

© 1998 г. С.Е. АЛЕКСАНДРОВ, Р.В. ГОЛЬДШТЕЙН

О РАЗРУШЕНИИ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ВСЛЕДСТВИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ТРЕЩИНЫ КОНЕЧНОЙ ПЛОЩАДИ

Предположение о непрерывном развитии трещины в упругопластическом теле приводит к парадоксальному результату: не требуется энергии для раскрытия трещины [1]. В работе [1] предложено вводить малую конечную область перед концом трещины, где диссипируется энергия. При этом предполагается, что развитие трещины происходит скачкообразно в соответствии с размером введенной области. В [2] предложен подход, основанный на введении параметра поврежденности в модель материала вблизи кончика трещины. Общее состояние механики материалов при наличии дефектов и перспективы ее развития применительно к механике разрушения описаны в [3]. В публикуемой работе используется подход, основанный на концепции возникновения трещины конечной площади в хрупком материале, применявшийся в [4, 5]. Этот подход позволяет описать возникновение трещины конечной площади, не рассматривая детально процесса ее развития, на основе энергетического баланса и предложенного принципа минимума требуемой энергии. Задачи с простейшей геометрией, бесконечный цилиндр и шар под действием гидростатического растяжения, были решены на основе этого подхода в [4], а в [5] была рассмотрена практическая проблема – возникновение трещины в сварной трехслойной полосе при растяжении. В первом случае было получено аналитическое решение, во втором были использованы принципы Лагранжа и Кастилиано для получения оценок упругой энергии. В публикуемой работе выполнено аналитическое исследование деформации и разрушения конечного цилиндра с варьируемым уровнем перемещений на боковой поверхности и торцах. Рассмотрены два вида возможных состояний при возникновении трещины: трещина цилиндрической формы и круговая трещина, параллельная торцам цилиндра. Установлены пределы применимости результатов, накладываемые возможностью перехода цилиндра в пластическое состояние.

Отметим, что применяемый подход аналогичен подходам [6, 7]. В [8] предложен метод, основанный на концепции мгновенного возникновения трещин без деформации, то есть принималось, что образец (конструкция) разбивается на жесткие элементы. Вариационный принцип, учитывающий образование трещин отрыва, был доказан в [9] для жесткопластического материала. Приложение этого принципа к одной задаче механики разрушения дано в [10]. Для волокнистых композитов, в которых пластическая матрица усилена хрупкими волокнами, предположение о мгновенном хрупком разрушении волокна было введено в [11] и расчеты привели к хорошему согласию с экспериментальными данными. Для таких материалов вариационный принцип, доказанный в [9], был обобщен в [12]. Приложение этого принципа позволило установить параметры, при которых происходит разрушение при прокатке трехслойных полос [13].

1. Основная гипотеза. Пусть линейно-упругое тело деформируется под действием приложенных поверхностных сил и смещений, которые соответствуют корректной постановке задачи теории упругости. Для этого тела существует непрерывное решение, удовлетворяющее уравнениям теории упругости и краевым условиям и определяющее упругую энергию, запасенную в теле w_0 . Наряду с этим состоянием тела введем другие состояния, которые будем называть возможными, допускающие поля смещений с разрывами нормальных составляющих на некоторых поверхностях (трещины отрыва). Эти возможные поля напряжений и смещений всюду удовлетворяют уравнениям теории упругости, за исключением поверхности разрыва смещений, заданным краевым условиям и условиям на поверхности предполагаемой трещины. В

этом новом состоянии упругая энергия, запасенная (точнее оставшаяся после образования трещины) в теле будет равна w_1 . Тогда в предположении о том, что энергия, затраченная на образование единицы площади трещины, пропорциональна ее площади, энергетический баланс может быть записан в виде

$$w_0 = w_1 + 2\gamma s \quad (1.1)$$

Здесь γ – поверхностная энергия, s – площадь возникшей трещины. Величины w_0 , w_1 и s зависят от возможного состояния. Основная гипотеза состоит в том, что реализуется то из возможных состояний, которое соответствует минимальной величине w_0 . При этом из числа возможных состояний исключается недеформированное состояние, так как реальные материалы не рассыпаются без приложенных внешних воздействий. С другой стороны, состояние без трещин относится к числу возможных.

