

УДК 539.3:534.1

© 1998 г. А.М. КОВАЛЕВ

**РЕАКЦИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ  
НА СВЕРХСЕЙСМИЧЕСКУЮ СТУПЕНЬКУ  
НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ**

Получено аналитическое решение задачи для нелинейно-упругой полуплоскости в случае, когда зависимость модуля сдвига от интенсивности деформаций сдвига слабая. Зависимость модуля объемного сжатия от объемной деформации может быть произвольной. Решение аналогичной задачи для линейно-упругой полуплоскости [1] является частным случаем полученного решения. Подробно рассмотрен случай, когда кривая объемного сжатия и кривая сдвига выпуклы вверх. Получено условие возбуждения волны нагружения по объемному сжатию и интенсивности деформаций сдвига. Эта волна описывает нагружение грунтового полупространства слабой воздушной ударной волной, когда уравнения состояния грунта – деформационные, и нагрузочные ветви диаграмм объемного сжатия и сдвига можно считать выпуклыми вверх (точки перегиба лежат выше). Аналогично можно рассмотреть случаи, когда одна или обе кривые выпуклы вниз. Численное решение в случае, когда обе кривые выпуклы вниз, получено в [2].

В [3, 4] рассматривается аналогичная задача для полуплоскости с уравнениями С.С. Григоряна. Модуль объемного сжатия много больше модуля сдвига. Получено аналитическое решение в случае, когда кривая объемного сжатия выпукла вниз, а модуль сдвига постоянен. Это решение описывает нагружение грунтового полупространства сильной воздушной ударной волной, когда нижняя, выпуклая вверх, часть кривой объемного сжатия несущественна, а сдвиговые деформации испытывают пластическое течение.

В [5] рассматривается задача о бегущей нагрузке треугольного профиля на полуплоскости с уравнениями "пластической жидкости", которые применяются в случае очень сильной нагрузки, когда тензор напряжений можно считать шаровым. Диаграмма объемного сжатия взята линейной при нагружении и разгрузке. Получено аналитическое решение.

Области применимости решений были уточнены с помощью монографии [6]. В [7] решается задача о бегущей нагрузке на поверхности зернистой среды с внутренним кулоновским трением без сцепления. На приложение к грунту нацелены также работы [8 – 10], посвященные одномерной задаче о косом ударе по поверхности полупространства.

**1. Постановка задачи.** Разрешающую систему уравнений будем выводить в деформациях, подставляя в уравнения движения

$$\sigma_{ij,j} = \rho v_{i,t} \quad (1.1)$$

формулы закона Гука [11]:

$$\sigma_{ij} = -\sigma(e)\delta_{ij} + 2G(\bar{e})(\gamma_{ij} + (e/3)\delta_{ij}) \quad (1.2)$$

$$e = -\gamma_{ii}, \quad \bar{e}^2 = (\gamma_{ij} + (e/3)\delta_{ij})(\gamma_{ij} + (e/3)\delta_{ij})/2$$

и замыкая их формулами для скоростей деформаций

$$\gamma_{ij,t} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2 \quad (1.3)$$

В закон Гука входят две функции:

$$-\sigma_{ii}/3 = \sigma = \sigma(e), \quad \sqrt{(\sigma_{ij} + \sigma\delta_{ij})(\sigma_{ij} + \sigma\delta_{ij})}/2 = \bar{\sigma} = 2G(\bar{e})\bar{e} \quad (1.4)$$

характеризующие сопротивление материала изменению объема и сдвигам. Здесь давление  $\sigma$  и объемная деформация  $e$  положительны при сжатии, интенсивность касательных напряжений  $\bar{\sigma}$  и интенсивность деформаций сдвига  $\bar{e}$  положительны.

Пусть нелинейно-упругая среда занимает полупространство  $x_2 > 0$  и на его границе задана ступенька нормального давления

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = -pH(x_1 + Dt), \quad x_2 = 0 \quad (1.5)$$

движущаяся в отрицательном направлении оси  $x_1$  со скоростью  $D$  уже в течение очень длительного времени. Под действием нагрузки (1.5), не зависящей от  $x_3$ , полупространство находится в состоянии плоской деформации

$$v_{1,3} = v_{2,3} = 0, \quad v_3 = 0, \quad \gamma_{13} = \gamma_{23} = \gamma_{33} = 0$$

Можно показать [3], что граничные условия (1.5) приводят к автомодельной задаче, в которой все искомые функции зависят только от  $\lambda = (x_1 + Dt) / x_2$ .

