

УДК 531.39

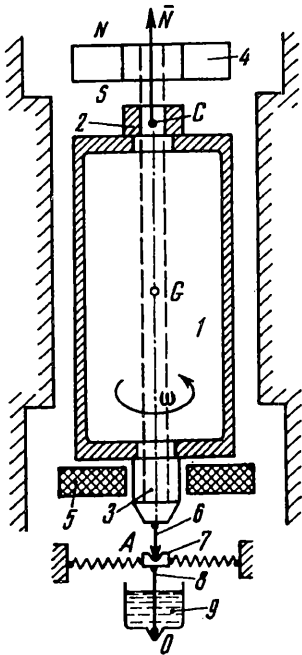
© 1998 г. А.Ю. ИШЛИНСКИЙ, В.А. СТОРОЖЕНКО, М.Е. ТЕМЧЕНКО

К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ ЦЕНТРИФУГИ НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОДВЕСЕ

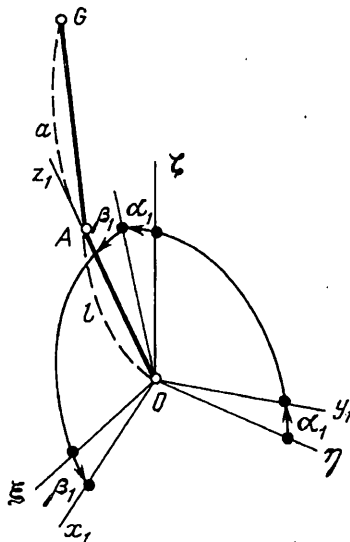
При конструировании сложных механических устройств, содержащих быстровращающиеся элементы, одной из актуальных задач является выбор способа подвеса таких элементов. Как свидетельствует практический опыт и результаты теоретических исследований, каждая из разновидностей подвеса вращающихся масс обладает особенностями, которые могут оказать существенное влияние на устойчивость этих масс при их быстром вращении, а следовательно и на успешную работу устройства в целом. Примерами таких подвесов могут служить карданов подвес, шарниры Гука, электромагнитный и воздушный подвесы и т.п. В последнее время внимание некоторых исследователей обращено на так называемый струнный подвес, обладающий рядом преимуществ по сравнению с другими способами подвеса [1–4]. Появляются также более сложные способы подвесов, как бы совмещающие в себе свойства двух или сразу нескольких более простых способов подвесов. Одним из примеров такого устройства является высокоскоростная центрифуга, предназначенная для создания эффекта сепарации тяжелых изотопов при экспериментальных ядерных исследованиях. Подвес этой центрифуги, состоящий из системы электромагнитов, включает в себя также элементы чисто механического характера. В теоретическом плане этот подвес в некотором приближении аналогичен струнному подвесу, а поэтому и особенности динамики такой центрифуги сходны с особенностями вращения твердого тела, вращающегося на струне. Ниже проводится исследование устойчивости вертикального вращения такой центрифуги.

1. Исследуемая механическая система состоит из тел центрифуги 1 (фиг. 1), представляющего собой абсолютно жесткий металлический полый цилиндр с алюминиевой оболочкой достаточно малой толщины (порядка 1–2 мм). К верхнему и нижнему основаниям цилиндра жестко прикреплены дополнительные массы 2, 3 цилиндрической формы, выполненные из ферромагнитного материала. Верхний электромагнит 4 создает магнитное поле, которое воздействует в основном на ферромагнитную массу 2, так как алюминий, из которого выполнен корпус центрифуги, является, как известно, парамагнетиком, т.е. слабомагнитным веществом. Упомянутое магнитное поле в районе возможных перемещений дополнительной массы 2 приближенно можно считать образованным из наложения двух полей. Первое из них – однородное, создающее подъемные усилия, его действие можно аппроксимировать сосредоточенной силой N , приложенной в центре массы 2 – точке C , и направленной вертикально вверх. Вторая составляющая магнитного поля эквивалентна полю упругих сил, стремящихся удерживать ось цилиндра в строго вертикальном положении.

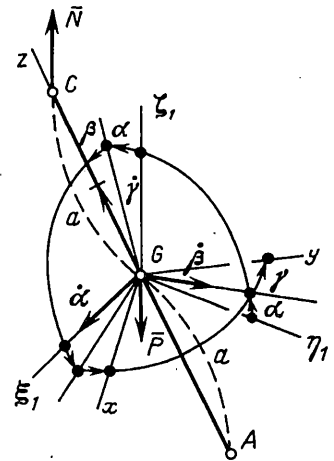
Вторая дополнительная масса 3, жестко прикрепленная к нижнему основанию цилиндра, выполнена в виде ротора, она находится под воздействием вращающегося магнитного поля, создаваемого нижней системой электромагнитов 5. Это поле сообщает ротору 3, а вместе с ним и телу центрифуги вращение с требуемой угловой скоростью. К центру нижнего основания ротора 3 жестко прикреплена игла 6, опирающаяся в точке A своим острием на подпятник 7. Последний расположен на конце ножки 8, второй конец которой шарнирно закреплен в неподвижной точке O . Ножка



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

8 имеет свободу малых угловых перемещений в вязкоупругой среде 9, которая служит для создания дополнительной восстанавливающей силы и демпфирования поперечных колебаний центрифуги.

Обратимся к выводу уравнений движения устройства. Введем неподвижную систему координат $\xi\eta\zeta$ с началом в точке O и осью ζ , направленной по вертикали вверх (фиг. 2). В центре масс цилиндра G поместим начала двух других систем координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $x_1y_1z_1$ (фиг. 3). Оси первой из них параллельны соответствующим осям неподвижной системы $\xi\eta\zeta$, оси второй – жестко связаны с цилиндром. При этом ось z направлена вдоль оси динамической симметрии цилиндра. Положение центрифуги и жестко связанной с ней системы координат $x_1y_1z_1$ относительно поступательно перемещающейся системы $\xi_1\eta_1\zeta_1$ определим тремя углами Эйлера – Крылова α, β, γ , изображенными на фиг. 3. В свою очередь, углами α_1 и β_1 (см. фиг. 2) зададим положение стержня OA по отношению к неподвижной системе координат $\xi\eta\zeta$.