2. Постановка задачи. Рассмотрим круговой цилиндр, радиус которого равен R и длина $2L$. Введем цилиндрическую систему координат $r\theta z$. Пусть заданные радиальные смещения точек поверхности $r = R$ будут $u_r = u_0$, а заданные осевые смещения точек торцевых поверхностей $z = \pm L$ будут $u_z = u_0$. Под действием таких смещений в цилиндре может быть достигнут высокий уровень степени трехосности, который зависит как от величин смещений, так и от геометрических размеров и свойств материала. В этом случае высокий уровень напряжений не обязательно приводит к появлению пластических деформаций. Принимая во внимание характер заданных перемещений, можно предположить, что базисные вектора цилиндрической системы координат определяют в каждой точке главные оси тензоров напряжений и деформаций. Тогда закон Гука может быть записан в виде

$$\sigma_r = \lambda e + 2Ge_r \quad (2.1)$$

$$\sigma_\theta = \lambda e + 2Ge_\theta \quad (2.2)$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2Ge_z \quad (2.3)$$

Здесь $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ – компоненты тензора напряжений, e_r, e_θ, e_z – компоненты тензора деформаций, $e = e_r + e_\theta + e_z$, λ и G – постоянные Ламе.

Единственное нетривиальное уравнение равновесия имеет вид

$$\partial \sigma_r / \partial r + (\sigma_r - \sigma_\theta) / r = 0 \quad (2.4)$$

Краевые условия для осевого смещения удовлетворяются, если положить $u_z = u_0 z / L$. Тогда $e_z = u_0 / L$ и подставляя (2.1) и (2.2) в (2.4) получим уравнение для определения u_r , общее решение которого имеет вид

$$u_r = c_1 r + c_2 r^{-1} \quad (2.5)$$

Краевое условие для u_r , $u_r = u_0$ при $r = R$ дает

$$u_0 = c_1 R + c_2 R^{-1} \quad (2.6)$$

Вычисляя по (2.5) деформации и подставляя их в (2.1), найдем

$$\sigma_r = \lambda(2c_1 + u_0 L^{-1}) + 2G(c_1 - c_2 r^{-2}) \quad (2.7)$$

3. Упругая энергия в цилиндре без трещины. В этом случае, предполагая ограниченность u_r при $r = 0$, из (2.5) получим $c_2 = 0$ и из (2.6) следует $c_1 = u_0 R^{-1}$. Тогда с помощью (2.5) могут быть определены деформации

$$e_r = u_0 R^{-1}, \quad e_\theta = u_0 R^{-1}, \quad e_z = u_0 L^{-1}, \quad e = 2u_0 R^{-1} + u_0 L^{-1} \quad (3.1)$$

и напряжения из (2.1)–(2.3):

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \lambda(2\nu_0 R^{-1} + u_0 L^{-1}) + 2G\nu_0 R^{-1} \\ \sigma_\theta &= \lambda(2\nu_0 R^{-1} + u_0 L^{-1}) + 2G\nu_0 R^{-1} \\ \sigma_z &= \lambda(2\nu_0 R^{-1} + u_0 L^{-1}) + 2G\nu_0 L^{-1}\end{aligned}\quad (3.2)$$

Плотность упругой энергии в рассматриваемом случае определяется выражением $\delta w = \frac{1}{2}(\sigma_r e_r + \sigma_\theta e_\theta + \sigma_z e_z)$. Тогда из (3.1) и (3.2) следует

$$\delta w_0 = 2(\lambda + G)v^2 + 2\lambda\nu u + (\lambda/2 + G)u^2 \quad (3.3)$$

Здесь $\nu = \nu_0 R^{-1}$ и $u = u_0 L^{-1}$. Интегрируя (3.3) по объему цилиндра получим

$$w_0 = \pi R^2 L [2(\lambda + G)v^2 + 2\lambda\nu u + (\lambda/2 + G)u^2] \quad (3.4)$$

4. Упругая энергия в цилиндре с трещиной. Рассмотрим два возможных состояния цилиндра с трещиной. В первом состоянии положим, что поверхность трещины определяется уравнением $r = r_0$ при $0 < r_0 \leq R$, а во втором – уравнением $z = \text{const}$. В последнем случае положение трещины не имеет значения.

