МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1998

УДК 539.3

© 1998 г. М.А. ГРЕКОВ

ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Построены фундаментальные решения задач теории упругости для нижней полуплоскости, отвечающие действию периодической системы сосредоточенных сил и периодически расположенным одиночным краевым дислокациям во внутренних точках. Выведенные в работе выражения для напряжений и перемещений в комплексной форме являются функциями Грина для соответствующих периодических задач, в частности, для задач о периодически расположенных разрезах в полуплоскости. Получены также функции Грина, позволяющие строить решения основных периодических задач для полуплоскости, т.е. при заданной периодической нагрузке или заданных периодических перемещениях на границе полуплоскости.

Решение периодических плоских задач теории упругости связано с построением интегральных уравнений с периодическими ядрами [1, 2]. Для полуплоскости решение таких уравнений реализовано в работах [3, 4]. Вместе с тем, используемые при этом сингулярные интегральные уравнения, а также интегральные уравнения других типов (такие, например, как уравнение Фредгольма для прямолинейного разреза [5] или гиперсингулярные уравнения для произвольной системы криволинейных разрезов [6] в полуплоскости) можно получить исходя из общих соображений, основанных на понятии функций Грина. Для полуплоскости этими периодическими функциями являются перемещения и напряжения от действия периодической системы сосредоточенных сил или одиночных краевых дислокаций, расположенных вдоль прямой, параллельной границе. Знание вектора силы и вектора Бюргерса в каждой точке некоторой кривой периодичности позволяет по этим функциям сразу написать решение задачи о периодически расположенных кривых в полуплоскости при заданных на них скачках напряжений и перемещений. При известном значении только одного из этих векторов возникает необходимость решения интегрального уравнения того или иного типа. Построение такого уравнения по известным функциям Грина может быть осуществлено известными методами (см., например, [7–9]).

В данной работе периодические функции Грина находятся путем решения соответствующих краевых задач для упругой полуплоскости со свободной и жесткой границей методом, предложенным в работе [5] и распространенным затем на задачу о прямолинейном разрезе в полосе [10].

1. Периодическая система сил и дислокаций в полуплоскости. Рассмотрим полуплоскость $\Omega^- = \{z: \mathrm{Im} z < 0, \mathrm{Re} z \in R^1\}$ с границей Γ, $z = x_1 + ix_2$. Считаем, что в точках полуплоскости $z_k = x_{k1} + ix_{k2} = z_0 + ak$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ($\mathrm{Im} z_0 < 0$, $a > 0$) либо действуют силы $\mathbf{P} = (P_1, P_2)$, либо расположены краевые дислокации с вектором Бюргерса $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$.

Граница полуплоскости Γ либо свободна

$$\sigma_{22} - i\sigma_{12} = 0, \; z \in \Gamma \tag{1.1}$$

либо недеформируема

$$u_1 + iu_2 = \mathrm{const}, \; z \in \Gamma \tag{1.2}$$

В последнем случае полагаем, что главный вектор сил, приложенных к Г, равен нулю. Напряжения $\overset{\infty}{\sigma}_{ij}$ и поворот ω^{∞} на бесконечности в общем случае отличны от нуля.

Следуя Н.И. Мусхелишвили [11], соотношения для напряжений σ_{ij}, перемещений u_j и угла поворота ω при $z \in \Omega^-$ запишем в виде

$$\sigma_{11}+\sigma_{22}+i\frac{8\mu}{\varkappa+1}\omega=4[\Phi(z)+\Phi_0(z)]$$

$$\sigma_{22}-i\sigma_{12}=\Phi(z)-\Phi(\bar{z})+(z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)}+\Sigma_0(z,\ \bar{z}) \tag{1.3}$$

$$2\mu(u_1+iu_2)=\varkappa\int\Phi(z)dz+\int\Phi(\bar{z})d\bar{z}-(z-\bar{z})\overline{\Phi(z)}+U_0(z,\ \bar{z}) \tag{1.4}$$