Уравнения (1.1), (1.3) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} - \lambda\sigma'_{12} &= \rho Dv'_1, & \sigma'_{12} - \lambda\sigma'_{22} &= \rho Dv'_2 \\ D\gamma'_{11} &= v'_1, & D\gamma'_{22} &= -\lambda v'_2, & D\gamma'_{12} &= (v'_2 - \lambda v'_1) / 2 \end{aligned}$$

где штрих обозначает производную по  $\lambda$ . Исключая  $v_1, v_2$ , получим

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} - \lambda\sigma'_{12} &= \rho D^2\gamma'_{11}, & \sigma'_{12} - \lambda\sigma'_{22} &= \rho D^2(2\gamma'_{12} + \lambda\gamma'_{11}) \\ \lambda\gamma'_{12} &= -(\gamma'_{22} + \lambda^2\gamma'_{11}) / 2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Решив задачу в деформациях, скорости смещений найдем из уравнений

$$v_1 = D\gamma_{11} + C, \quad v'_2 = -D\gamma'_{22} / \lambda \quad (1.7)$$

Плоскую деформацию представим в виде объемной и двух сдвигов

$$\gamma_{11} = (-e + f) / 2, \quad \gamma_{22} = (-e - f) / 2, \quad \gamma_{12} = \varepsilon_{12} / 2 \quad (1.8)$$

и перепишем закон Гука (1.2) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\sigma(e) + G(\bar{e})(-e/3 + f), & \sigma_{22} &= -\sigma(e) + G(\bar{e})(-e/3 - f) \\ \sigma_{33} &= -\sigma(e) + 2G(\bar{e})e/3, & \sigma_{12} &= G(\bar{e})\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\bar{e}^2 = e^2 / 12 + (f^2 + \varepsilon_{12}^2) / 4 \quad (1.10)$$

Сдвиг  $\varepsilon_{12}$  (сдвиг  $f$ ) – это изменение угла между сторонами (диагоналями) элементарного прямоугольника.

Подставляя (1.8), (1.9) в (1.6), получаем разрешающую систему

$$\begin{aligned} A(\lambda, \mathbf{u})\mathbf{u}' &= 0, & \mathbf{u} &= (e, f, \varepsilon_{12})^T \\ a_{ij} &= a_{ij}^{\circ} + \varepsilon a_{ij}^1, & \varepsilon &= G' / 4\rho D^2\bar{e} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} a_{11}^{\circ} &= -M_1^{-2} + M_2^{-2} + 1/2, & a_{12}^{\circ} &= M_2^{-2} - 1/2, & a_{13}^{\circ} &= -\lambda M_2^{-2} \\ a_{21}^{\circ} &= \lambda(M_1^{-2} - M_2^{-2} + 1/2), & a_{22}^{\circ} &= \lambda(M_2^{-2} - 1/2), & a_{23}^{\circ} &= M_2^{-2} - 1 \\ a_{31}^{\circ} &= (1 + \lambda^2) / 2, & a_{32}^{\circ} &= (1 - \lambda^2) / 2, & a_{33}^{\circ} &= -\lambda \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} (a_{11}^1, a_{12}^1, a_{13}^1) &= (-e/3 + f - \lambda \varepsilon_{12})(e/3, f, \varepsilon_{12}) \\ (a_{21}^1, a_{22}^1, a_{23}^1) &= [\lambda(e/3 + f) + \varepsilon_{12}](e/3, f, \varepsilon_{12}) \\ a_{31}^1 &= a_{32}^1 = a_{33}^1 = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$M_i = D / c_i, \quad c_1 = \sqrt{(\sigma' + \frac{4}{3}G) / \rho}, \quad c_2 = \sqrt{G / \rho} \quad (1.14)$$

где штрих обозначает производную по аргументу. Система (1.11) дает непрерывное решение со слабыми разрывами. Разрывы производных можно найти из алгебраической системы

$$A(\lambda, \mathbf{u})[\mathbf{u}'] = 0, \quad [\mathbf{u}'] \equiv \mathbf{u}'(\lambda + 0) - \mathbf{u}'(\lambda - 0)$$

Существует также кусочно-непрерывное решение с сильными разрывами. Интегрируя систему (1.6) по окрестности пока неизвестной точки разрыва  $\lambda = \Lambda$  и стягивая отрезок интегрирования в точку разрыва, получаем следующие алгебраические уравнения для разрывов:

$$[\sigma_{11}] - \Lambda[\sigma_{12}] - \frac{1}{2}\rho D^2[-e + f] = 0 \quad (1.15)$$

$$[\sigma_{12}] - \Lambda[\sigma_{22}] - \rho D^2([\varepsilon_{12}] + \frac{1}{2}\Lambda[-e + f]) = 0$$

$$\frac{1}{2}(1 + \Lambda^2)[e] + \frac{1}{2}(1 - \Lambda^2)[f] - \Lambda[\varepsilon_{12}] = 0$$

$$[\mathbf{u}] \equiv \mathbf{u}(\Lambda + 0) - \mathbf{u}(\Lambda - 0)$$

Эти же уравнения можно получить из уравнений для ударных волн [12], если учесть стационарность и автомодельность нашей задачи. Вместе с законом Гука (1.9) уравнения (1.15) дают координаты точек разрывов и сами разрывы.