Если первое состояние реализуется, то возникшая трещина разделяет исходный цилиндр на две части: внутреннюю часть, имеющую форму кругового сплошного цилиндра, и внешнюю часть в форме кругового полого цилиндра. После возникновения трещины краевое условие при $r = r_0$ станет

$$\sigma_r(r_0) = 0 \quad (4.1)$$

Так как перемещения должны быть ограничены, то для внутреннего цилиндра в выражении (2.5) необходимо положить $c_2 = 0$. Тогда из (2.7) и краевого условия (4.1) следует $c_1 = -\lambda u / [2(\lambda + G)]$. Таким образом $\sigma_r = 0$ и $\sigma_\theta = 0$ во всех точках внутреннего цилиндра и плотность упругой энергии в нем будет $\delta w_{ii} = \frac{1}{2}\sigma_z u$. Определяя σ_z из (2.3), найдем

$$\delta w_{ii} = \frac{1}{2} G u^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda + G} + 2 \right)$$

Интегрируя это выражение по объему внутреннего цилиндра получим

$$w_{ii} = \frac{1}{2} \pi r_0^2 L G u^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda + G} + 2 \right) \quad (4.2)$$

Во внешнем полом цилиндре из (2.7) и (4.1) следует

$$\lambda(2c_1 + u) + 2G(c_1 - c_2 r_0^{-2}) = 0 \quad (4.3)$$

Тогда (2.6) и (4.3) образуют систему для определения c_1 и c_2 , решение которой имеет вид

$$c_1 = \nu - \frac{(r_0 / R)^2 [2\nu(\lambda + G) + \lambda u]}{2[G + (\lambda + G)(r_0 / R)^2]}$$

$$c_2 = \frac{r_0^2 [2\nu(\lambda + G) + \lambda u]}{2[G + (\lambda + G)(r_0 / R)^2]}$$

Подставляя эти выражения в (2.5), найдем деформации

$$e_r = v - \frac{[2\nu(\lambda + G) + \lambda u]}{2[G + (\lambda + G)(r_0/R)^2]} [(r_0/R)^2 + (r_0/r)^2]$$

$$e_\theta = v - \frac{[2\nu(\lambda + G) + \lambda u]}{2[G + (\lambda + G)(r_0/R)^2]} [(r_0/R)^2 - (r_0/r)^2] \quad (4.4)$$

$$e_z = u$$

и теперь из (2.1)–(2.3) напряжения

$$\sigma_r = \lambda(2\nu + u) + 2Gv - \frac{[2\nu(\lambda + G) + \lambda u]}{[G + (\lambda + G)(r_0/R)^2]} \times [(\lambda + G)(r_0/R)^2 + G(r_0/r)^2]$$

$$\sigma_\theta = \lambda(2\nu + u) + 2Gv - \frac{[2\nu(\lambda + G) + \lambda u]}{[G + (\lambda + G)(r_0/R)^2]} \times [(\lambda + G)(r_0/R)^2 - G(r_0/r)^2] \quad (4.5)$$

$$\sigma_z = \lambda(2\nu + u) + 2Gu - \lambda \frac{[2\nu(\lambda + G) + \lambda u]}{[G + (\lambda + G)(r_0/R)^2]} \left(\frac{r_0}{R}\right)^2$$

Из (4.4) и (4.5) плотность упругой энергии в полном цилиндре определяется так

$$\delta w_{1e} = \{t^2[\lambda + G + G(R/r)^4] - 2t(2\lambda\nu + 2Gv + \lambda u) + 4v^2(\lambda + G) + u^2(\lambda + 2G) + 4\lambda\nu u\} / 2 \quad (4.6)$$

$$t = \frac{(r_0/R)^2 [2\nu(\lambda + G) + \lambda u]}{G + (\lambda + G)(r_0/R)^2}$$

