**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1998**

УДК 539.3

© 1998 г. **И.Г. ТЕРЕГУЛОВ, С.Н. ТИМЕРГАЛИЕВ**

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Рассматривается задача геометрически и физически нелинейной теории пологих оболочек, заключающаяся в определении напряженно-деформированного состояния свободных оболочек, не подчиненных никаким геометрическим граничным условиям. Необходимость изучения задач для таких оболочек была отмечена И.И. Воровичем [1]. Для доказательства существования решения задачи предлагается метод, основанный на сведении задачи к системе нелинейных интегральных уравнений в деформациях и последующем исследовании ее разрешимости при помощи принципа сжатых отображений. Отметим, что ранее данным методом была решена геометрически нелинейная задача для свободных оболочек [2]. В настоящей заметке результаты [2] обобщаются на случай оболочек из физически нелинейного материала.

В основе метода лежат формулы для вектора перемещения через компоненты деформации. Для их вывода будем использовать соотношения для компонент конечной деформации, полученные на основе гипотез Кирхгофа – Лява

$$\varepsilon^{\circ}_{jj} = w_{j\alpha^j} - B_{jj}w - G^k_{jj}w_k + \tfrac{1}{2}w^2_{\alpha^j} \quad (j=1,2)$$

$$\varepsilon^{\circ}_{12} = \tfrac{1}{2}(w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1}) - B_{12}w - G^k_{12}w_k + \tfrac{1}{2}w_{\alpha^1}w_{\alpha^2} \tag{1}$$

$$\varepsilon^{1}_{ij} = -w_{\alpha^i\alpha^j} + G^k_{ij}w_{\alpha^k} \quad (i \leqslant j;\ i,\ j=1,2)$$

где ε°_{ij}, ε^{1}_{ij} – компоненты тангенциальной и изгибной деформации срединной поверхности S_0; w_i, w – тангенциальные и нормальное перемещения точек S_0; B_{ij} – составляющие тензора кривизны S_0; G^k_{ij} – символы Кристоффеля второго рода; α^1, α^2 принимаются как декартовы координаты на плоскости, изменяющиеся в некоторой плоской области Ω.

Систему (1) будем решать относительно w_i, w, предполагая ε°_{ij}, ε^{1}_{ij} известными функциями. Для этого от (1) перейдем к системе

$$w_{1\alpha^1} - w_{2\alpha^2} + (B_{22} - B_{11})w + (G^k_{22} - G^k_{11})w_k + \tfrac{1}{2}(w^2_{\alpha^1} - w^2_{\alpha^2}) = \varepsilon^{\circ}_{11} - \varepsilon^{\circ}_{22}$$

$$w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2B_{12}w - 2G^k_{12}w_k + w_{\alpha^1}w_{\alpha^2} = 2\varepsilon^{\circ}_{12} \tag{2}$$

$$-w_{\alpha^1\alpha^1} - w_{\alpha^2\alpha^2} + (G^k_{11} + G^k_{22})w_{\alpha^k} = \varepsilon^{1}_{11} + \varepsilon^{1}_{22} \tag{3}$$

Решение системы (2), (3) начнем с решения уравнения (3). Введем обозначения $a=-G_{11}^1-G_{22}^1$, $b=G_{11}^2+G_{22}^2$, $\varepsilon_3=\varepsilon_{11}^1+\varepsilon_{22}^1$, $u=-w_{\alpha^1}$, $v=w_{\alpha^2}$. Тогда уравнение (3) будет эквивалентно системе

$$u_{\alpha^1}-v_{\alpha^2}+au+bv=\varepsilon_3,\quad u_{\alpha^2}+v_{\alpha^1}=0$$

которую с помощью комплексной функции $W(z)=u(\alpha^1,\alpha^2)+iv(\alpha^1,\alpha^2)$, $z=\alpha^1+i\alpha^2$ можно представить в виде

$$W_{\bar z}+AW+B\overline{W}=F,\quad A=\tfrac{1}{4}(a-ib) \tag{4}$$

$$B=\tfrac{1}{4}(a+ib),\quad F=\varepsilon_3/2,\quad W_{\bar z}=\tfrac{1}{2}(W_{\alpha^1}+iW_{\alpha^2})$$

Уравнения вида (4) изучены И.Н. Векуа [3]. При нахождении решения уравнения (4) будем следовать [3].

Предположим, что $\varepsilon_3\in L_p(\overline{\Omega})$, $p>2$; функции G_{ij}^k, B_{ij} ограничены в $\overline{\Omega}$, вне области $\overline{\Omega}$: $\varepsilon_3=G_{ij}^k=B_{ij}\equiv 0$. При этих условиях решение уравнения (4), принадлежащее пространству $C(\overline{\Omega})$ и имеющее обобщенную производную $W_{\bar z}\in L_p(\overline{\Omega})$, $p>2$, можно получить в виде

$$W(z)=W_0(z)+(T_1\varepsilon_3)(z) \tag{5}$$

где $W_0(z)$ – обобщенная аналитическая функция [3], зависящая от произвольной голоморфной внутри Ω функции; оператор T_1f дается формулой

$$T_1f=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\chi_1(z,\ \zeta;\ \Omega)f(\zeta)d\xi d\eta,\quad \zeta=\xi+i\eta \tag{6}$$

где $\chi_1(z,\zeta;\Omega)$ – известная функция, называемая главной функцией [3].