Проекции угловой скорости ω системы координат $x_1y_1z_1$ на ее же собственные оси выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma \\ \omega_y &= -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \\ \omega_z &= \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma}\end{aligned}\tag{1.1}$$

Будем считать распределение собственной массы цилиндра и дополнительных масс 2, 3 таким, что расстояние от точки A , где находится острое иглы 6, до общего центра масс – точки G , равно половине расстояния, связывающего точку A с центром дополнительной массы 2 – точкой C , именно:

$$|AG| = |AC|/2 = a\tag{1.2}$$

Тогда, обозначая через l длину ножки 8, и обращаясь к фиг. 2 и 3, определим координаты центра масс G в неподвижной системе $\xi\eta\zeta$. Получим

$$\begin{aligned}\xi_G &= l \sin \beta_1 + a \sin \beta \\ \eta_G &= -l \sin \alpha_1 \cos \beta_1 - a \sin \alpha \cos \beta \\ \zeta_G &= l \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + a \cos \alpha \cos \beta\end{aligned}\quad (1.3)$$

Необходимые в дальнейшем координаты точки A получим, если в формулах (1.3) положим $a = 0$, а для определения координат точки C следует в этих же формулах заменить величину a на $2a$.

Составим теперь уравнения Лагранжа II рода. Так как на систему, кроме внешних консервативных сил, действуют еще и диссипативные силы вязкости жидкостного демпфирующего устройства 9, то уравнения будут иметь вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1.4)$$

где $L = T - V$ — функция Лагранжа; T, V — соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы; q_j — обобщенные координаты; Φ — диссипативная функция Релея.

Пренебрегая собственной массой ножки 8, выражение для кинетической энергии системы, согласно теореме Кенига, получим в виде

$$T = \frac{1}{2} [m(\dot{\xi}_G^2 + \dot{\eta}_G^2 + \dot{\zeta}_G^2) + A(\omega_x^2 + \omega_y^2) + C\omega_z^2] \quad (1.5)$$

где A и C — главные центральные моменты инерции совокупности "цилиндр + дополнительные массы", m — масса этой совокупности.

Потенциальная энергия системы V представляет собой сумму нескольких составляющих. Прежде всего, это потенциальная энергия силы тяжести mg :

$$V_1 = mg\zeta_G = mg(l \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + a \cos \alpha \cos \beta) \quad (1.6)$$

Учитывая сделанное ранее замечание о том, что подъемная сила N создается однородной составляющей магнитного поля верхнего электромагнита, потенциальную энергию этой силы можно представить в виде

$$V_2 = -N\zeta_G = -N(l \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + 2a \cos \alpha \cos \beta) \quad (1.7)$$

Следует учесть также потенциальную энергию упругих восстанавливающих сил в точке A опоры иглы с коэффициентом жесткости k_1 :

$$V_3 = \frac{1}{2} k_1 (\xi_A^2 + \eta_A^2) \quad (1.8)$$

и потенциальную энергию упругих составляющих магнитного поля, создаваемого верхним электромагнитом с коэффициентом жесткости k_2 :

$$V_4 = \frac{1}{2} k_2 (\xi_C^2 + \eta_C^2) \quad (1.9)$$

Наконец, примем, что сила вязкого трения, возникающая в жидкостном демпфере 9, сосредоточена в основном в точке A . Соответствующая ей диссипативная функция Релея [5] имеет следующий вид:

$$\Phi = \frac{1}{2} d (\dot{\xi}_A^2 + \dot{\eta}_A^2) \quad (1.10)$$

Примем за обобщенные координаты системы углы $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \gamma$. Учитывая формулы (1.1), (1.5–1.10), придем, согласно уравнениям (1.4), к следующей совокупности

пяти дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 & A \cos \beta (\ddot{\alpha} \cos \beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta) + C[(\ddot{\alpha} \sin \beta + \dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta + \ddot{\gamma}) \sin \beta + (\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma})\dot{\beta} \cos \beta] + \\
 & + ma \cos \beta (\ddot{\eta}_G \cos \alpha + \ddot{\xi}_G \sin \alpha) = (mg - 2N)a \sin \alpha \cos \beta + 2k_2 a \eta_C \cos \alpha \cos \beta \\
 & A(\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta) - C(\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma})\dot{\alpha} \cos \beta + ma(-\ddot{\xi}_G \cos \beta - \ddot{\eta}_G \sin \alpha \sin \beta + \\
 & + \ddot{\xi}_G \cos \alpha \sin \beta) = (mg - 2N)a \cos \alpha \sin \beta - 2k_2 a (\xi_G \cos \beta - \eta_C \sin \alpha \sin \beta) \\
 & ml \cos \beta_1 (\ddot{\eta}_G \cos \alpha_1 + \ddot{\xi}_G \sin \alpha_1) = (mg - N)l \sin \alpha_1 \cos \beta_1 + \\
 & + (k_1 \eta_A + k_2 \eta_C + d\dot{\eta}_A)l \cos \alpha_1 \cos \beta_1 \tag{1.11} \\
 & ml(-\ddot{\xi}_G \cos \beta_1 - \ddot{\eta}_G \sin \alpha_1 \sin \beta_1 + \ddot{\xi}_G \cos \alpha_1 \sin \beta_1) = (mg - N)l \cos \alpha_1 \sin \beta_1 - \\
 & - (k_1 \xi_A + k_2 \xi_C)l \cos \beta_1 - (k_1 \eta_A - k_2 \eta_C + d\dot{\eta}_A)l \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \\
 & C \frac{d}{dt} (\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma}) = 0
 \end{aligned}$$

В этих уравнениях следует заменить величины $\xi_G, \eta_G, \zeta_G, \xi_A, \eta_A, \xi_C, \eta_C$ и их производные выражения, вытекающими из формул (1.3) и из последующего замечания относительно координат точек A и C .