Граничные условия (1.5) требуют

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = -p, \quad \lambda = \infty \quad (1.16)$$

Постановка задачи завершается требованием сверхсейсмичности нагрузки

$$M_1 > 1 \quad (1.17)$$

и требованием, чтобы кривые  $\sigma = \sigma(e)$  и  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{e}) \equiv 2G(\bar{e})\bar{e}$  были выпуклы вверх

$$\sigma'' < 0, \quad \bar{\sigma}'' < 0 \quad (1.18)$$

Именно такой вид имеют нагрузочные ветви диаграмм объемного сжатия и сдвига для песка малой влажности при малых деформациях  $0 < (e, \bar{e}) < 0,03$ ;  $0 < (\sigma, \bar{\sigma}) < 1,5$  МПа [13]. Это ограничивает давление  $p$  в (1.5).

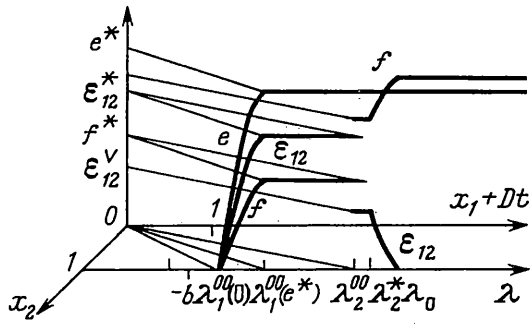
**2. Быстрые и медленные волны.** Однородная система (1.11) имеет нулевое решение  $\mathbf{u}' = 0$  при любом  $\lambda$  и ненулевое решение  $\mathbf{u}' \neq 0$  на той части оси  $\lambda$ , где  $\det A(\lambda, \mathbf{u}(\lambda)) \equiv 0$ . Решение  $\mathbf{u}(\lambda)$  постоянно на лучах  $\omega(x_1, x_2, t) \equiv -x_1 - Dt + \lambda x_2 = 0$ , выходящих веером из точки  $x_1 = -Dt$ ,  $x_2 = 0$ , в которой находится фронт поверхностной нагрузки (фигура). Каждый луч движется в направлении собственной нормали со скоростью  $c = -\omega_{,r} / \text{grad } \omega = D / \sqrt{1 + \lambda^2}$ . Зная координату  $\lambda$  слабого или сильного разрыва, по этой формуле можно вычислить скорость его распространения.

Вычисление определителя дает

$$\det A(\lambda, \mathbf{u}) = \Delta = \Delta^0(\lambda, \mathbf{u}) + \varepsilon \Delta^1(\lambda, \mathbf{u})$$

$$\Delta^0 = \frac{1}{2} M_1^{-2} M_2^{-2} (\lambda^2 - M_1^2 + 1)(\lambda^2 - M_2^2 + 1)$$

$$\Delta^1 = \begin{vmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & a_{23}^1 \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 & a_{33}^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & a_{13}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & a_{23}^0 \\ a_{31}^0 & a_{32}^0 & a_{33}^0 \end{vmatrix} \quad (2.1)$$



Заметим, что  $\Delta^1$  – полный полином четвертой степени относительно  $\lambda$  с коэффициентами  $O(\bar{\varepsilon}^2)$ .

Отсюда имеем нули определителя

$$\lambda = \lambda_{1,2}(\mathbf{u}) = \lambda_{i,2}^{\circ} + \varepsilon \lambda_{1,2}^1 + O(\varepsilon^2 \bar{\varepsilon}^4)$$

$$\lambda_1^{\circ} = \sqrt{M_1^2 - 1}, \quad \lambda_1^1 = -\frac{M_1^2 M_2^2}{M_1^2 - M_2^2} \frac{\Delta^1(\lambda_1^{\circ})}{\lambda_1^{\circ}} \quad (1 \leftrightarrow 2) \quad (2.2)$$

оба вещественные в силу (1.17), и пронумерованные в порядке возрастания

$$0 < \lambda_1(\mathbf{u}) < \lambda_2(\mathbf{u}) \quad (2.3)$$

В дальнейшем понадобится первое приближение для  $\lambda_2$ :

$$\lambda_2^1 = -2\lambda_2^{\circ} (f + \varepsilon_{12}(1 - \lambda_1^{\circ 2}) / 2\lambda_2^{\circ 2})^2 \quad (2.4)$$

результат вычисления по формулам (2.2), (2.1), (1.12), (1.13).

Вычислим скорости распространения слабых разрывов

$$c_i^{\varepsilon} = D / \sqrt{\lambda_i^2 + 1} = c_i (1 - \varepsilon \lambda_i^{\circ} \lambda_i^1 / M_i^2 + O(\varepsilon^2 \bar{\varepsilon}^4)) \quad (i = 1, 2) \quad (2.5)$$

Формулы для нулей определителя (2.2) получены при  $|\varepsilon \bar{\varepsilon}^2| \ll 1$ , что равносильно требованию малой нелинейности кривой  $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$ :

$$\bar{\sigma} = 2G(\bar{\varepsilon})\bar{\varepsilon}, \quad G = G_0(1 - \beta \bar{\varepsilon}^2), \quad \beta > 0, \quad \beta \bar{\varepsilon}^2 \ll 1 \quad (2.6)$$

Что касается кривой  $\sigma(e)$ , то она остается произвольной в рамках (1.18).