Зная $W(z)$, решение w уравнения (3) можно найти по формуле

$$w(\alpha^1,\ \alpha^2)=c_0-\operatorname{Re}\int\limits_{z_0}^{z}W(\zeta)d\zeta,\quad c_0=\text{const} \tag{7}$$

где z_0 – произвольно фиксированная точка Ω.

Если Ω – односвязная область, то правая часть (7) является однозначной функцией при фиксированных c_0, z_0. Если Ω – многосвязная область, то правая часть (7) будет, вообще говоря, многозначной функцией. Пусть Γ_j $(j=0,1,\ldots,m)$ – замкнутые кривые, ограничивающие область Ω, причем $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m$ лежат внутри Γ_0. Тогда для однозначности правой части (7) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\operatorname{Re}\int\limits_{\Gamma_j}W(\zeta)d\zeta=0\ \ (j=\overline{1,\ m})$$

Перейдем к системе (2). При помощи комплексной функции $W_1=w_1+iw_2$ систему (2), как и выше, представим в виде

$$W_{1\bar z}+A_1W_1+B_1\overline{W_1}=F_1-K\varepsilon_3 \tag{8}$$

$$F_1=\tfrac{1}{2}(\varepsilon_1+i\varepsilon_2),\quad \varepsilon_1=\varepsilon_{11}^{\circ}-\varepsilon_{22}^{\circ},\quad \varepsilon_2=2\varepsilon_{12}^{\circ}$$

$$K\varepsilon_3=\tfrac{1}{2}[(B_{22}-B_{11})w+\tfrac{1}{2}(w_{\alpha^1}^2-w_{\alpha^2}^2)+i(w_{\alpha^1}w_{\alpha^2}-2B_{12}w)]\equiv\tfrac{1}{2}(K_1\varepsilon_3+iK_2\varepsilon_3)$$

Коэффициенты A_1, B_1 зависят только от G_{ij}^k и обращаются в нуль при $G_{ij}^k \equiv 0$.

Предположим, что $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \in L_p(\overline{\Omega}),\ p > 2$ и вне $\overline{\Omega}$: $\varepsilon_j \equiv 0 (j = 1,2)$. Тогда решение W_1 уравнения (8) класса $C(\overline{\Omega})$, имеющее обобщенную производную $W_{1\bar{z}} \in L_p(\overline{\Omega}),\ p > 2$, получаем в виде

$$W_1(z) = W_{1,0}(z) + T_2(\varepsilon_1 - K_1\varepsilon_3) - T_3(\varepsilon_2 - K_2\varepsilon_3) \tag{9}$$

где через $W_{1,0}$ обозначена обобщенная аналитическая функция, зависящая от произвольной голоморфной внутри Ω функции; операторы $T_j f$ имеют ту же структуру (6), что и $T_1 f$. Имеет место лемма.

Лемма. Операторы $T_j f\ (j = \overline{1,3})$ есть вполне непрерывные линейные операторы в $L_p(\overline{\Omega}),\ p > 2$, отображающие это пространство на $C_\alpha(\overline{\Omega}),\ \alpha = (p-2)/p$, причем $\|T_j f\|_{C_\alpha} \leqslant c\|f\|_{L_p}$.

Справедливость леммы следует из свойств главных функций и теорем 1.19, 1.27 ([3], с. 39, 46).

В дальнейшем операторы $T_j f$ понадобятся как операторы, действующие из $L_p(\overline{\Omega})$ в $L_p(\overline{\Omega})$. Для их норм в пространстве $L_p(\overline{\Omega})$ имеем (d – диаметр области Ω):

$$\|T_j f\|_{L_p} \leqslant M_j \|f\|_{L_p} \quad (p > 2,\ j = \overline{1,3})$$

$$M_j = M_j(\text{mes}\ \Omega,\ \|G_{jk}^n\|_C,\ d,\ \alpha),\quad \alpha = (p-2)/p$$

Используя решения (5), (7), (9), их производные по $z, \bar{z}$, находим w_{α^j}, $w_{\alpha^2\alpha^2}$, $w_{\alpha^1\alpha^2}$, $w_{2\alpha^2}$, с помощью которых затем из (1) получаем

$$\varepsilon_{22}^1 \equiv \varepsilon_4 = H_1\varepsilon_3 + \tfrac{1}{2}\varepsilon_3 + f_1,\quad \varepsilon_{12}^1 \equiv \varepsilon_5 = H_2\varepsilon_3 + f_2$$

$$\varepsilon_{22}^\circ \equiv \varepsilon_6 = H\varepsilon_3 + 1_k H_{2+k}\varepsilon_k\,|_{k=\overline{1,3}} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 + f_3 \tag{10}$$