Система уравнений (1.11) имеет частное решение

$$\alpha = \beta = 0, \quad \alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad \dot{\gamma} = \omega = \text{const} \tag{1.12}$$

соответствующее вертикальному положению относительного равновесия центрифуги.

Линеаризуя первые четыре уравнения (1.11) в окрестности частного решения (1.12), приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 & A\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} + ma(l\ddot{\alpha}_1 + a\ddot{\alpha}) = (mg - 2N)a\alpha - 2k_2 a(l\alpha_1 + 2a\alpha) \\
 & A\ddot{\beta} - C\omega\alpha + ma(l\ddot{\beta}_1 + a\ddot{\beta}) = (mg - 2N)a\beta - 2k_2 a(l\beta_1 + 2a\beta) \\
 & ml^2\ddot{\alpha}_1 + mla\ddot{\alpha} = [mg - N - (k_1 + k_2)l^2]a_1 - 2k_2 a l \alpha - l^2 d\dot{\alpha}_1 \\
 & ml^2\ddot{\beta}_1 + mla\ddot{\beta} = [mg - N - (k_1 + k_2)l^2]\beta_1 - 2k_2 a l \alpha - l^2 d\dot{\beta}_1
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

В полученных уравнениях целесообразно произвести операцию компрессии [6]. В результате получим

$$\begin{aligned}
 & A\ddot{\zeta} - iC\omega\dot{\zeta} + ma(l\ddot{z} + a\ddot{\zeta}) = (mg - 2N)a\zeta - 2k_2 a(lz + 2a\zeta) \\
 & ml^2\ddot{z} + mla\ddot{\zeta} = [mg - N - (k_1 + k_2)l^2]z - 2k_2 a l \zeta - l^2 d\dot{z}
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

где

$$\alpha + i\beta = \zeta, \quad \alpha_1 + \beta_1 = z \tag{1.15}$$

где ζ, z – искомые комплекснозначные функции действительного переменного t .

2. Исследуем устойчивость положения относительного равновесия (1.12), при котором тело центрифуги вращается с постоянной угловой скоростью ω , а его ось динамической симметрии, игла δ и ось ножки δ составляют одну вертикальную прямую. Обратимся вначале к выражению для потенциальной энергии системы, представленной своими составляющими посредством формул (1.6)–(1.9). Производя разложение этих выражений в окрестности вертикального положения (1.12) в ряды по

степеням $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$, получим

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = (mg - N)l + (mg - 2N)a + \frac{1}{2}[(N - mg + (k_1 + k_2)l)\alpha_1^2 + (2N - mg + 4k_2a)\alpha^2] + \frac{1}{2}[(N - mg + (k_1 + k_2)l)\beta_1^2 + 4kla\beta_1\beta + (2N - mg + 4k_2a)a\beta^2] + R \quad (2.1)$$

где R – члены порядка малости выше второго относительно $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$.

Простейший анализ равенства (2.1) показывает, что потенциальная энергия V имеет минимум в случае, когда все однотипные квадратичные формы, содержащиеся в правой части этого равенства, являются положительно-определенными. Последнее имеет место при выполнении следующих неравенств:

$$N - mg + (k_1 + k_2)l > 0 \quad (2.2)$$

$$[N - mg + (k_1 + k_2)l](2N - mg + 4k_2a) - 4k_2la > 0$$

Согласно теореме Лагранжа – Дирихле [7] при выполнении условий (2.2) рассматриваемое движение центрифуги является устойчивым под действием одних лишь консервативных или потенциальных сил. Из структуры уравнений (1.13) следует, что в системе наряду с потенциальными присутствуют диссипативные члены, а также – гироскопические. Последние согласно теореме Томсона – Тета – Четаева [7] не могут нарушить устойчивости, более того, в некоторых случаях их наличие способствует стабилизации системы, неустойчивой под действием одних лишь потенциальных сил. Чтобы определить, имеет ли место подобная стабилизация в рассматриваемом случае, обратимся к рассмотрению системы уравнений (1.14), эквивалентной системе уравнений первого приближения (1.13).

Общее решение совокупности уравнений (1.14) состоит из линейной комбинации простейших решений

$$\zeta = \zeta(0)e^{i\lambda t}, \quad z = z(0)e^{i\lambda t} \quad (2.3)$$

Здесь $\zeta(0), z(0)$ – постоянные количества; λ – число, определяемое из характеристического уравнения совокупности (1.14), именно

$$\begin{aligned} & \rho^2\lambda^4 - [\sigma^2\omega + in(\rho^2 + \kappa^2)]\lambda^3 + [(\rho^2 + \kappa^2)(v_1^2 - v_2^2 - \mu_1 - \mu_2) + \kappa(v_1^2 - 2v_2^2) + in\sigma^2\omega]\lambda^2 - \\ & - [\sigma^2\omega(v_1^2 - v_2^2 - \mu_1 - \mu_2) + in\kappa(v_1^2 - 2v_2^2 - 4\mu_2\kappa)]\lambda + \\ & + (v_1^2 - v_2^2 - \mu_1 - \mu_2)(v_1^2 - 2v_2^2 - 4\mu_2\kappa)\kappa - 4\mu_2^2\kappa^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