Используя (2.6), перепишем формулы (2.2) в нулевом приближении

$$\lambda_i = \lambda_i^{\circ} + O(\beta \bar{\varepsilon}^2), \quad \lambda_i^{\circ} = \sqrt{M_i^{\circ 2} - 1} \\ M_i^{\circ} = D / c_i^{\circ}, \quad c_1^{\circ} = \sqrt{(\sigma'(e) + 4/3 G_0) / \rho}, \quad c_2^{\circ} = \sqrt{G_0 / \rho} \quad (2.7)$$

Нулевые члены  $\lambda_i^{\circ}, M_i^{\circ}$  зависят только от  $e$ , а  $\lambda_2^{\circ}, M_2^{\circ}$  – константы.

Можно показать, что из (1.17), (1.18) следует

$$\lambda_2^{\circ} > 1 \quad (2.8)$$

Непрерывное решение  $\mathbf{u}(\lambda)$ , построенное на той части оси  $\lambda$ , где  $\lambda \equiv \lambda_1(\mathbf{u}(\lambda))$  ( $\lambda \equiv \lambda_2(\mathbf{u}(\lambda))$ ), будем называть быстрой (медленной) непрерывной волной. Быстрая волна идет по невозмущенной среде и является волной нагружения. Приступим к ее построению.

Однако сначала покажем, что в случае (1.18), (2.6) быстрая ударная волна неустойчива, и в данной задаче не возбуждается. Из (1.15), (1.9) получаем следующую алгебраическую систему для разрыва  $[\mathbf{u}] = \mathbf{u}(\Lambda + 0)$ , идущего по невозмущенной среде:

$$A^{os}(\Lambda, \mathbf{u})\mathbf{u} = 0 \quad (2.9)$$

где  $a_{ij}^{os}$  получаются из (1.12) формальной заменой  $M_1$  на  $M_1^s = D/c_1^s$ ,  $c_1^s = \sqrt{(\sigma/e + 4/3 G)/\rho}$ . Решение системы (2.9) таково

$$\Lambda = \sqrt{M_1^{s^2} - 1}, \quad f = \frac{\Lambda^2 - 1}{M_1^{s^2}} e, \quad \varepsilon_{12} = \frac{2\Lambda}{M_1^{s^2}} e \quad (2.10)$$

Условия устойчивости ударной волны имеют вид [12]:  $c_1^e(0) < c_1^s(\mathbf{u}) < c_1^e(\mathbf{u})$   
или

$$\sigma'(0) < \sigma/e - 4/3 G_0 \beta \bar{e}^2 < \sigma'(e)(1 + O(\beta \bar{e}^2)) + G_0 O(\beta \bar{e}^2)$$

При  $\sigma'' < 0$  эти неравенства не выполняются.

**3. Быстрая непрерывная волна нагружения.** Эта волна является решением следующей задачи Коши:

$$A(\lambda_1(\mathbf{u}), \mathbf{u})d\mathbf{u} / d\lambda = 0 \quad (\lambda > \lambda_1(0)) \quad (3.1)$$

$$\lambda = \lambda_1(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u}|_{\lambda=\lambda_1(0)} = 0$$

Разрешая (3.1) относительно производных и переходя от  $\lambda$  к новой независимой переменной  $u_1$ , получим

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\Delta_1^{32}}{\Delta_1^{31}}, \quad \frac{du_3}{du_1} = \frac{\Delta_1^{33}}{\Delta_1^{31}} \quad (u_1 > 0)$$

$$u_2|_{u_1=0} = u_3|_{u_1=0} = 0$$

$$\lambda = \lambda_1(u_1, u_2(u_1), u_3(u_1)) \quad (3.2)$$

Здесь  $\Delta_1^{3i}$  – алгебраические дополнения элементов третьей строки матрицы  $A(\lambda_1(\mathbf{u}), \mathbf{u})$  (можно брать любую другую строку).

Задачу (3.2) будем решать в нулевом приближении. Используя формулы (2.7), перепишем ее в виде

$$\frac{df}{de} = \frac{\lambda_1^{oo} - 1}{M_1^{o^2}} + O(\beta \bar{e}^2), \quad \frac{d\varepsilon_{12}}{de} = \frac{2\lambda_1^{oo}}{M_1^{o^2}} + O(\beta \bar{e}^2) \quad (e > 0)$$

$$f|_{e=0} = \varepsilon_{12}|_{e=0} = 0, \quad \lambda = \lambda_1^{oo}(e) + O(\beta \bar{e}^2) \quad (3.3)$$

В нулевом приближении система распалась на два независимых уравнения, интегрируя которые получаем сдвиговые деформации через объемную

$$f = \int_0^e \frac{\lambda_1^{oo} - 1}{M_1^{o^2}} de + O(\beta \bar{e}^3) = e - \frac{2}{M_2^2} \left( \frac{\sigma(e)}{G_0} + \frac{4}{3} e \right) + O(\beta \bar{e}^3)$$

$$\varepsilon_{12} = 2 \int_0^e \frac{\lambda_1^{oo}}{M_1^{o^2}} de + O(\beta \bar{e}^3) \quad (3.4)$$

Объемную деформацию получаем обращением функции (3.3):

$$e = \lambda_1^{\circ\circ -1}(\lambda) + O(\beta e^3) \quad (3.5)$$

Итак, профиль быстрой волны (3.4), (3.5) целиком определяется кривой  $\sigma(e)$ . Малая нелинейность кривой  $\bar{\sigma}(\bar{e})$  не приводит к качественным изменениям быстрой волны, давая количественные поправки, порядок которых оценивается.