$$\Sigma_0(z,\bar{z})=\Phi_0(z)+\overline{\Phi_0(z)}+z\overline{\Phi_0'(z)}+\overline{\psi_0(z)}$$

$$U_0(z,\ \bar{z})=\varkappa\int\Phi_0(z)dz-z\overline{\Phi_0(z)}-\int\overline{\psi_0(z)}d\bar{z},\quad \Phi_0(z)=-H\operatorname{ctg}\frac{\pi(z-z_0)}{a} \tag{1.5}$$

$$\psi_0(z)=(\lambda\overline{H}+H)\operatorname{ctg}\frac{\pi(z-z_0)}{a}-\frac{\pi H}{a}[z-(z_0-\bar{z}_0)]\operatorname{cosec}^2\frac{\pi(z-z_0)}{a}$$

Здесь $\lambda=\varkappa$, $H=(P_1+iP_2)/(2a(\varkappa+1))$ при действии сосредоточенных сил; $\lambda=-1$, $H=i\mu(b_1+ib_2)/(a(\varkappa+1))$ при наличии краевых дислокаций; $\varkappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ при плоском напряженном состоянии; $\varkappa=3-4\nu$ при плоской деформации; ν, μ – коэффициент Пуассона и модуль сдвига соответственно. Черта сверху над переменными величинами означает комплексное сопряжение.

Функции Колосова – Мусхелишвили Φ_0, ψ_0 отвечают действию сосредоточенных сил или наличию краевых дислокаций в точках z_k упругой плоскости. Их можно найти, суммируя соответствующие функции для одиночных сил и одиночных дислокаций. Последние приведены, например, в [11, 12].

Смысл соотношений (1.3), (1.4) состоит в представлении решения исходной задачи для полуплоскости в виде суперпозиции решений двух задач: задачи для плоскости, в которой действует периодическая система сосредоточенных сил или находится периодическая система краевых дислокаций, и задачи для полуплоскости Ω^-, в которой эти силы и дислокации отсутствуют, а граничные значения напряжений или перемещений определяются соответственно функциями $-\Sigma_0(x_1, x_1)$ или $-U_0(x_1, x_1)$. Этот прием был использован при выводе интегрального уравнения Фредгольма в задачах о прямолинейном разрезе в полуплоскости [5] и полосе [10].

Подставив выражения (1.3) и (1.4) соответственно в (1.1) и (1.2), приходим к следующим краевым задачам Гильберта для нахождения голоморфной в $\Omega^-\cup\Omega^+$ (Ω^+ –верхняя полуплоскость) функции $\Phi(z)$:

$$\Phi^+(x_1)-\Phi^-(x_1)=\Sigma_0(x_1,\ x_1),\quad x_1\in(-\infty,\ +\infty) \tag{1.6}$$

$$\Phi^+(x_1)+\varkappa\Phi^-(x_1)=U_0'(x_1,\ x_1),\quad x_1\in(-\infty,\ +\infty) \tag{1.7}$$

$$U_0'(x_1,\ x_1)=dU_0(z,\ \bar{z})/dx_1\big|_{z=x_1},\quad \Phi^{\pm}(x_1)=\lim_{\operatorname{Im}z\to\pm0}\Phi(z)$$

Решения задач (1.6) и (1.7) в классе функций, периодических по переменной x_1 и ограниченных на бесконечности, даются при помощи интеграла типа Коши соответ-

ственно в виде

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Sigma_0(t,\ t)}{t-z}dt+C_1 \tag{1.8}$$

$$\Phi(z)=\begin{cases}\psi(z)+C_2 & \operatorname{Im} z>0\\ -\varkappa^{-1}[\psi(z)+C_2], & \operatorname{Im} z<0\end{cases},\quad \psi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{U_0'(t,\ t)}{t-z}dt \tag{1.9}$$

где C_1, C_2 – произвольные комплексные постоянные.