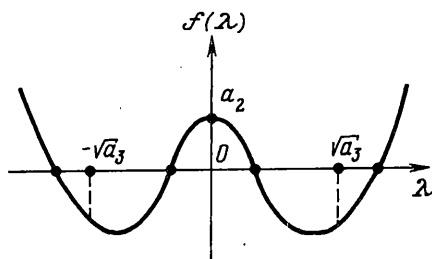
$$A / ml^2 = \rho^2, \quad C / ml^2 = \sigma^2, \quad d / m = n, \quad g / l = v_1^2,$$

$$N / ml = v_2^2 k_1 / m = \mu_1, \quad k_2 / m = \mu_2, \quad a / l = \kappa \quad (2.5)$$

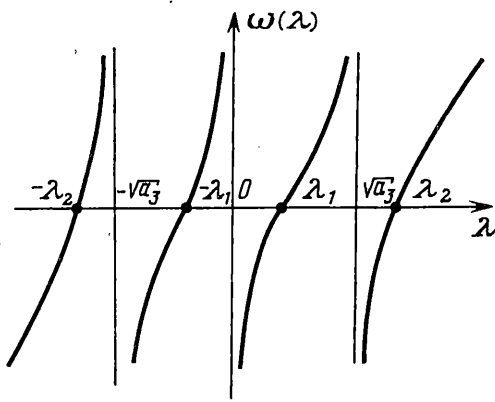
3. Обратимся к исследованию корней характеристического уравнения (2.4). Рассмотрим вначале случай отсутствия в механической системе диссипативных сил. При этом предположении в уравнениях (2.4) надлежит опустить члены, содержащие множителем параметр n , определяемый одним из равенств (2.5). В результате получим

$$\begin{aligned} & \rho^2\lambda^4 - \sigma^2\omega\lambda^3 - [(\rho^2 + \kappa^2)(\mu_1 + \mu_2 - v_1^2 + v_2^2) + \kappa(2v_2^2 - v_1^2)]\lambda^2 + \\ & + \sigma^2\omega(\mu_1 + \mu_2 + v_2^2 - v_1^2)\lambda + [\kappa(\mu_1 + \mu_2 + v_2^2 - v_1^2)(4\mu_2 + 2v_2^2 - v_1^2) - 4\mu_2^2\mu_2^2] = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Исследуем распределение корней уравнения (3.1) при изменении параметра ω – угловой скорости вращения центрифуги – и введенных ранее параметров $\rho, \sigma, \kappa, \mu_1, \mu_2, v_1$ и v_2 , характеризующих рассматриваемую механическую систему. Для этой цели



Фиг. 4



Фиг. 5

воспользуемся графоаналитическим методом [8, 9]. Согласно этому методу, уравнение (3.1) представим в виде

$$\omega = \frac{a_0 \lambda^4 - a_1 \lambda^2 + a_2}{\sigma^2 \lambda (\lambda^2 - a_3)} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \rho^2, \quad a_1 = (\rho^2 + \kappa^2)(\mu_1 + \mu_2 + v_2^2 - v_1^2) + \kappa(2v_2^2 - v_1^2), \quad a_2 = \kappa(\mu_1 + \mu_2 + \\ &+ v_2^2 - v_1^2)(4\kappa^2 \mu_2 + 2v_2^2 - v_1^2) - 4\kappa^2 \mu_2^2 = \kappa a_3 a_4 - 4\kappa^2 \mu_2^2, \quad a_3 = \mu_1 + \mu_2 + v_2^2 - v_1^2 \\ a_4 &= 4\kappa^2 \mu_2 + 2v_2^2 - v_1^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Построим график функции (3.2) при различных значениях коэффициентов a_i ($i = 0, 1, 2, 3$), принимая во внимание, что, согласно первому равенству (3.3), величина a_0 всегда положительна.

(а). Пусть $a_2 > 0, a_3 > 0$. Рассмотрим вначале числитель функции (3.2), именно

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^4 - a_1 \lambda^2 + a_2 \quad (3.4)$$

При значении $\lambda^2 = a_3$ полином (3.4) при использовании равенств (3.2) оказывается равным

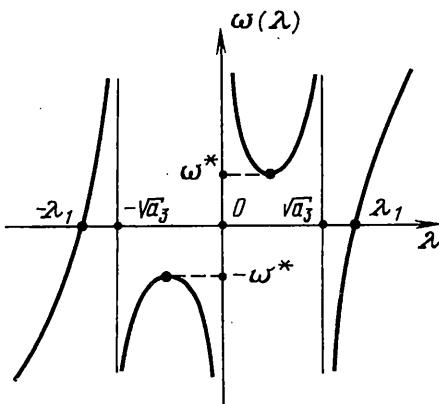
$$f(\lambda) = -\kappa^2 [\mu_1 - \mu_2 - (v_1^2 - v_2^2)]^2 < 0 \quad (3.5)$$

а при $\lambda = 0$ $f(\lambda) = a_2 > 0$. Это означает, что полином (3.4) имеет четыре вещественных корня (фиг. 4).

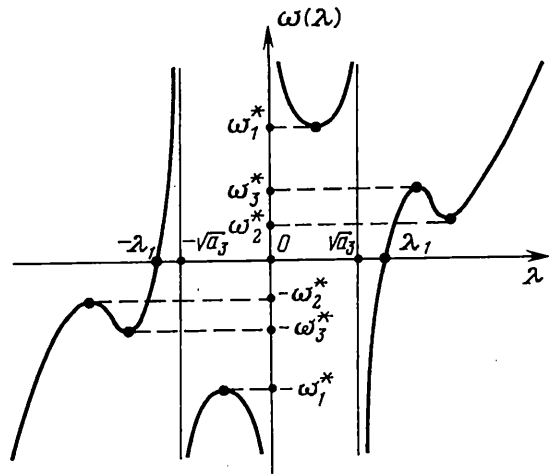
Функция (3.2) имеет три асимптоты: $\lambda = 0$ и $\lambda = \pm \sqrt{a_3}$. При этом две последние расположены между корнями полинома $f(\lambda)$ так, как это показано на фиг. 4. Отметим также, что при $\lambda \rightarrow +\infty$ функция $f(\lambda)$ положительна, а при $\lambda \rightarrow -\infty$ — отрицательна.