где $f_j \in L_p(\overline{\Omega})(p > 2)$ – известные функции, зависящие от $W_0,\ W_{1,0}$; $H_j f$ – известные операторы, определяемые формулами

$$H_1\varepsilon_3 = \mathrm{Re}[(S-I)P_1\varepsilon_3 - \tfrac{1}{2}S\varepsilon_3 - g_2T_1\varepsilon_3],\quad H_2\varepsilon_3 = \mathrm{Im}[S(P_1 - \tfrac{1}{2}I)\varepsilon_3] - \mathrm{Re}(g_1T_1\varepsilon_3)$$

$$H_{2+j}\varepsilon_j = \mathrm{Re}[(-1)^j(S-I)P_{1+j}\varepsilon_j + \tfrac{1}{2}i^{j-1}S\varepsilon_j] + (-1)^j\,\mathrm{Re}(\bar{g}_2T_{1+j}\varepsilon_j)\ (j = 1,2)$$

$$H_5\varepsilon_3 = -(1_k H_{2+k}[\mathrm{Re}(i^{k-1}W_0T_1\varepsilon_3) + g_{2+k}\Pi\varepsilon_3])_{k=1,2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\overline{W}_0T_1\varepsilon_3) + \tfrac{1}{2}(B_{11} + B_{22})\Pi\varepsilon_3 \tag{11}$$

$$H\varepsilon_3 = \tfrac{1}{2}H_3[(\mathrm{Im}T_1\varepsilon_3)^2 - (\mathrm{Re}\,T_1\varepsilon_3)^2] + H_4(\mathrm{Re}\,T_1\varepsilon_3\mathrm{Im}T_1\varepsilon_3) + \tfrac{1}{4}|T_1\varepsilon_3|^2$$

$$P_1\varepsilon_3 = AT_1\varepsilon_3 + B\overline{T_1\varepsilon_3},\quad P_jf = A_1T_jf + B_1\overline{T_jf}(j = 2,3),\quad g_j = G_{j,2}^1 + iG_{j,2}^2\ (j = 1,2)$$

$$g_3 = B_{11} - B_{22},\quad g_4 = 2B_{12},\quad \Pi\varepsilon_3 = \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z}(T_1\varepsilon_3)(\zeta)d\zeta \tag{12}$$

где I – тождественный оператор; оператор Sf дается формулой

$$Sf = -\frac{1}{\pi}\iint_\Omega \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2 d\xi d\eta}$$

Здесь интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши. Известно [3], что Sf есть ограниченный линейный оператор в $L_p(\overline{\Omega})$, отображающий это пространство в себя, причем

$$\|Sf\|_{L_p} \leqslant \Lambda_p \|f\|_{L_p} \quad (p > 1) \tag{13}$$

Кроме того, справедлива формула

$$\overline{S}Sf = f, \quad \overline{S}f = -\frac{1}{\pi}\iint_C \frac{f(\zeta)}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2 d\xi d\eta} \tag{14}$$

Здесь предполагается, что f вне $\overline{\Omega}$ продолжена нулями.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. 1). Операторы $H_k f (k = \overline{1,5})$ есть линейные ограниченные операторы в $L_p(\overline{\Omega})$ $(p > 2)$, отображающие это пространство в себя, причем

$$\|H_k f\|_{L_p} \leqslant [\alpha_k + \tfrac{1}{4}(1 + \operatorname{sign}(4,5 - k))\Lambda_p]\|f\|_{L_p} \quad (k = \overline{1,5})$$

2). Оператор Hf есть нелинейный ограниченный оператор в $L_p(\overline{\Omega})$ $(p > 2)$, отображающий это пространство в себя, причем для любых $f_j \in L_p(\overline{\Omega})$ $(j = 1,2)$ справедлива оценка

$$\|Hf_1 - Hf_2\|_{L_p} \leqslant \alpha_0(\|f_1\|_{L_p} + \|f_2\|_{L_p})\|f_1 - f_2\|_{L_p}$$

где L_k $(k = \overline{0,5})$ – известные постоянные, зависящие от $\|G_{ij}^k\|_C$, $\operatorname{mes}\Omega$, d, Λ_p.

Доказательство теоремы 1 проводится с помощью формул (11), (12), (13), леммы.

Таким образом, получены выражения для компонент вектора перемещения точек срединной поверхности оболочки через ε_1, ε_2, ε_3 в виде (7), (9), которые будут использованы в дальнейшем. Шесть компонент деформации связаны между собой тремя соотношениями (10), которые представляют собой условия совместности деформации. При их выполнении решение системы (2), (3) удовлетворяет системе (1).