Учитывая, что

$$\lim_{\operatorname{Im} z\to\pm\infty}\Phi_0(z)=\pm iH,\quad \lim_{\operatorname{Im} z\to\pm\infty}[\overline{z\Phi_0'(\bar z)}+\overline{\psi_0(\bar z)}]=\mp i(\lambda H+\bar H)$$

на основании свойств интеграла типа Коши из (1.8) и (1.9) с учетом (1.5) для обеих краевых задач находим

$$\Phi(z)=\begin{cases}-\varepsilon\Phi_0(z)+iH(\lambda+\varepsilon)/2+C, & \operatorname{Im} z>0\\ \varepsilon^{-1}[\overline{\Phi_0(\bar z)}+z\overline{\Phi_0'(\bar z)}+\overline{\psi_0(\bar z)}-iH(\lambda+\varepsilon)/2-C], & \operatorname{Im} z<0\end{cases} \tag{1.10}$$

где $\varepsilon=-1$ для свободной границы Г, $\varepsilon=\varkappa$ для недеформируемой границы Г, C – комплексная постоянная.

Подставив (1.10) в (1.3) и (1.4) и обозначив $\zeta=\xi+i\eta=\pi z/a$, $\zeta_0=\xi_0=i\eta_0=\pi z_0/a$, получим искомые выражения для напряжений и перемещений (последнее с точностью до поступательных смещений всей полуплоскости как жесткого целого):

$$\sigma_{11}+\sigma_{22}+i\frac{8\pi}{\varkappa+1}\omega=-4H[\operatorname{ctg}(\zeta-\zeta_0)-\frac{\lambda}{\varepsilon}\operatorname{ctg}(\zeta-\bar\zeta_0)]-$$
$$-\frac{4\bar H(\zeta_0-\bar\zeta_0)}{\varepsilon}\operatorname{cosec}^2(\zeta-\bar\zeta_0)-[2iH(\lambda+\varepsilon)+4C]/\varepsilon \tag{1.11}$$

$$\sigma_{22}-i\sigma_{12}=H[-\varepsilon\operatorname{ctg}(\bar\zeta-\zeta_0)-\operatorname{ctg}(\zeta-\zeta_0)+\lambda\operatorname{ctg}(\bar\zeta-\bar\zeta_0)+\frac{\lambda}{\varepsilon}\operatorname{ctg}(\zeta-\bar\zeta_0)]-$$
$$-\bar H(\zeta_0-\bar\zeta_0)[\operatorname{cosec}^2(\bar\zeta-\bar\zeta_0)+\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{cosec}^2(\zeta-\bar\zeta_0)]-$$
$$-(\zeta-\bar\zeta)\{\bar H[\lambda\operatorname{cosec}^2(\bar\zeta-\zeta_0)-\varepsilon\operatorname{cosec}^2(\bar\zeta-\bar\zeta_0)]+$$
$$+2H(\zeta_0-\bar\zeta_0)\operatorname{cosec}^2(\bar\zeta-\zeta_0)\operatorname{ctg}(\bar\zeta-\zeta_0)\}/\varepsilon-[iH(\lambda+\varepsilon)/2+C](1+\varepsilon)/\varepsilon,$$

$$2\mu(u_1+iu_2)]=-\underline{\frac{Ha}{\pi}\{\varkappa\ln[-i\sin(\zeta-\zeta_0)]+\lambda\ln[i\sin(\bar\zeta-\bar\zeta_0)]\}+}$$
$$+\frac{2i\bar Ha}{\pi}(\eta-\eta_0)\operatorname{ctg}(\bar\zeta-\bar\zeta_0)+\frac{\varkappa\bar Ha(\zeta_0-\bar\zeta_0)}{\pi\varepsilon}\operatorname{ctg}(\zeta-\bar\zeta_0)+$$
$$+\underline{\frac{Ha}{\pi\varepsilon}\{\varkappa\lambda\ln[i\sin(\zeta-\bar\zeta_0)]+\varepsilon^2\ln[-i\sin(\bar\zeta-\zeta_0)]\}-}$$
$$-\frac{a(\zeta-\bar\zeta)}{\pi\varepsilon}\{\lambda\bar H\operatorname{ctg}(\bar\zeta-\zeta_0)+H(\zeta_0-\bar\zeta_0)\operatorname{cosec}^2(\bar\zeta-\zeta_0)-$$
$$-\bar C+i\bar H(\lambda+\varepsilon)/2+(\varkappa+\varepsilon)[C+iH(\lambda+\varepsilon)/2]/2\}+$$
$$+\underline{\frac{a}{\pi}(1-\varkappa/\varepsilon)[C+iH(\lambda+\varepsilon)/2](\xi-\xi_0)} \tag{1.12}$$