Изложенное дает возможность построить график функции (3.2), примерный вид которого представлен на фиг. 5. Из этого графика следует, что для всех значений угловой скорости ω характеристическое уравнение (3.1) будет иметь все корни вещественные. Движение исследуемой механической системы будет устойчивым.

Следует заметить, что приведенное здесь доказательство устойчивости системы лишь подтверждает уже полученный выше результат об устойчивости системы при выполнении неравенств (2.2), поскольку последние совпадают с принятыми в этом пункте условиями $a_2 > 0, a_3 > 0$. В этом нетрудно убедиться, если левую часть первого из неравенств (2.2) разделить на ml , а левую часть второго из этих неравенств — на $m^2 l^2$, и затем воспользоваться обозначениями (2.5) и (3.3). Напомним, что неравенства



Фиг. 6



Фиг. 7

(2.2) были получены из условий минимума потенциальной энергии системы. Как известно [7], такого рода устойчивость системы принято называть вековой. Исследуем теперь, возможно ли существование устойчивых положений относительного равновесия в случае, если условия вековой устойчивости не выполняются.

(б). Пусть $a_2 < 0$, но a_3 по-прежнему положительно. Как и в п. (а) здесь функция (3.2) имеет те же три асимптоты. При $\lambda \rightarrow +\infty$ $\omega \rightarrow +\infty$, а при $\lambda \rightarrow -\infty$ $\omega \rightarrow -\infty$. В данном случае функция (3.4) будет иметь лишь два вещественных корня с разными знаками. Для построения ее графика найдем производную от функции (3.2). Получим

$$\omega'(\lambda) = \frac{a_0\lambda + (a_1^3 - 3a_0a_3)\lambda + (a_1^2a_3 - 3a_2)\lambda + b_2b_3}{\lambda(\lambda^2 - a_3)^2} \quad (3.6)$$

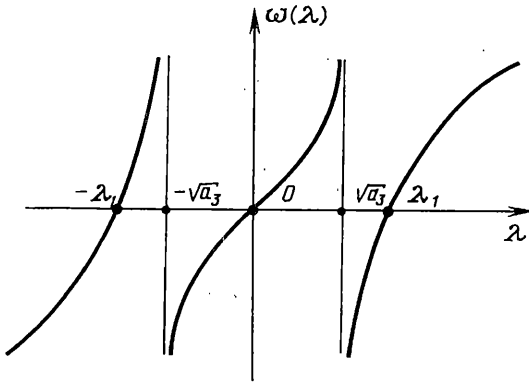
Экстремальные значения функции $\omega(\lambda)$, как известно, определяются корнями числителя производной $\omega'(\lambda)$, именно:

$$\varphi(\lambda) = b_0z^3 + b_1z^2 + b_2z + b_3 \quad (3.7)$$

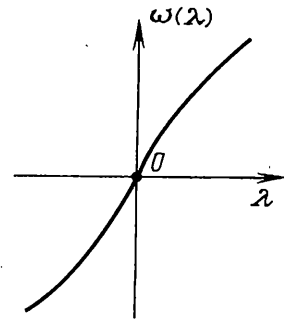
$$z = \lambda^2, \quad b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1 - 3a_0a_3, \quad b_2 = a_1a_3 - 3a_2, \quad b_3 = a_2a_3 \quad (3.8)$$

В рассматриваемом случае $b_0 > 0$, $b_3 < 0$. При использовании равенств (3.3) находим, что $b_2 = \kappa^2(a_3 - 2\mu_2)^2 - 2a_2$. Так как по условию $a_2 < 0$, то можно утверждать, что $b_2 > 0$. Таким образом, в ряду коэффициентов b_i ($i = 0, 1, 2, 3$) уравнения (3.7) возможна либо одна переменна знаков (при $b_1 > 0$), либо таких перемен будет три (при $b_1 < 0$). В первом случае согласно теореме Декарта [10] уравнение (3.7) имеет лишь один положительный корень. В результате, принимая во внимание изложенное выше и первое соотношение (3.8), примерный график функции $\omega(\lambda)$, определяемой формулой (3.2), может быть представлен на фиг. 6. Через $\pm \omega^*$ там обозначены экстремальные точки функции (3.2). Величина ω^* может быть получена посредством подстановки единственного вещественного корня уравнения (3.7) в выражение (3.2) для определения функции $\omega(\lambda)$. Как видно из фиг. 6, устойчивым движение будет при $\omega \in (-\infty, \omega^*) \cup (\omega^*, \infty)$.

Во втором случае (при $b_1 < 0$) согласно упомянутой уже теореме Декарта положительных корней уравнения (3.7) может быть либо один, либо три. В случае одного корня график функции $\omega(\lambda)$ будет аналогичен представленному на фиг. 6. Если же уравнение (3.7) имеет не один, а три вещественных корня, то посредством построений, аналогичных приведенным выше, убеждаемся, что график функции (3.2) имеет вид, представленный на фиг. 7. На этом графике ω_2^* , ω_3^* определяются аналогично изло-



Фиг. 8



Фиг. 9

женному выше при построении фиг. 6. Из его анализа убеждаемся, что для всех значений $\omega \in (-\infty, \omega_1^*) \cup (-\omega_3^*, -\omega_2^*) \cup (\omega_2^*, \omega_3^*) \cup (\omega_1^*, \infty)$ движение рассматриваемой механической системы будет устойчивым.