В дальнейшем в силу (2.3) понадобится неравенство

$$\lambda_2^{\circ\circ} f + \frac{1 - \lambda_2^{\circ\circ 2}}{2} \varepsilon_{12} = \int_0^e \frac{(\lambda_1^{\circ\circ} - \lambda_2^{\circ\circ})(1 + \lambda_1^{\circ\circ} \lambda_2^{\circ\circ})}{M_1^{\circ\circ 2}} de + O(\beta \bar{e}^3) < 0 \quad (3.6)$$

Согласно (3.5) объемная деформация  $e(\lambda)$  монотонно растет от 0 до  $e^*$  (фигура). Действительно, дифференцирование формулы (3.3) дает

$$\frac{d\lambda}{de} = - \frac{M_1^{\circ\circ 2}}{2\lambda_1^{\circ\circ} \rho c_1^{\circ\circ 2}} \sigma''(e) + O(\beta \bar{e}) > 0$$

в силу (1.18). Значение  $e^*$  будет найдено из граничных условий.

При  $\lambda > \lambda_1^{\circ\circ}(e^*)$  имеем область постоянного поля

$$e = e^* > 0, \quad f = f^* = f(e^*), \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^* = \varepsilon_{12}(e^*) > 0 \quad (3.7)$$

Отсюда следует, что быстрая волна нагружения одна не удовлетворяет граничным условиям (1.16), требующим, в частности, полной "разгрузки" от касательного напряжения  $\sigma_{12}$ .

Построим формальные решения типа медленной волны, не пытаясь пока удовлетворить граничным условиям.

**4. Медленная непрерывная волна.** Эта волна является решением следующей задачи Коши:

$$A(\lambda_2(\mathbf{u}), \mathbf{u}) d\mathbf{u} / d\lambda = 0 \quad (\lambda > \lambda_2(\mathbf{u}^\vee)) \quad (4.1)$$

$$\lambda = \lambda_2(\mathbf{u}) \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u}|_{\lambda=\lambda_2(\mathbf{u}^\vee)} = \mathbf{u}^\vee \quad (4.3)$$

где  $\mathbf{u}^\vee$  – некоторое постоянное поле перед волной.

Разрешая (4.1) относительно производных, получим

$$du_i / d\lambda = C \Delta_2^{3i} \quad (4.4)$$

где  $\Delta_2^{3i}$  – алгебраические дополнения элементов третьей строки матрицы  $A(\lambda_2(\mathbf{u}), \mathbf{u})$ . Неопределенный множитель  $C$  находим по формуле

$$C = \left( \sum_i \frac{\partial \lambda_2}{\partial u_i} \Delta_2^{3i} \right)^{-1} \quad (4.5)$$

которая получается дифференцированием тождества (4.2) по  $\lambda$ .

Задачу будем решать, используя для  $\lambda_2$  первое приближение (2.2), (2.4):

$$\lambda_2 = \lambda_2^{\circ\circ} + \frac{M_2^{\circ\circ 2} \beta}{2\lambda_2^{\circ\circ}} \bar{e}^2 + \frac{\beta \lambda_2^{\circ\circ}}{M_2^{\circ\circ 2}} (f + b \varepsilon_{12})^2 + O(\beta^2 \bar{e}^4) \quad (4.6)$$

$$b = (1 - \lambda_2^{\circ\circ 2}) / (2\lambda_2^{\circ\circ}) \quad (4.7)$$

В нулевом приближении  $\lambda_2^{\circ\circ} = \text{const}$ , а для построения непрерывной волны нужна зависимость  $\lambda_2(\mathbf{u})$ , пусть и слабая.

В результате вычислений система (4.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{de}{d\lambda} &= O(\bar{e}), \quad \frac{df}{d\lambda} = \frac{1}{\beta'(f + b\epsilon_{12})} + O(\bar{e}) \\ \frac{d\epsilon_{12}}{d\lambda} &= \frac{b}{\beta'(f + b\epsilon_{12})} + O(\bar{e}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\beta' = 3M_2^{\circ\circ} \beta / (4\lambda_2^{\circ\circ}) \quad (4.9)$$

Решение системы (4.8) с начальными условиями (4.3) таково

$$\begin{aligned} e &= e^{\vee} + O(\bar{e}(\lambda - \lambda_2^{\vee})) \\ \begin{pmatrix} f \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f^{\vee} \\ \epsilon_{12}^{\vee} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} \frac{f^{\vee} + b\epsilon_{12}^{\vee}}{1 + b^2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2(1 + b^2)}{\beta'(f^{\vee} + b\epsilon_{12}^{\vee})^2} (\lambda - \lambda_2^{\vee})} \right) + O(\bar{e}(\lambda - \lambda_2^{\vee})) \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

В силу (2.6)  $\beta' > 0$ , в силу (2.8)  $b < 0$ . Отсюда функция  $\epsilon_{12}(\lambda)$  при  $f^{\vee} + b\epsilon_{12}^{\vee} > 0 (< 0)$  убывает (растет).