Известно, что для нелинейно упругих анизотропных сред напряжения могут быть представлены формулами Грина

$$\sigma^{ij} = \partial F / \partial \varepsilon_{ij} \quad (i,\ j = \overline{1,3}) \tag{15}$$

где F – потенциал. Принимая гипотезы Кирхгофа – Лява и используя соотношения (15), напряжения представляем в виде

$$\sigma^{\lambda\mu} = \sigma_0^{\lambda\mu} + B^{\lambda\mu qs}\tilde{\varepsilon}_{qs} + \sigma_*^{\lambda\mu}, \quad \lambda \leqslant \mu,\ q \leqslant s\ (\lambda,\ \mu,\ q,\ s = 1,2) \tag{16}$$

$$\sigma_0^{\lambda\mu} = \sigma^{\lambda\mu}(\varepsilon_0), \quad B^{\lambda\mu qs} = \partial^2 F(\varepsilon_0)/(\partial\varepsilon_{\lambda\mu}\partial\varepsilon_{qs})$$

$$\sigma_*^{\lambda\mu} = \sigma^{\lambda\mu} - B^{\lambda\mu qs}\tilde{\varepsilon}_{qs} - \sigma_0^{\lambda\mu}, \quad \tilde{\varepsilon}_{qs} = \varepsilon_{qs} - \varepsilon_{0qs} \tag{17}$$

где $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{011}, \varepsilon_{012}, \varepsilon_{022})$ – произвольно фиксированный вектор деформации, компоненты которого связаны соотношениями (10).

Для вариации энергии деформации U, накопленной во всем объеме оболочки V, будем иметь

$$\delta U = \iiint_V \sigma^{\lambda\mu}\delta\varepsilon_{\lambda\mu} D^* d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 \tag{18}$$

где $D^*(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ – элемент объема V. Принимая во внимание тонкостенность

оболочки, соотношения $\delta\varepsilon_{\lambda\mu} = \delta\overset{\circ}{\varepsilon}_{\lambda\mu} + \alpha^3\delta\overset{1}{\varepsilon}_{\lambda\mu}$ и используя выражения для $\overset{\circ}{\varepsilon}_{\lambda\mu}$, $\overset{1}{\varepsilon}_{\lambda\mu}$ через $\varepsilon_k (k = \overline{1,6})$, формулу (18) можно преобразовать к виду

$$\delta U = \iint\limits_{\Omega} (\sigma_k \delta\varepsilon_k)\,|_{k=\overline{1,6}}\, D d\alpha^1 d\alpha^2 \tag{19}$$

где D – элемент площади срединной поверхности; σ_k выражаются через $\sigma^{\lambda\mu}$, например

$$\sigma_1 = \int\limits_{-h^-}^{h^+} \sigma^{11}(\alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3) d\alpha^3, \quad \sigma_2 = \int\limits_{-h^-}^{h^+} \sigma^{12}(\alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3) d\alpha^3$$

Используя (16), их можно представить в виде

$$\sigma_j = \beta_{j,k}\tilde{\varepsilon}_k\,|_{k=\overline{1,6}} + \overset{\circ}{\sigma}_j + \sigma_j^H \quad (j = \overline{1,6}) \tag{20}$$

где $\tilde{\varepsilon}_k = \varepsilon_k - \overset{\circ}{\varepsilon}_k$; $\overset{\circ}{\varepsilon}_k$ выражаются через $\overset{\circ}{\varepsilon}_{0\lambda\mu}$, $\overset{1}{\varepsilon}_{0\lambda\mu}$ теми же формулами, что и ε_k, например, $\overset{\circ}{\varepsilon}_1 = \overset{\circ}{\varepsilon}_{011} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{022}, \ldots, \overset{\circ}{\varepsilon}_3 = \overset{1}{\varepsilon}_{011} + \overset{1}{\varepsilon}_{022}$ и т.д.; $\beta_{j,k}$, $\overset{\circ}{\sigma}_j$ – известные величины, не зависящие от $\tilde{\varepsilon}_k$, например

$$\beta_{11} = \int\limits_{-h^-}^{h^+} B^{1111} d\alpha^3;\ \ldots,\ \beta_{14} = \int\limits_{-h^-}^{h^+} (B^{1122} - B^{1111})\alpha^3 d\alpha^3,\ \ldots,\ \overset{\circ}{\sigma}_1 = \int\limits_{-h^-}^{h^+} \overset{1}{\sigma}_0^{11} d\alpha^3$$

где σ_j^H – известные выражения, нелинейные относительно $\tilde{\varepsilon}_k$, которые определяются с помощью интегралов по координате α^3 от $\sigma_*^{\lambda\mu}$:

$$\sigma_1^H = \int\limits_{-h^-}^{h^+} \sigma_*^{11} d\alpha^3, \quad \sigma_2^H = \int\limits_{-h^-}^{h^+} \sigma_*^{12} d\alpha^3 \text{ и так далее.}$$

Вычислим работу внешних приложенных к оболочке сил на возможных перемещениях в условиях гипотез Кирхгофа – Лява. Пусть по граням $S_0^{\pm}$ оболочки приложены усилия $\mathbf{F}^{\pm}(\alpha^1,\ \alpha^2)$, действуют массовые силы $\mathbf{F}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ и на границе S_0° действуют поверхностные силы $\mathbf{F}(s, \alpha^3)$.