Таким образом, возможно существование устойчивых положений относительного равновесия и в случае, когда условия вековой устойчивости не выполняются. Подобная устойчивость, как известно, имеет характер гироскопической стабилизации, или другими словами является временной устойчивостью [7]. Подробно все возможные гироскопически стабилизированные формы движения центрифуги изучены в [11].

(с). Рассмотрим теперь поведение центрифуги на границе вековой устойчивости, когда коэффициент a_2 обращается в нуль. Тогда уравнение (3.1) будет иметь один нулевой корень $\lambda = 0$. Согласно равенствам (3.3) при этом будет выполняться соотношение

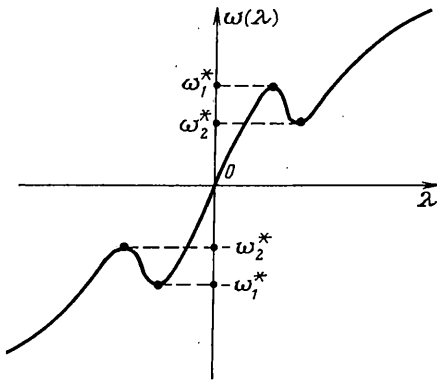
$$a_3 = 4\kappa^2\mu_2^2 / a_4 \quad (3.9)$$

При $a_4 > 0$ величина a_1 , определяющаяся вторым из равенств (3.3), может быть как положительной, так и отрицательной. Если $a_1 > 0$, то из равенства (3.2) заключаем, что функция (3.2) будет иметь нули: $\lambda = 0$ и $\lambda = \pm\sqrt{a_1/a_0}$. Кроме того, функция (3.2) в данном случае имеет две асимптоты $\lambda = \pm\sqrt{a_3}$. При $\lambda^2 = a_3$ числитель функции (3.2) может быть представлен в виде

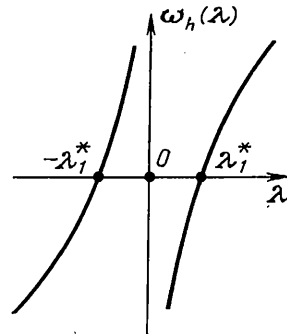
$$\frac{\kappa^2}{a_3}(a_3 - 2\mu_2)^2 < 0 \quad (3.10)$$

Последнее означает, что асимптоты функции (3.2) проходят между ее нулями. В результате в рассматриваемом случае график функции (3.2) может быть представлен на фиг. 8. Анализ этого графика показывает, что для любых ω исходное уравнение (3.1) будет иметь три действительных корня. Принимая во внимание сделанное в начале этого пункта замечание о наличии в этом уравнении нулевого корня, убеждаемся, что в данном случае движение рассматриваемой механической системы будет устойчивым при любом значении угловой скорости.

Пусть теперь при $a_2 = 0$ величина $a_4 < 0$. Тогда оказывается, что и $a_3 < 0$. Величину коэффициента a_1 также будем считать строго отрицательной. При этих предположениях убеждаемся, что функция (3.2) будет иметь лишь один нуль, именно при $\lambda = 0$. Асимптот эта функция в данном случае не имеет. Анализ коэффициентов (3.8) приводит к заключению, что $b_0 > 0$, $b_2 > 0$, $b_3 = 0$, коэффициент b_1 может быть как положительным, так и отрицательным. При $b_1 > 0$ функция (3.2) не будет иметь точек экстремума. График этой функции при перечисленных предположениях представлен



Фиг. 10



Фиг. 11

на фиг. 9. Анализируя этот график и учитывая, что в данном случае уравнение (3.1) имеет нулевой корень, убеждаемся, что движение будет неустойчивым.

Если же $b_1 < 0$, то проводя построения, аналогичные изложенным выше, убеждаемся, что график функции (3.2) будет таким, какой представлен на фиг. 10. Здесь для всех $\omega \in (-\omega_1^*, -\omega_2^*) \cup (\omega_2^*, \omega_1^*)$ движение центрифуги будет устойчивым (напомним, что исследуемое уравнение (3.1) имеет один нулевой корень). Для всех значений ω вне этих интервалов движение неустойчиво. Заметим, что ω_1^* , ω_2^* , как и ранее, являются экстремальными точками функции (3.2).

4. Исследуем теперь устойчивость движения рассматриваемой механической системы при наличии диссипативных сил. Задача об асимптотической устойчивости в данном случае сводится к исследованию корней характеристического уравнения (2.4) с комплексными коэффициентами. Согласно решению (2.3) движение будет асимптотически устойчивым, если все корни характеристического уравнения (2.4) будут находиться в верхней полуплоскости. Определим условия, при выполнении которых такое распределение корней будет иметь место.

Уравнение (2.4) представим следующим образом:

$$g(\lambda) + ih(\lambda) = 0 \quad (4.1)$$

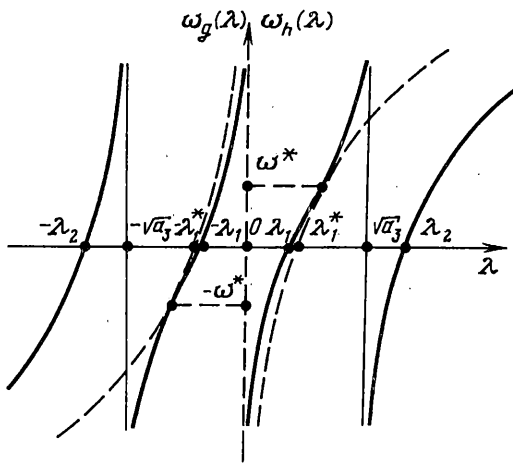
$$g(\lambda) = \rho^2 \lambda^4 - [(\rho^2 + \kappa^2)a_3 + \kappa a_4 - 4\kappa^2 \mu_2] \lambda^2 + (\kappa a_3 a_4 - 4\kappa^2 \mu_2^2) - \sigma^2 \omega \lambda (\lambda^2 - a_3)$$

$$h(\lambda) = -n\lambda [(\rho^2 + \kappa^2) \lambda^2 - \sigma^2 \omega \lambda - \kappa a_4] \quad (4.2)$$