Ветви дважды подчеркнутых многозначных функций в (1.12) фиксируем равенством $\ln 1 = 0$. Все функции в (1.11), очевидно, периодические по переменной ξ и, следовательно, по x_1. Для периодичности перемещений необходимо, чтобы сумма подчеркнутых членов в (1.12) была периодической по ξ функцией. Требуя выполнение этого условия, приходим к равенству

$$C = iH(\lambda + \varepsilon)/2 \tag{1.13}$$

С учетом (1.13) выражение для перемещений (1.12) принимает вид

$$2\mu(u_1 + iu_2) = -\frac{Ha}{\pi}[(\varkappa + \lambda)\ln\rho_1 - (\varkappa\lambda/\varepsilon + \varepsilon)\ln\rho + i\chi - (\lambda + \varepsilon)(\varkappa/\varepsilon + 1)\eta] +$$

$$+\frac{2i\overline{H}a}{\pi}(\eta - \eta_0)\operatorname{ctg}(\overline{\zeta} - \overline{\zeta}_0) + \frac{\varkappa\overline{H}a(\zeta - \overline{\zeta}_0)}{\pi\varepsilon}\operatorname{ctg}(\zeta - \overline{\zeta}_0) -$$

$$-\frac{a(\zeta - \overline{\zeta})}{\pi\varepsilon}[\lambda\overline{H}\operatorname{ctg}(\overline{\zeta} - \zeta_0) + H(\zeta_0 - \overline{\zeta}_0)\operatorname{cosec}^2(\overline{\zeta} - \zeta_0) + i\overline{H}(\lambda + \varepsilon)] \tag{1.14}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\rho_1 = |-i\sin(\zeta - \zeta_0)|, \quad \theta_1 = \operatorname{Arctg}[(-\operatorname{cth}(\eta - \eta_0)\operatorname{tg}(\xi - \xi_0)] + 2\pi n$$

$$\rho = |i\sin(\zeta - \overline{\zeta}_0)|, \quad \theta = \operatorname{Arctg}[(-\operatorname{cth}(\eta + \eta_0)\operatorname{tg}(\xi - \xi_0)]$$

$$\chi = \begin{cases} (\varkappa - \lambda)\theta_1 - \gamma, & \eta > \eta_0,\ |\xi_1| < \pi/2 \\ \mp(\varkappa - \lambda)\pi(4n + 1)/2 - \gamma, & \eta = \eta_0,\ 0 < \pm\xi_1 < \pi/2 \\ (\varkappa - \lambda)(\theta_1 \mp \pi) - \gamma, & \eta < \eta_0,\ 0 < \pm\xi_1 < \pi/2 \\ \mp(\varkappa - \lambda)\pi(2n + 1), & \eta < \eta_0,\ \xi_1 \to \pm 0 \\ 2\pi n(\varkappa - \lambda), & |\xi_1| = \pi/2 \end{cases}$$

$$\gamma = (\lambda\varkappa/\varepsilon - \varepsilon)\theta - (\varkappa/\varepsilon - 1)(\lambda + \varepsilon)\xi_1, \quad \xi_1 = \xi - \xi_0 - \pi k, \quad k,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Поле перемещений, создаваемое системой дислокаций, многозначно. Это выражается в зависимости функций $u_j(\zeta)$, $j = 1, 2$ от первых двух многозначных слагаемых в формуле (1.13), а также от непрерывной (при $\zeta \neq \zeta_0 + \pi k$) и многозначной функции $\theta_1(\zeta)$ в формуле (1.14). При $\lambda = \varkappa$, т.е. при действии только системы сил, многозначность перемещений исчезает.