Для элементарной работы δA_1 массовых сил и сил, приложенных к $S_0^{\pm}$, имеем

$$\delta A_1 = \iint\limits_{\Omega} R^j \delta w_j\,|_{j=\overline{1,3}}\, D d\alpha^1 d\alpha^2 - \iint\limits_{\Omega} L^i \delta w_{\alpha^i}\,|_{i=1,2}\, D d\alpha^1 d\alpha^2 \tag{21}$$

$$R^j = F^{+j} + F^{-j} + \int\limits_{-h^-}^{h^+} F^j(\alpha^1,\ \alpha^2, \alpha^3) d\alpha^3 \quad (j = \overline{1,3})$$

$$L^i = F^{+i}h^+ - F^{-i}h^- + \int\limits_{-h^-}^{h^+} F^i(\alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3)\alpha^3 d\alpha^3 \quad (i = 1,2) \tag{22}$$

Элементарная работа δA_2 усилий, приложенных к S_0°, дается формулой

$$\delta A_2 = \int\limits_{\Gamma} [Q^j \delta w_j\,|_{j=\overline{1,3}} - M^i \delta w_{\alpha^i}\,|_{i=1,2}] ds \tag{23}$$

$$Q^j = \int\limits_{-h^-}^{h^+} F^j(s,\ \alpha^3) d\alpha^3, \quad M^i = \int\limits_{-h^-}^{h^+} F^i(s,\ \alpha^3)\alpha^3 d\alpha^3 \tag{24}$$

Для вывода уравнений равновесия оболочки используем вариационный принцип Лагранжа, в соответствии с которым

$$\delta U = \delta A_1 + \delta A_2 \tag{25}$$

В (25) к сравнению допускаются $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. При этом используются вариации w_i, w_{α^i}, w, ε_4, ε_5, ε_6, которые легко получаются из соответствующих формул для этих величин с учетом линейности операторов $H_k f\ (k=\overline{1,5})$, Πf, $T_l f$ и нелинейности Hf (для вариации $H\varepsilon_3$ ниже использовано обозначение $\delta H\varepsilon_3 \equiv H_\delta(\varepsilon_3;\ \delta\varepsilon_3)$).

Раскрывая традиционными рассуждениями вариационное соотношение (25), используя при этом формулы (19), (21), (23), (5), (7), (10), (11), после громоздких преобразований получаем уравнения равновесия оболочки в виде

$$D(\sigma_1 - \tfrac{1}{2}\sigma_6) + H_3^*(D\sigma_6) = \varphi_1,\quad D\sigma_2 + H_4^*(D\sigma_6) = \varphi_2$$

$$D(\sigma_3 + \tfrac{1}{2}\sigma_4) + H_\delta^*(\varepsilon_3;\ D\sigma_6) + H_5^*(D\sigma_6) + H_1^*(D\sigma_4) + H_2^*(D\sigma_5) +$$

$$+\operatorname{Re} T_1^*[(\varphi_1 + i\varphi_2)T_1\varepsilon_3] = \varphi_3 \tag{26}$$

где φ_j – известные функции. Здесь обозначены сопряженные операторы относительно гильбертовой метрики (f, q – вещественные функции):

$$(f,\ g) = \iint\limits_{\Omega} fg\,d\alpha^1 d\alpha^2$$

Известно [4], что сопряженные операторы действуют из пространства $L_p(\overline{\Omega})$ в пространство $L_q(\overline{\Omega})$, сопряженное $L_p(\overline{\Omega})$, $1/p + 1/q = 1$ ($p > 2$), причем $\|..\|_{L_q} = \|..\|_{L_p}$. В силу того, что $p > 2$ и Ω – ограниченная область, справедливо включение $L_p(\overline{\Omega}) \subset L_q(\overline{\Omega})$ и это позволяет рассматривать сопряженные операторы в $L_p(\overline{\Omega})$ $(p > 2)$.

Справедлива теорема.