Интегрируя (4.6) по объему внешнего полого цилиндра, найдем

$$w_{1e} = \pi R^2 L \{ [t^2(\lambda + G) - 2t(2\lambda\nu + 2Gv + \lambda u) + 4v^2(\lambda + G) + u^2(\lambda + 2G) + 4\lambda\nu u] \times [1 - (r_0/R)^2] - t^2 G [1 - (R/r_0)^2] \} / 2 \quad (4.7)$$

Общая упругая энергия, оставшаяся после образования трещины, определяется из (4.2) и (4.7)

$$w_1 = w_{1i} + w_{1e} \quad (4.8)$$

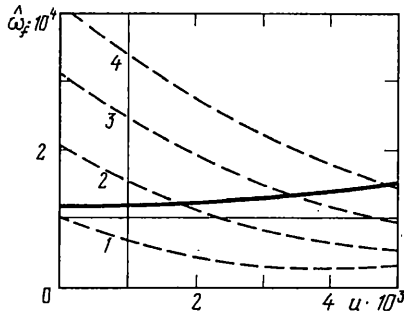
Если реализуется второе состояние и трещина возникает перпендикулярно к оси z , то, очевидно, $\sigma_z = 0$ во всех точках деформируемого объема и $c_2 = 0$ в (2.5). Из (2.6) следует $c_1 = v$ и, тогда, $\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = v$. Напряжения σ_r и σ_θ определяются из (2.1) и (2.2) по формулам $\sigma_r = \sigma_\theta = 2\nu G(2G + 3\lambda)/(2G + \lambda)$. Плотность упругой энергии будет $\delta w_1 = 2\nu^2 G(2G + 3\lambda)/(2G + \lambda)$. Интегрируя по объему, найдем

$$w_1 = 2\pi R^2 L v^2 G(2G + 3\lambda) / (2G + \lambda) \quad (4.9)$$

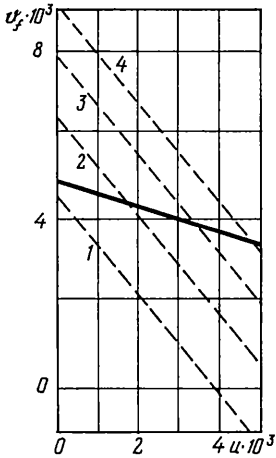
5. Условия разрушения. При возникновении трещины на поверхности $r = r_0$ уравнение энергетического баланса (1.1) примет вид

$$w_0 = w_1 + 4\pi\gamma r_0 L \quad (5.1)$$

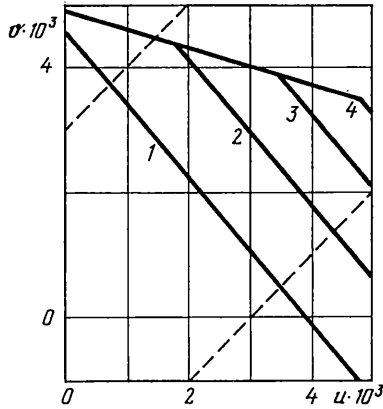
Здесь w_0 определяется выражением (3.4), а w_1 – (4.8). Будем полагать, что u – произвольная, но фиксированная величина, а v – монотонно возрастает. В выбранном классе все возможные соотношения определяются величиной r_0 . Следуя предложенному подходу, необходимо найти минимум w_0 , считая эту величину функцией от r_0 . Из (3.4) следует, что минимум w_0 может достигаться в точке, где $dv/dr_0 = 0$. Неявная зависимость v от r_0 определяется уравнением (5.1).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Введем безразмерные величины $\hat{r}_0 = r_0 / R$, $\hat{w}_0 = w_0 / (GR^2L)$, $\hat{w}_1 = w_1 / (GR^2L)$, $\hat{\lambda} = \lambda / G$, $\hat{\gamma} = \gamma / (GR)$. Тогда уравнение (5.1), с учетом (3.4), (4.2) и (4.7), примет вид