Вычисление по формулам (1.10), (4.10) дает

$$\bar{e}^2 = \bar{e}^{\vee 2} + (\lambda - \lambda_2^{\vee}) / 2\beta' + O(\bar{e}^2(\lambda - \lambda_2^{\vee})) \quad (4.11)$$

Отсюда в силу (2.6) волна (4.10) является волной нагружения по  $\bar{e}$ . Заметим, что в волне нагружения  $|\epsilon_{12}(\lambda)|$  может убывать.

Профили  $f(\lambda)$ ,  $\epsilon_{12}(\lambda)$  в волне (4.10) очень крутые. Действительно, формула (4.11) дает

$$\bar{e}^2 = \bar{e}^{\vee 2} (1 + N/2 + O(N\beta'\bar{e}^2)), \quad \lambda = \lambda_2^{\vee} + N\beta'\bar{e}^{\vee 2}$$

т.е. на малом отрезке  $\lambda_2^{\vee} < \lambda < \lambda_2^{\vee} + N\beta'\bar{e}^{\vee 2}$ ,  $N = O(1)$  квадрат интенсивности деформаций сдвига увеличивается в  $(1 + N/2)$  раз.

**5. Медленная ударная волна.** Будем решать для ударных волн в нулевом приближении, считая  $G = G_0$ . Подставляя в уравнения (1.15) формулы закона Гука (1.9), получаем уравнения для разрывов деформаций, которые имеют следующее решение типа медленной разрывной волны:

$$\Lambda = \lambda_2^{\circ\circ}, \quad [e] = 0, \quad [f] = [\epsilon_{12}] / b \quad (5.1)$$

где константа  $b$  дается формулой (4.7). Разрыв  $[\epsilon_{12}]$  остается произвольным.

Вычисление по формулам (1.10), (5.1) дает

$$[\bar{e}^2] = \frac{1 + b^2}{4b^2} \left\{ [\epsilon_{12}] + \frac{2b}{1 + b^2} (f_- + b\epsilon_{12-}) \right\} [\epsilon_{12}] \quad (5.2)$$

Отсюда волна (5.1) при  $[\epsilon_{12}] = -(2b / (1 + b^2))(f_- + b\epsilon_{12-})$  является нейтральной по  $\bar{e}$ , при других значениях  $[\epsilon_{12}]$  она является либо волной нагружения ( $[\bar{e}^2] > 0$ ), либо волной разгрузки ( $[\bar{e}^2] < 0$ ).

То, что среди формальных решений оказались две медленные волны нагружения: одна непрерывная, другая ударная, говорит, что последняя неустойчива, и в данной задаче не возбуждается. Здесь необходимо руководствоваться альтернативой, которая будет сформулирована в следующем пункте.

**6. Построение решения.** Граничным условиям (1.16) будем удовлетворять путем комбинации трех медленных волн: непрерывной волны нагружения, разрывной нейтральной волны и разрывной волны разгрузки. Медленная волна, удовлетворяющая граничным условиям, может быть либо разрывной, либо начинаться с разрыва. Действительно, непрерывную волну (4.10) нельзя пускать по начальным значениям (3.7)  $f^\vee = f^*$ ,  $\varepsilon_{12}^\vee = \varepsilon_{12}^* > 0$ , поскольку в ней  $\varepsilon_{12}(\lambda)$  в силу (3.6) растет, а граничное условие для касательного напряжения требует  $\varepsilon_{12} = 0$ ,  $\lambda = \infty$ . Приступим к построению решения.

Сначала в точке  $\lambda = \lambda_2^{\circ\circ}$  сдвиговые деформации делают нейтральный скачок

$$f = f^\vee = f^* + [\varepsilon_{12}] / b, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^\vee = \varepsilon_{12}^* + [\varepsilon_{12}], \quad \lambda > \lambda_2^{\circ\circ}$$

$$[\varepsilon_{12}] = -\frac{2b}{1+b^2}(f^* + b\varepsilon_{12}^*) < 0 \quad (6.1)$$

$$f^\vee + b\varepsilon_{12}^\vee = -f^* - b\varepsilon_{12}^* > 0 \quad (6.2)$$

Знаки этих величин следуют из (3.6), (2.8). Видно, что деформация  $\varepsilon_{12}$  совершила скачок вниз от  $\varepsilon_{12}^* > 0$  к  $\varepsilon_{12}^\vee$ . Далее вид решения определяется знаком  $\varepsilon_{12}^\vee$ .