Теорема 2. 1. Операторы $H_k^* f\ (k=\overline{1,5})$ есть линейные ограниченные операторы в $L_p(\overline{\Omega})$ $(p > 2)$, отображающие это пространство в себя, причем

$$\left\|H_k^* f\right\|_{L_p} \leqslant [\alpha_k^* + \tfrac{1}{4}(1 + \operatorname{sign}(4,5-k))\Lambda_p]\ \|f\|_{L_p}\quad (k=\overline{1,5})$$

2. Оператор $H_\delta^*(\varepsilon_3;\ f)$ есть ограниченный оператор в $L_p(\overline{\Omega})$ $(p > 2)$, отображающий это пространство в себя, причем для любых $\varepsilon_3^j,\ f_j \in L_p(\overline{\Omega})$:

$$\left\|H_\delta^*(\varepsilon_3^1;\ f_1) - H_\delta^*(\varepsilon_3^2;\ f_2)\right\|_{L_p} \leqslant \alpha_0^*(\|f_1\|_{L_p}\left\|\varepsilon_3^1 - \varepsilon_3^2\right\|_{L_p} + \left\|\varepsilon_3^2\right\|_{L_p}\|f_1 - f_2\|_{L_p})$$

$$\alpha_k^* = \alpha_k^*(\left\|G_{ij}^n\right\|_c,\ \operatorname{mes}\Omega,\ d,\ \Lambda_p)$$

Преобразуем систему уравнений (26). С этой целью заметим, что $\tilde{\varepsilon}_4$, $\tilde{\varepsilon}_5$, $\tilde{\varepsilon}_6$ представимы в виде

$$\tilde{\varepsilon}_4 = H_1\tilde{\varepsilon}_3 + \tfrac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_3,\quad \tilde{\varepsilon}_5 = H_2\tilde{\varepsilon}_3,\quad \tilde{\varepsilon}_6 = H_0\tilde{\varepsilon}_3 + 1_k H_{2+k}\tilde{\varepsilon}_k\ 1_{k=\overline{1,3}} - \tfrac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_1 \tag{27}$$

$$H_0\tilde{\varepsilon}_3 = H(\tilde{\varepsilon}_3 + \varepsilon_3^\circ) - H\varepsilon_3^\circ$$

Далее, используя соотношения (20), теоремы 1 и 2, можно получить следующие соотношения:

$$H^*_{2k+1}(D\sigma_j) = H_{0,2k+1}\tilde{\varepsilon} + \tfrac{1}{8}(-1)^k[\mathrm{Re}(\psi_j S\bar{S}\tilde{\varepsilon}_3) - D\beta_{j,6}\,\mathrm{Re}(S\bar{S}\tilde{\varepsilon}_1)] +$$

$$+H^*_{2k+1}(D\sigma^\circ_j) + H^*_{2k+1}(D\sigma^H_j)\ \ (k=0,1;\, j=4,6) \tag{28}$$

$$H^*_{2k}(D\sigma_j) = H_{0,2k}\tilde{\varepsilon} + \tfrac{1}{8}[\mathrm{Re}(i\psi_j S\bar{S}\tilde{\varepsilon}_3) + D\beta_{j,6}\,\mathrm{Re}(S\bar{S}\tilde{\varepsilon}_2)] + H^*_{2k}(D\sigma^\circ_j) +$$

$$+H^*_{2k}(D\sigma^H_j)\ \ (k=1,2;\ \ j=5,6)$$

$$\tilde{\varepsilon} = (\tilde{\varepsilon}_1,\ \tilde{\varepsilon}_2,\ \tilde{\varepsilon}_3)^T,\quad \psi_j = D(\beta_{j,4} + i\beta_{j,5})\ \ (j=4,5,6)$$

Теперь с учетом (27), (28) и принимая во внимание формулу (14), систему (26) можем записать в виде ($C = c_{ij}$ – матрица):

$$C\tilde{\varepsilon} + G\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varphi} \tag{29}$$

$$c_{11} = D(\beta_{11} - \tfrac{1}{2}\beta_{16} - \tfrac{1}{2}\beta_{61} + \tfrac{3}{8}\beta_{66}),\quad c_{12} = D(\beta_{12} - \tfrac{1}{2}\beta_{62})$$

$$c_{13} = D(\beta_{13} + \tfrac{1}{2}\beta_{14} - \tfrac{1}{2}\beta_{63} - \tfrac{3}{8}\beta_{64}),\quad c_{21} = D(\beta_{21} - \tfrac{1}{2}\beta_{26}),\quad c_{22} = D(\beta_{22} + \tfrac{1}{8}\beta_{66})$$

$$c_{23} = D(\beta_{23} + \tfrac{1}{2}\beta_{24} - \tfrac{1}{8}\beta_{65}),\quad c_{31} = D(\beta_{31} - \tfrac{1}{2}\beta_{36} + \tfrac{1}{2}\beta_{41} - \tfrac{3}{8}\beta_{46})$$

$$c_{32} = D(\beta_{32} + \tfrac{1}{2}\beta_{42} + \tfrac{1}{8}\beta_{56}),\quad c_{33} = D(\beta_{33} + \tfrac{1}{2}\beta_{34} + \tfrac{1}{2}\beta_{43} + \tfrac{3}{8}\beta_{44} - \tfrac{1}{8}\beta_{55})$$