$$2(\hat{\lambda} + 1)v^2 + 2\hat{\lambda}v u + (\hat{\lambda} / 2 + 1)u^2 = \frac{1}{2} \hat{r}_0^2 u^2 \left(\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda} + 1} + 2 \right) + \{ [t^2(\hat{\lambda} + 1) - 2t(2\hat{\lambda}v + 2w + \hat{\lambda}u) + 4v^2(\hat{\lambda} + 1) + u^2(\hat{\lambda} + 2) + 4\hat{\lambda}v u](1 - \hat{r}_0^2) - t^2(1 - \hat{r}_0^{-2}) \} / 2 + 4\hat{\gamma}\hat{r}_0$$

$$t = \hat{r}_0^2 [2v(\hat{\lambda} + 1) + \hat{\lambda}u] / [1 + (\hat{\lambda} + 1)\hat{r}_0^2]$$

При заданном u это уравнение приводится к квадратному уравнению относительно v , которое имеет решение

$$v = -\frac{\hat{\lambda}u}{2(\hat{\lambda} + 1)} \pm \sqrt{\frac{2\hat{\gamma}[1 + (\hat{\lambda} + 1)\hat{r}_0^2]}{\hat{r}_0(\hat{\lambda} + 2)(\hat{\lambda} + 1)}} \quad (5.2)$$

Отсюда видно, что dv/dr_0 не зависит от u и экстремальное значение v , а следовательно и w_0 , достигается при $\hat{r}_0 = (\hat{\lambda} + 1)^{-1/2}$. Анализ второй производной, $d^2v/d\hat{r}_0^2$, показывает, что минимальному значению w_0 соответствует знак "плюс" перед радикалом в (5.2). Найденное значение \hat{r}_0 , при котором достигается минимум w_0 , равно соответствующему значению для случая плоской деформации рассматриваемого цилиндра [4]. Однако требуемая для разрушения величина энергии, \hat{w}_f , и радиальное

перемещение зависят от u . Из (5.2) следует, что величина безразмерного радиального перемещения при разрушении, $v = v_f$, является линейной функцией от u и при $\hat{r}_0 = (\hat{\lambda} + 1)^{-1/2}$ определяется выражением

$$v_f = -\frac{\hat{\lambda}u}{2(\hat{\lambda} + 1)} + 2[\hat{\gamma} / (\hat{\lambda} + 2)]^{1/2}(\hat{\lambda} + 1)^{1/4} \quad (5.3)$$

Зависимость \hat{w}_f от u представлена на фиг. 1 (сплошная линия).

При возникновении трещины перпендикулярной к оси z уравнение энергетического баланса (1.1) имеет вид $\hat{w}_0 = \hat{w}_1 + 2\pi\hat{\gamma}R/L$. Подставляя сюда выражения (3.10) и (4.9), найдем

$$2(\hat{\lambda} + 1)v^2 + 2\hat{\lambda}vu + (\hat{\lambda}/2 + 1)u^2 = 2v^2(2 + 3\hat{\lambda})/(2 + \hat{\lambda}) + 2\hat{\gamma}R/L \quad (5.4)$$

В этом случае величина энергии \hat{w}_0 не зависит от положения трещины, поэтому ее минимальное значение при разрушении определяется из (3.4) при $v = v_f$, величина которого следует из (5.4):

$$v_f = -\frac{(2 + \hat{\lambda})}{2\hat{\lambda}}u + \frac{1}{\hat{\lambda}}\left[\hat{\gamma}\frac{R}{L}(2 + \hat{\lambda})\right]^{1/2} \quad (5.5)$$

Таким образом, эта величина, а следовательно и соответствующая мощность, зависит от геометрического параметра R/L в отличие от предыдущего случая. Зависимость минимального значения \hat{w}_0 при разрушении, \hat{w}_f , от u при различных значениях R/L показана на фиг. 1 (пунктирные линии, 1 – $R/L = 1$, 2 – $R/L = 2$, 3 – $R/L = 3$, 4 – $R/L = 4$). Точки пересечения пунктирных и сплошной линий на фиг. 1 определяют переход от разрушения путем образования круговой трещины к разрушению путем образования трещины перпендикулярной к оси z .