*Волна нагружения.* Если  $\varepsilon_{12}^\vee > 0$ , то решение дается формулами (4.10) для непрерывной волны нагружения. Поскольку теперь  $f^\vee + b\varepsilon_{12}^\vee > 0$ ,  $\varepsilon_{12}(\lambda)$  убывает от  $\varepsilon_{12}^*$  до нуля на отрезке  $\lambda_2^* < \lambda < \lambda_0 = \lambda_2^* + ((1+b^2)/2b^2)\beta'\varepsilon_{12}^*\varepsilon_{12}^\vee$ . На этом же отрезке  $f(\lambda)$  растет от  $f^\vee$  до  $f^* - \varepsilon_{12}^* / b$ . Правее точки  $\lambda = \lambda_0$  решение постоянно (фигура).

*Волна разгрузки.* Если же  $\varepsilon_{12}^\vee < 0$ , то формулы (4.10) с убывающей функцией  $\varepsilon_{12}(\lambda)$  уже не дают решения, и ничего не остается, как скачком по формулам (5.1) вернуться в точку  $\varepsilon_{12} = 0$ , в результате чего решение дается формулами

$$f = f^* - \varepsilon_{12}^* / b, \quad \varepsilon_{12} = 0, \quad \lambda > \lambda_2^{\circ\circ} \quad (6.3)$$

для разрывной волны разгрузки. Действительно, вычисление по формулам (1.10), (6.3) дает разгрузку

$$\bar{e}^2 = \bar{e}^{*2} + \frac{1+b^2}{4b^2}\varepsilon_{12}^\vee\varepsilon_{12}^* < \bar{e}^{*2}$$

Заметим, что разгрузка упругая по той же кривой  $\bar{\sigma}(\bar{e})$ , что и нагружение.

В случае  $\varepsilon_{12}^\vee = 0$  решение имеет вид разрывной нейтральной волны (6.3).

В обеих волнах  $e = e^*$ . Таким образом, граничное условие для касательного напряжения удовлетворено при любом  $e^*$ . Граничное условие для нормального напряжения дает уравнение для  $e^*$ :

$$\frac{p}{G_0} = P(e^*) \equiv \frac{\lambda_2^{\circ\circ 2} - 1}{M_2^2} \left( \frac{\sigma(e^*)}{G_0} + \frac{4}{3}e^* \right) - \frac{1}{b}\varepsilon_{12}^* + O(\beta e^{*3}) \quad (6.4)$$

одинаковое для обоих случаев. Решение уравнения в виде ряда по степеням  $p/G_0 \ll 1$  таково

$$e^* = \frac{p/G_0}{P'(0)} + O\left(\left(\frac{p}{G_0}\right)^2\right) + O\left[\beta\left(\frac{p}{G_0}\right)^3\right] \quad (6.5)$$



Это – максимальное значение деформации объемного сжатия.

В заключение отметим, что построенное решение  $u = u(\lambda)$  дает профиль волны на единичной глубине  $u = u(x_1 + Dt)$ ,  $x_2 = 1$  в системе координат, движущейся вместе с поверхностной нагрузкой. Случай волны нагружения по  $e$  и  $\bar{e}$  изображен на фигуре.

По найденным деформациям скорости смещений получаем из уравнений (1.7), напряжения – по формулам закона Гука (1.9).

Рассмотрим случай, когда кривые  $\sigma(e)$ ,  $\bar{\sigma}(\bar{e})$  выпуклы вверх. Аналогично рассматриваются случаи, когда одна или обе кривые выпуклы вниз. Так, если кривая  $\sigma(e)$  выпукла вниз, то задача Коши (3.3) теряет смысл, поскольку  $d\lambda/de < 0$ , а быстрая ударная волна (2.10) становится устойчивой. Таким образом, для быстрой волны имеет место альтернатива: либо непрерывной волны не существует, либо ударная волна неустойчива.

**7. Реакция линейно-упругой полуплоскости [1].** Решение получается как частный случай  $\sigma(e) = K_0 e$ ,  $\beta = 0$ . При  $\sigma' \rightarrow K_0$ ,  $\beta \rightarrow 0$  отрезки непрерывного изменения решения  $\lambda_1^{\circ\circ}(0) < \lambda < \lambda_1^{\circ\circ}(e^*)$ ,  $\lambda_2^{\circ\circ} < \lambda < \lambda_0$  стягиваются в точки  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_1^{\circ\circ}(0)$ ,  $\lambda = \lambda_2 = \lambda_2^{\circ\circ}$ . Быстрая непрерывная волна (3.4), (3.5), (3.7) становится разрывной. Что касается медленной волны, то в обоих случаях она имеет вид (6.3). Кусочно-непрерывное решение становится кусочно-постоянным

$$e = e^* H(\lambda - \lambda_1), \quad f = f^* H(\lambda - \lambda_1) - \varepsilon_{12}^* H(\lambda - \lambda_2) / b$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^* [H(\lambda - \lambda_1) - H(\lambda - \lambda_2)] \quad (7.1)$$

$$f^* = \frac{\lambda_1^2 - 1}{M_1^2} e^*, \quad \varepsilon_{12}^* = \frac{2\lambda_1}{M_1^2} e^*, \quad e^* = \frac{M_1^2 (\lambda_2^2 - 1)}{(\lambda_2^2 - 1)^2 + 4\lambda_1 \lambda_2} \frac{p}{G_0}$$

$$\lambda_i = \sqrt{M_i^2 - 1}, \quad M_i = D / c_i, \quad c_1 = \sqrt{(K_0 + 4/3 G_0) / \rho}, \quad c_2 = \sqrt{G_0 / \rho}$$

Формула для  $e^*$  получена из (6.5).