$$G\tilde{\varepsilon} = (G_{11}\tilde{\varepsilon} + G_{12}\tilde{\varepsilon},\ \ G_{21}\tilde{\varepsilon} + G_{22}\tilde{\varepsilon},\ \ G_{31}\tilde{\varepsilon} + G_{32}\tilde{\varepsilon})^T$$

$$G_{j,1}\tilde{\varepsilon} = a_{j,k}H_k\tilde{\varepsilon}_3\,|_{k=1,2} + a_{j,3}(H_0\tilde{\varepsilon}_3 + 1_k H_{2+k}\tilde{\varepsilon}_k\,|_{k=\overline{1,3}}) + H_{0,2+j}\tilde{\varepsilon}\ \ (j=1,2)$$

$$G_{31}\tilde{\varepsilon} = a_{3,k}H_k\tilde{\varepsilon}_3\,|_{k=1,2} + a_{33}(H_0\tilde{\varepsilon}_3 + 1_k H_{2+k}\tilde{\varepsilon}_k\,|_{k=\overline{1,3}}) + H^*_\delta(\tilde{\varepsilon}_3;\ \sigma^\circ_6) +$$

$$+H^*_\delta(\tilde{\varepsilon}_3 + \varepsilon^\circ_3;\ D\beta_{6,k}\tilde{\varepsilon}_k\,|_{k=\overline{1,6}}) + H^*_5(D\beta_{6,k}\tilde{\varepsilon}_k\,|_{k=\overline{1,6}}) + H_{0,1}\tilde{\varepsilon} + \tag{30}$$

$$+H_{0,2}\tilde{\varepsilon} + \mathrm{Re}\,T_1^*[(\varphi_1 + i\varphi_2)T_1\tilde{\varepsilon}_3]$$

$$a_{1,j} = D(\beta_{1,3+j} - \tfrac{1}{2}\beta_{6,3+j}),\quad a_{2,j} = D\beta_{2,3+j},\quad a_{3,j} = D(\beta_{3,3+j} + \tfrac{1}{2}\beta_{4,3+j})\ \ (j=\overline{1,3})$$

$$G_{12}\tilde{\varepsilon} = D(\sigma^H_1 - \tfrac{1}{2}\sigma^H_6) + H^*_3(D\sigma^H_6),\quad G_{22}\tilde{\varepsilon} = D\sigma^H_2 + H^*_4(D\sigma^H_6) \tag{31}$$

$$G_{32}\tilde{\varepsilon} = D(\sigma^H_3 + \tfrac{1}{2}\sigma^H_4) + H^*_\delta(\tilde{\varepsilon}_3 + \varepsilon^\circ_3;\ D\sigma^H_6) + H^*_5(D\sigma^H_6) + H^*_1(D\sigma^H_4) + H^*_2(D\sigma^4_5)$$

где $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1,\ \tilde{\varphi}_2,\ \tilde{\varphi}_3)^T$ – известная матрица, элементы которой зависят от φ_j, σ°_k.

Предположим, что $\det C \neq 0$. Тогда уравнение (29) можно записать в виде

$$\tilde{\varepsilon} + G_*\tilde{\varepsilon} = \varphi_* \tag{32}$$

где $G_*\tilde{\varepsilon} = C^{-1}G\tilde{\varepsilon}$, $\varphi_* = C^{-1}\tilde{\varphi}$, C^{-1} – обратная матрица для C.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Матричный оператор $G_{*1}\tilde{\varepsilon} = C^{-1}(G_{11}\tilde{\varepsilon},\ G_{21}\tilde{\varepsilon},\ G_{31}\tilde{\varepsilon})^T$ представляет собой нелинейный ограниченный оператор в $L_p(\overline{\Omega})$, $p > 2$, отображающий это пространство в себя, причем для его нормы имеет место оценка

$$\left\|G_{*1}\tilde{\varepsilon}^1 - G_{*1}\tilde{\varepsilon}^2\right\|_{L_p} \leqslant q_1\left\|\tilde{\varepsilon}^1 - \tilde{\varepsilon}^2\right\|_{L_p}$$

для любых $\tilde{\varepsilon}^j = (\tilde{\varepsilon}^j_1,\ \tilde{\varepsilon}^j_2,\ \tilde{\varepsilon}^j_3)^T$, принадлежащих шару $\left\|\tilde{\varepsilon}\right\|_{L_p} < r_1$.

Справедливость теоремы 3 следует из формул (30) с учетом теорем 1 и 2.

Здесь выражение для q_1 в силу его громоздкости не выписывается. Отметим лишь, что его можно представить в виде $q_1 = \Lambda_p(q_1^1 + \Lambda_p q_1^2) + q_1^3 + q_1^4$, где q_1^1, q_1^2 зависят только от упругих свойств материала оболочки; q_1^3 наряду с упругими характеристиками определяется также геометрией оболочки, а q_1^4, кроме всего этого, зависит еще от радиуса r_1 шара пространства $L_p(\overline{\Omega})$.