На фиг. 2 показаны зависимости величины радиального перемещения при разрушении, v_f , от величины u , рассчитанные по (5.3) для случая трещины по цилиндрической поверхности (сплошная линия) и по (5.5) для случая круговой трещины, перпендикулярной оси z (пунктирные линии, 1 – $R/L = 1$, 2 – $R/L = 2$, 3 – $R/L = 3$, 4 – $R/L = 4$).

В расчетах принимались характерные для стали значения $\hat{\lambda} = 1,5$ и модуля сдвига $G = 75 \times 10^9$ Па. Величина $\hat{\gamma}$ была пересчитана по стандартной формуле механики разрушения с использованием величины критического коэффициента интенсивности напряжений $K_{Ic} = 2,10^8$ Па $\sqrt{м}$. Это значение K_{Ic} соответствует стали 17ГС и приведено в [14].

6. Предельное пластическое состояние. Одним из ограничений предложенного подхода является переход конструкции (образца) в пластическое состояние до достижения условий, при которых возникает трещина. В большинстве случаев переход материала в пластическое состояние определяется условиями текучести Мизеса или Треска. Так как напряжения σ_r , σ_θ и σ_z являются главными и из (3.2) следует, что $\sigma_r = \sigma_\theta$, то эти условия приводятся к единому выражению, если предел текучести при одноосном растяжении, σ_Y , принят за основную величину, характеризующую переход в пластическое состояние. Из (3.2) условие текучести может быть представлено в виде

$$2G|v - u| = \sigma_Y \quad (6.1)$$

Использованной величине K_{Ic} соответствует величина $\sigma_Y = 450 \times 10^6$ Па [14]. На фиг. 3 сплошной линией показана величина u , при которой наступает разрушение, для

различных значений R/L ($1 - R/L = 1$, $2 - R/L = 2$, $3 - R/L = 3$, $4 - R/L = 4$) и штриховыми линиями – величины ν , вычисленные из (6.1), как функции от u . Точки пересечения сплошных и штриховых линий определяют пределы применимости теории, основанной на линейноупругой модели материала. В координатах u , ν каждому пути нагружения в упругой области соответствует некоторая линия I , исходящая из начала координат. Если эта линия достигает сплошной линии между пунктирными линиями (фиг. 3), то наступает хрупкое разрушение с цилиндрической или плоской трещиной, если же линия I достигает одной из пунктирных линий, то наступает пластическое течение.

7. Обсуждение подхода. Предположение о непрерывном развитии трещины приводит к парадоксальному результату, что не требуется энергии для развития трещины [1]. Предложенный подход позволяет преодолеть этот парадокс, но представляет из себя, в определенном смысле, другой крайний случай: возникает трещина (отделение частей материала) на некоторой площади конечных размеров. В реальных пластических материалах процесс образования трещины состоит из зарождения, роста и слияния пор, например [15, 16]. Для описания этого явления и преодоления парадокса, связанного с непрерывным развитием трещины, вводят представления о некоторой зоне, малого, но конечного размера, где диссипируется энергия и на размер которой прорастает трещина [1]. Таким образом, рост трещины в этом случае представляется скачкообразным процессом. Другая концепция, основанная на модели пластического пористого материала, предложена в [2]. Отметим, что если развитие пор может быть описано в рамках теорий пластичности пористого материала, предложенных, например, в [17–19], то для определения условий их зарождения должны быть введены дополнительные предположения, один из возможных критериев изложен в [15]. Поскольку зарождения пор обычно происходит разрушением частиц второй фазы или их отделением от пластической матрицы, то естественно рассмотреть различные механизмы разрушения в начальной и конечной стадиях разрушения. Некоторые материалы, как отмечено например в [20], являются по сути композитами, состоящими из пластической матрицы, усиленной хрупкими включениями. В этой работе показано, что зарождение пор происходит хрупким разрушением карбидов. Таким образом, развитие предложенного в настоящей работе подхода может заключаться в предположении, что отделение частей материала на поверхности возникшей "трещины" конечной площади происходит только по частицам второй фазы. Тогда в последний член уравнения (1.1) должна входить величина γ , определенная для хрупкого материала частиц второй фазы, и площадь s должна быть частью общей площади возникшей трещины, пропорциональной объемной доле включений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kfouri A.P., Rice J.R.* Elastic/plastic separation energy rate for crack advance in finite growth steps // *Fracture 1977: Advances in Research on the Strength and Fracture of Materials*. Ed. D.M.R. Taplin, N.Y.: Pergamon Press. 1978. V. 1. P. 48–59.
2. *Bui H.D., Van K.D.* Some recently-developed analytical aspects of fracture mechanics // *Nuclear Engng Design*. 1987. V. 105. № 1. P. 3–9.
3. *Chaboche J.L.* Continuum damage mechanics: Present state and future trends // *Nuclear Engng Design*. 1987. V. 105. № 1. P. 19–33.
4. *Александров С.Е., Гольдштейн Р.В.* О мгновенном возникновении трещин конечной площади // *Изв. РАН. МТТ*. 1998. № 1. С. 54–61.
5. *Alexandrov S.E., Goldstein R.V.* On limit load and constraint in mismatched plate under tension // *Mis-Match'96–2nd Int. Symp. on Mis-Matching of Welds*. Eds. K.-H. Schwalbe and M. Kocak, Geesthacht. GKSS, 1977. P. 735–745.
6. *Гольдштейн Р.В., Ентов В.М.* Некоторые качественные методы в механике разрушения // *Препринт ИПМ АН СССР*. № 76. М., 1976. 53 с.

