полная энергия E оболочки является инвариантной величиной по отношению к преобразованию системы координат. Поэтому интегрирование в уравнении (2) можно произвести в системе координат β_1, β_2, т.е. $d\Omega = \sqrt{a^*}\, d\beta_1 d\beta_2$, где $a^* = \overset{*}{a}_{11} \overset{*}{a}_{22} - \overset{*}{a}{}_{12}^{2}$, $\overset{*}{a}_{ij}$ – ковариантные компоненты первого основного метрического тензора системы коорди-



Фиг. 2



Фиг. 3

нат β_1, β_2. Величины a_{ij}^* определяются через коэффициенты первой квадратичной формы A_1, A_2 системы координат α_1, α_2 следующим образом:

$$a_{ij}^* = a_{kl} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \beta_i} \frac{\partial \alpha_l}{\partial \beta_j}, \quad a_{kk} = A_k^2, \quad a_{12} = a_{21} = 0$$

Подставляя формулы (3) в уравнение (2) с учетом соотношений (5), удовлетворяя при этом соответствующим геометрическим граничным условиям и условиям стыковки подобластей, после численного интегрирования по некоторой квадратурной формуле получится система линейных уравнений относительно неизвестных постоянных $\mathbf{D}_{mn}$.

Таким образом, основные соотношения и искомые функции задаются в системе координат α_1, α_2, в которой определяющие уравнения являются наиболее простыми. В криволинейной же системе координат β_1, β_2 производится аппроксимация искомых функций и вычисление интегралов.

На основе предложенной методики разработан алгоритм и составлена программа по расчету оболочек сложной формы в плане. Для исследования сходимости решения рассматривается тестовая задача об изгибе круговой замкнутой цилиндрической оболочки со свободными торцами под действием самоуравновешенной системы двух сосредоточенных сил (фиг. 2). Приняты следующие числовые параметры: $L = 26{,}2$ см, $R = 12{,}5$ см, $h = 0{,}238$ см, $E = 7{,}4 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0{,}3125$, $F = 453$ Н.

Ниже приводятся значения прогиба и нормальных напряжений под нагрузкой для различных количеств членов в рядах (3):

$N = M$	7	8	[4]	[5]
w [см]	0,279	0,285	0,275	0,289
σ_x [мПа]	–99,5	–125		

В [4] получено точное решение для нерастяжимой оболочки. В последнем столбце приведено конечно-элементное решение, полученное на основе различных конечных элементов, анализ которых проведен в работе [5].

Далее приводятся значения прогиба и напряжений, возникающие в защемленной по контуру пластины (фиг. 3), границы которой задаются дугами окружностей $x^2 + y^2 = 2500$ (линии АВ, СД), $(x \mp 90)^2 + y^2 = 2500$ (линии АД, ВС):

$N = M$	5	6	[6]
w [см]	0,375	0,375	0,38
σ_x [мПа]	112	116	115,4

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галимов К.З., Артюхин Ю.П., Карасев С.Н. и др.* Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. 210 с.
2. *Пелех Б.Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. думка, 1973. 248 с.
3. *Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 288 с.
4. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
5. *Голованов А.И., Корнишин М.С.* Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. Казань: Казан. фил. физ.-техн. ин-та, 1989. 269 с.
6. *Якупов Н.М., Серазутдинов М.Н.* Расчет упругих тонкостенных конструкций сложной геометрии. Казань: Ин-т механики и машиностр., 1993. 206 с.

Набережные Челны

Поступила в редакцию
15.V.1996