Предположим, что материал оболочки такой, что выполняется условие

$$q_1^1 + q_1^2 < 1 \tag{33}$$

Согласно теореме Рисса $\Lambda_p \equiv \|S\|_{L_p}$ непрерывна по p. Так как $\Lambda_2 = 1$ [3], то с учетом (33) найдется такое число $\delta > 0$, что имеет место неравенство

$$\Lambda_p(q_1^1 + \Lambda_p q_1^2) < 1, \text{ если } 0 < p - 2 \leqslant \delta \tag{34}$$

Фиксируя теперь некоторое p, удовлетворяющее условию (34), предполагаем, что геометрия оболочки такова, что справедливо $\Lambda_p(q_1^1 + \Lambda_p q_1^2) + q_1^3 < 1$. Радиус r_1 шара подберем так, чтобы $q_1 < 1$.

Предположим, что для любых $\tilde{\varepsilon}^j (j = 1,2)$, принадлежащих некоторому шару, имеет место соотношение

$$\left\|\sigma^{\lambda\mu}(\tilde{\varepsilon}^1) - \sigma^{\lambda\mu}(\tilde{\varepsilon}^2)\right\|_{L_p} \leqslant \gamma_{\lambda\mu}\left\|\tilde{\varepsilon}^1 - \tilde{\varepsilon}^2\right\|_{L_p} \quad (\lambda,\ \mu = 1,2)$$

Тогда, принимая во внимание выражения для σ_j^H, формулы (17), (20), (31), используя теоремы 1 и 2, можно показать, что для нормы матричного оператора $G_{*2}\tilde{\varepsilon} = C^{-1}(G_{21}\tilde{\varepsilon},\ G_{22}\tilde{\varepsilon},\ G_{32}\tilde{\varepsilon})^T$ справедлива оценка

$$\left\|G_{*2}\tilde{\varepsilon}^1 - G_{*2}\tilde{\varepsilon}^2\right\|_{L_p} \leqslant q_2\left\|\tilde{\varepsilon}^1 - \tilde{\varepsilon}^2\right\|_{L_p}$$

для любых $\tilde{\varepsilon}^j (j = 1,2)$, принадлежащих шару $\|\tilde{\varepsilon}\|_{L_p} < r_2$. Из (17) также следует, что радиус r_2 шара можно подобрать так, чтобы $q_2 < 1 - q_1$.

Положим $r = \min(r_1, r_2)$. Тогда для любых $\tilde{\varepsilon}^j (j = 1,2)$, принадлежащих шару $\|\tilde{\varepsilon}\|_{L_p} < r$, справедлива оценка

$$\left\|G_*\tilde{\varepsilon}^1 - G_*\tilde{\varepsilon}^2\right\|_{L_p} \leqslant q\left\|\tilde{\varepsilon}^1 - \tilde{\varepsilon}^2\right\|_{L_p}, \quad q = q_1 + q_2 < 1 \tag{35}$$

Теорема 4. Пусть внешние усилия, приложенные к оболочке, таковы, что $R^j (j = \overline{1,3})$, $L^i (i = 1,2)$, определенные формулами (22), принадлежат пространству $L_p(\overline{\Omega})$, $p > 2$, а $Q^j (j = \overline{1,3})$, $M^i (i = 1,2)$, определенные с помощью (24) – пространству $L_p(\Gamma)$, $p > 2$. Тогда элементы матрицы $\tilde{\varphi}$ принадлежат пространству $L_p(\overline{\Omega})$ $(p > 2)$.

Предположим, что $\|\varphi_*\|_{L_p} < (1 - q)r$. Тогда на основании (35) к уравнению (32) можно применить принцип сжатых отображений [5], согласно которому уравнение (32) имеет единственное решение $\tilde{\varepsilon} = (\tilde{\varepsilon}_1,\ \tilde{\varepsilon}_2,\ \tilde{\varepsilon}_3) \in L_p(\overline{\Omega})$, $2 < p \leqslant 2 + \delta$, принадлежащее шару $\|\tilde{\varepsilon}\|_{L_p} < r$. Зная $\tilde{\varepsilon}$, легко определить $\varepsilon_i = \tilde{\varepsilon}_i + \varepsilon_i^\circ$ $(i = \overline{1,3})$. По формулам (10)

находятся $\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$, тем самым, определяем и ε_{ij}°, ε_{ij}^{1}, принадлежащие также пространству $L_p(\overline{\Omega})$, $2 < p \leqslant 2+\delta$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00518).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И.И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989. 376 с.
2. *Тимергалиев С.Н.* Доказательство разрешимости одной задачи нелинейной теории пологих оболочек // Изв. вузов. Математика. 1996. № 9. С. 60–70.
3. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512 с.
4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.
5. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956. 392 с.

Казань

Поступила в редакцию
16.III.1997