7. Шестериков С.А., Юмашева М.А. К проблеме терморазрушения при быстром нагреве // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 128–135.
8. Ивлев Д.Д. К теории разрушения твердых тел // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 618–624.
9. Александров С.Е., Гольдштейн Р.В. Вариационный принцип в теории пластического течения с учетом образования трещин отрыва // Докл. РАН. 1995. Т. 342. № 4. С. 484–486.
10. Александров С.Е., Гольдштейн Р.В. Жесткопластический анализ предельного равновесия краевой трещины отрыва в прямоугольной пластине // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 4. С. 697–701.
11. Spencer A.J.M. Theory of the failure of ductile materials reinforced by elastic fibres // Intern. J. Mech. Sci. 1965. V. 7. № 3. P. 197–209.
12. Александров С.Е., Гольдштейн Р.В. Вариационный принцип для идеального жесткопластического материала, учитывающий образование трещин отрыва, и его приложения // Тр. 9-й Конф. по прочности и пластичности. М., 1996. Т. 1. С. 1–6.
13. Alexandrov S.E., Chicanova N.N. Upper bound of torsion moment and fracture by rolling of three layer sandwich sheets // J. Technol. Plasticity. 1995. V. 20. № 1–2. P. 59–72.
14. Красовский А.Я., Красико В.Н. Трещиностойкость сталей магистральных трубопроводов. Киев: Наук. думка, 1990. 173 с.
15. Tvergaard V. Mechanical modelling of fracture // Constitutive Relations and their Physical Basis: Proc. 8th Riso Intern. Symp. on Metallurgy and Material Sciences / Eds S.I. Anderson et al. Roskilde: Riso Nat. Lab., 1987. P. 173–189.
16. Riedel H. Fracture mechanisms // Materials Science and Technology: A Comprehensive Treatment. V. 6. Plastic deformation and fracture of materials / Ed. H. Mughrabi. Weinheim: VCH, 1993. P. 565–633.
17. Gurson A.L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Pt 1. Yield criteria and flow rules for porous ductile media // Trans. ASME. Ser. H.J. Engng. Mater. Technol. 1977. V. 99. № 1. P. 2–15.
18. Green R.J. A plasticity theory for porous solids // Intern. J. Mech. Sci. 1972. V. 14. № 4. P. 215–224.
19. Друянов Б.А. Прикладная теория пластичности пористых тел. М.: Машиностроение, 1989. 164 с.
20. Lesuer D.R., Syn C.K., Sherby O.D. Fracture behavior of spheroidized hypereutectoid steels // Acta Metallurg. Mater. 1995. V. 43. № 10. P. 3827–3835.

Москва

Поступила в редакцию
23.VII.1997