Вычисление по формулам (1.10), (7.1) дает

$$\bar{e}^2 = \bar{e}^{*2} H(\lambda - \lambda_1) + ((1 + b^2) / ((4b^2))) \varepsilon_{12}^* \varepsilon_{12}^{\vee} H(\lambda - \lambda_2)$$

где  $\varepsilon_{12}^{\vee}$  определяется формулами (6.1). Отсюда медленная волна при  $\varepsilon_{12}^{\vee} > 0$  ( $< 0$ ) является волной нагружения (разгрузки) по  $\bar{e}$ . При  $\varepsilon_{12}^{\vee} = 0$  она нейтральна.

Таким образом, кривая  $\sigma(e)$ , выпуклая вверх, сглаживает быструю волну нагружения, а кривая  $\bar{\sigma}(\bar{e})$ , выпуклая вверх, – медленную волну нагружения.

**8. Грунт.** Данная среда является пластической средой по объемному сжатию и по сдвигу. Здесь решена задача для нелинейно-упругого тела, кривые  $\sigma(e)$  и  $\bar{\sigma}(\bar{e})$  которого совпадают с нагрузочными ветвями диаграмм объемного сжатия и сдвига для песка малой влажности.

На приложение к грунту может претендовать только волна нагружения с условием реализации  $\varepsilon_{12}^{\vee} > 0$ . Рассмотрим это условие. Вычисление по формулам (6.1), (3.4) дает

$$\varepsilon_{12}^{\vee} = \frac{2}{1 + b^2} \int_0^{e^*} \frac{(\lambda_1^{\circ\circ}(e) + b)(1 - \lambda_1^{\circ\circ}(e)b)}{(M_1^{\circ\circ}(e))^2} de$$

Поскольку  $\lambda_1^{\circ\circ}(e)$  – монотонно возрастающая функция, для выполнения необходимого условия достаточно потребовать  $\lambda_1^{\circ\circ}(0) > -b$  или в обозначениях (2.7)  $M_1^{\circ\circ}(0) > \mu \sqrt{\mu - 1/4}$ ,  $\mu = (c_2^{\circ\circ} / c_1^{\circ\circ}(0))^2$ .

Если скорости волн в песке и скорость воздушной ударной волны удовлетворяют этому неравенству, то рассмотренное решение, по-видимому, правильно описывает

нагружение песчаного полупространства воздушной ударной волной. Для песчаных грунтов характерно значение  $\mu = 0,3$  при  $c_1^0(0) = 200-700$  м/с [13]. Отсюда для воздушной ударной волны получаем требование  $M_1^0(0) > 1,36$ , несколько более жесткое, чем сверхсейсмичность.

Автор благодарит П.Е. Товстика за помощь в решении задачи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. *Рахматулин Х.А., Мамадалиев Н.* Распространение нелинейных волн в грунтовом полупространстве, вызванных бегущей по его границе нагрузкой // Нелинейные и тепловые эффекты при переходных волновых процессах. Тр. симпоз. Т. 1. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1973. С. 165-190.
3. *Скобеев А.М.* О некоторых плоских задачах динамики грунта // Инж. ж. МТТ. 1966. № 1. С. 108-113.
4. *Ковшов А.Н.* О двух задачах динамики грунта при сильных нагрузках // Инж. ж. МТТ. 1968. № 5. С. 184-189.
5. *Скобеев А.М., Флитман Л.М.* Подвижная нагрузка на неупругой полуплоскости // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 1. С. 189-192.
6. *Замышляев Б.В., Евтерев Л.С.* Модели динамического деформирования и разрушения грунтовых сред. М.: Наука, 1990. 215 с.
7. *Bleich H.H., Matthews A.T., Wright J.P.* Moving step load on the surface of a half - space of granular material // Int. J. Solids Struct. 1968. V. 4. No 2. P. 243-286.
8. *Анциферов В.С., Рахматулин Х.А.* Распространение сжимающе - сдвигающих возмущений в нелинейно-упругой среде // ПММ. 1964. Т. 28. В. 3. С. 572-578.
9. *Колесников В.А.* Косой удар по поверхности упругопластического полупространства // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 71-76.
10. *Балашов Д.Б.* О простых волнах уравнений Прандтля - Рейсса // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 124-133.
11. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
12. *Бленд Д.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
13. *Рыков Г.В., Скобеев А.М.* Измерение напряжений в грунтах при кратковременных нагрузках. М.: Наука, 1978. 168 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию  
10.И.1995