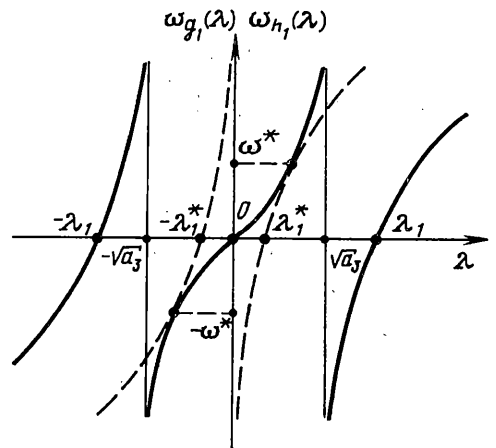
а выражения a_3 и a_4 определяются из равенств (3.3).

Исследование распределения корней относительно вещественной оси проведем с использованием теоремы Эрмита–Билера [12] и метода Ю.И. Неймарка [13]. Согласно теореме Эрмита–Билера необходимым и достаточным условием расположения корней по одну сторону от вещественной оси является требование вещественности, простоты и перемежаемости корней полиномов $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$. Рассмотрим вначале выполнение этого требования при осуществлении условий $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, или эквивалентных им неравенств (2.2).

Исследование корней полинома $g(\lambda)$ при произвольном изменении параметра ω было уже проведено в п. 3. Действительно, приравняв $g(\lambda)$ нулю и разрешив полученное уравнение относительно параметра ω , получим выражение для $\omega(\lambda)$ (в дальнейшем будем обозначать его через $\omega_g(\lambda)$), определенное равенством (3.2). График этой функции, как было показано выше, представлен на фиг. 5. Из его рассмотрения следует, что полином $g(\lambda)$ для любых значений угловой скорости ω будет иметь все четыре корня вещественные и простые.



Фиг. 12



Фиг. 13

Исследуем теперь корни полинома $h(\lambda)$, определяемого вторым равенством (4.2), также в зависимости от изменения параметра ω . Заметим, прежде всего, что этот полином имеет один нулевой корень для любых значений ω . Приравняем далее полином $h(\lambda)$ нулю, разрешим полученное уравнение относительно параметра ω и рассмотрим функцию

$$\omega_h(\lambda) = \frac{(\rho^2 + \kappa^2)\lambda^2 - a_4\kappa}{\lambda\sigma^2} \quad (4.3)$$

В данном случае величина a_4 положительна в силу положительности коэффициентов a_2 и a_3 согласно формулам (3.3). В результате функция (4.3) будет иметь два нуля при $\lambda_{1,2} = \pm \lambda^* = \pm \sqrt{a_4/(\rho^2 + \kappa^2)}$. Примерный график этой функции представлен на фиг. 11.

Определим теперь расположение друг относительно друга нулей функций $\omega_g(\lambda)$ и $\omega_h(\lambda)$. С этой целью подставим значения $\lambda = \pm \lambda^* = \pm \sqrt{a_4/(\rho^2 + \kappa^2)}$, в которых функция $\omega_h(\lambda)$ обращается в нуль, в выражение (3.4), тем самым определив в этих точках знак полинома $f(\lambda)$, при помощи которого ранее определялись нули функции $\omega_g(\lambda)$. В результате получим

$$f(\sqrt{a_4/(\rho^2 + \kappa^2)}) = f(-\sqrt{a_4/(\rho^2 + \kappa^2)}) = -\kappa^2(a_4\kappa/(\rho^2 + \kappa^2) - 2\mu_2)^2 \quad (4.4)$$

Принимая во внимание эти равенства, фиг. 4 и сделанное ранее замечание о наличии у функции $h(\lambda)$ нулевого корня при любых значениях угловой скорости ω (в том числе и при значении $\omega = 0$), убеждаемся, что корни полиномов $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ перемежаются при $\omega = 0$.

Покажем теперь, что корни исследуемых полиномов перемеживаются при произвольном значении ω . Для этого достаточно доказать, что графики функций $\omega_g(\lambda)$ и $\omega_h(\lambda)$ не имеют точек пересечения. С этой целью, используя формулы (3.2) и (4.3), найдем разность

$$\Delta\omega(\lambda) = \omega_g(\lambda) - \omega_h(\lambda) = \frac{-\kappa^2(\lambda^2 - 2\mu_2)^2}{\lambda(\lambda^2 - a_3)} \quad (4.5)$$

Разность (4.5) обращается в нуль лишь при значениях

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{2\mu_2} \quad (4.6)$$

однако, поскольку при прохождении параметром λ значений (4.6) сама функция $\Delta\omega(\lambda)$ знак не меняет, то эти значения λ соответствуют точкам касания графиков функций $\omega_g(\lambda)$ и $\omega_h(\lambda)$, примерный вид которых изображен на фиг. 12, где график функции $\omega_g(\lambda)$ показан сплошными линиями, а график функции $\omega_h(\lambda)$ – штриховыми. Следовательно, графики упомянутых функций не пересекаются, и правило перемежаемости корней полиномов $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ имеет место для любых ω , кроме двух значений $\omega_{1,2}$, которые определяются подстановкой значений (4.6) в формулу (4.3) либо (3.2). В результате этой подстановки получим искомые значения угловой скорости

$$\omega_{1,2} = \pm \omega^* = \pm \left| \frac{2\mu_2(\rho^2 - \sigma^2) - \kappa(2v_2^2 - v_1^2)}{\sigma^2 \sqrt{2\mu_2}} \right| \quad (4.7)$$

при которых нарушается правило перемежаемости корней, а, значит и условия теоремы Эрмита–Билера. Для всех остальных значений ω условия этой теоремы выполняются, и корни исходного уравнения (4.1) или, что то же, уравнения (2.4) будут лежать по одну сторону от вещественной оси. Для ответа на вопрос, в какой из полуплоскостей располагаются корни характеристического уравнения (4.1), воспользуемся теоремой Неймарка [13]. Она состоит в следующем: если в уравнении с комплексными коэффициентами вида (4.1) степень полинома $g(\lambda)$ на единицу отличается от степени полинома $h(\lambda)$, и произведение старших коэффициентов этих полиномов отрицательно, то по крайней мере один из корней этого уравнения лежит в верхней полуплоскости. Если же, кроме этого выполняются и условия теоремы Эрмита–Билера (что, как выше было показано, имеет место в данном случае), то в верхней полуплоскости будут находиться все корни полинома (4.1). Как следует из формул (4.2), для полиномов $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ теорема Неймарка имеет место. А это означает, что в рассматриваемом нами случае (когда $a_2 > 0, a_3 > 0$) движение исследуемой механической системы асимптотически устойчиво для $\omega \in (-\infty, -\omega^*) \cup (-\omega^*, \omega^*) \cup (\omega^*, \infty)$.

Наличие значения угловой скорости ω^* , при котором теряется асимптотическая устойчивость, объясняется тем, что применяемый в данной механической системе способ демпфирования поперечных колебаний приводит к появлению диссипативных сил, которые не обладают полной диссипацией; так как диссипативная функция (1.10) не является положительно определенной формой обобщенных скоростей $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\alpha}_j, \dot{\beta}_j$.

Если параметры центрифуги таковы, что коэффициент a_2 , определяемый одним из равенств (3.3), равен нулю, то полиномы $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ имеют общий корень $\lambda = 0$ для любого ω , а, следовательно, этот корень будет иметь и характеристическое уравнение (4.1). Исключим его пока из рассмотрения. Тогда, для исследования других корней этого уравнения следует аналогично вышеизложенному рассмотреть взаимное расположение корней следующих полиномов:

$$\begin{aligned} g_1(\lambda) &= \rho^2 \lambda^2 - [(\rho^2 + \kappa^2) + \kappa a_4 - 4\kappa^2] \lambda - \sigma^2 \omega (\lambda^2 - a_3) \\ h_1(\lambda) &= -n[(\rho^2 + \kappa^2) \lambda^2 - \sigma^2 \omega \lambda - \kappa a_4] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Повторяя рассуждения, аналогичные вышеприведенным, получим картину взаимного расположения корней полиномов (4.8), изображенную на фиг. 13. Как и в предыдущем случае приходим к выводу, что перемежаемость корней полиномов $g_1(\lambda)$ и $h_1(\lambda)$ имеет место для всех ω , кроме двух значений $\omega_{1,2} = \pm \omega^*$, определяемых по-прежнему из формулы (4.7). Условия теоремы Неймарка здесь также выполняются. Поэтому и в данном случае приходим к выводу об асимптотической устойчивости движения, однако ввиду наличия нулевого корня характеристического уравнения само положение относительного равновесия будет иметь постоянное отклонение от вертикального положения, и это отклонение определяется из начальных условий.

Здесь была исследована асимптотическая устойчивость системы в случае, когда параметры ее удовлетворяют условиям $a_2 \geq 0, a_3 > 0$. Дальнейшие исследования по-

казали, что при других соотношениях между параметрами системы корни полиномов $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ перемежаться не будут ни при одном значении ω и, следовательно, движение системы будет неустойчивым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малащенко С.В. Некоторые экспериментальные исследования, относящиеся к вращению тел // ПМТФ. 1960. № 3. С. 205–211.
2. Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е. Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. М.: Наука, 1991. 330 с.
3. Рубановский В.Н., Румянцев В.В. О стационарных движениях тяжелого симметричного твердого тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 3–7.
4. Мирер С.А., Одинцова С.А., Сарычев В.А. Предельные стационарные режимы твердого тела на струнном подвесе // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 38–44.
5. Карман Т., Био М. Математические методы в инженерном деле. – М.; Л.: Гостехиздат, 1946, 423 с.
6. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
7. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 532 с.
8. Ишлинский А.Ю., Темченко М.Е. Об устойчивости вращения на струне твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной идеальной несжимаемой жидкостью // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 30–41.
9. Темченко М.Е. Об исследовании критериев устойчивости движения подвешенного на струне твердого тела и волчка при наличии у них эллипсоидальной полости, наполненной жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 1. С. 26–31.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968, 431 с.
11. Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е. Об устойчивости высокоскоростной центрифуги на электромагнитном подвесе: Препринт № 587. М.: ИПМ РАН, 1997. 48 с.
12. Чеботарев Н.Г., Мейман Н.Н. Проблема Рауса–Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1949. Т. 26. 332 с.
13. Неймарк Ю.И. К задаче распределения корней полиномов // Докл. АН СССР. 1947. Т. 58. № 3. С. 357–360.

Москва, Киев

Поступила в редакцию
24.IX.1997

Зав. редакцией *В.М. Кутырева*

Технический редактор *Т.В. Скворцова*

Сдано в набор 2.04.98. Подписано к печати 19.05.98. Формат бумаги 70 × 100 ¹/₁₆

Офсетная печать Усл.печ.л. 16,9. Усл.кр.-отт. 6,8 тыс. Уч.-изд.л. 20,3. Бум.л. 6,5

Тираж 398 экз. Зак 3515

Адрес редакции: 117526 Москва, проспект Вернадского, д. 101. Тел. 434-35-38

Отпечатано в типографии "Наука", 121099, Москва, Шубинский пер., 6