На бесконечности справедливы следующие равенства

$$\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty} + i\frac{8\mu}{\varkappa + 1}\omega^{\infty} = -8iH, \quad \sigma_{22}^{\infty} - i\sigma_{12}^{\infty} = -2iH(\lambda + 1) \tag{1.15}$$

$$\sigma_{ij}^{\infty} = \lim_{\operatorname{Im} z \to -\infty} \sigma_{ij}(z), \quad \omega^{\infty} = \lim_{\operatorname{Im} z \to -\infty} \omega(z)$$

В частном случае при $\varepsilon = -1$, $\lambda = \varkappa$ и $\eta_0 \to 0$ из (1.11) и (1.14) получим функции Грина, отвечающие действию сил **P** в точках $x_{k1} = x_{01} + ak$ границы полуплоскости

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + i\frac{8\mu}{\varkappa + 1}\omega = \frac{2iP}{a}\left[\frac{\operatorname{sh} 2\eta + i\sin 2(\xi - \xi_0)}{\operatorname{ch} 2\eta - \cos 2(\xi - \xi_0)} + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\right] \tag{1.16}$$

$$\sigma_{22} - i\sigma_{12} = \frac{iP}{a[\operatorname{ch} 2\eta - \cos 2(\xi - \xi_0)]} \times$$

$$\times\left[\operatorname{sh} 2\eta - 2\eta\frac{\operatorname{ch} 2\eta\cos 2(\xi - \xi_0) - 1 + i\operatorname{sh} 2\eta\sin 2(\xi - \xi_0)}{\operatorname{ch} 2\eta - \cos 2(\xi - \xi_0)}\right]$$

$$2\mu(u_1+iu_2)=-\frac{P}{2\pi}\left[(\varkappa+1)\ln\rho+i(\varkappa-1)\chi_1+\frac{(\varkappa-1)^2}{\varkappa+1}\eta\right]+$$

$$+\frac{\overline{P}}{\pi}\left[\frac{-\operatorname{sh}2\eta+i\sin2(\xi-\xi_0)}{\operatorname{ch}2\eta-\cos2(\xi-\xi_0)}-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right]\eta \tag{1.17}$$

$$\chi_1=\begin{cases}\theta-\xi_1, & \eta<0, \quad |\xi_1|<\pi/2\\ \pm\pi/2-\xi_1, & \eta=0, \quad 0<\pm\xi_1<\pi/2\\ 0, & |\xi_1|=\pi/2\end{cases}$$

$k=0, \pm1, \pm2, \ldots,$.

2. Периодические перемещения границы полуплоскости. Пусть на границе полуплоскости Г заданы перемещения в виде

$$2\mu(u_1+iu_2)=S\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(x_1-x_{k1})\equiv q(x_1), \quad z\in\Gamma \tag{2.1}$$

где $S=S_1+iS_2$ – комплексная постоянная, $x_{k1}=ak$, $a>0$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Для нахождения функций Грина, т.е. напряжений и перемещений, воспользуемся формулами (1.3) и (1.4), в которых примем $\Sigma_0(z,\bar z)=U_0(z,\bar z)\equiv0$. Тогда из (1.4) с учетом (2.1) получим следующую краевую задачу Гильберта:

$$\varkappa\varphi^-(x_1)+\varphi^+(x_1)=q(x_1), \quad x_1\in(-\infty, +\infty) \tag{2.2}$$

$$\varphi(z)=\int\Phi(z)dz, \quad \varphi^\pm(x_1)=\lim_{\operatorname{Im}z\to\pm0}\varphi(z)$$

Решение задачи (2.2) в классе кусочно-голоморфных вне Г функций порядка $O(z)$ на бесконечности имеет вид

$$\varphi(z)=\frac{iS}{2a}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{a}+Cz+D\right]\times\begin{cases}1, & \operatorname{Im}z>0\\ -\varkappa^{-1}, & \operatorname{Im}z<0\end{cases} \tag{2.3}$$

где C, D – произвольные комплексные постоянные.

При выводе (2.3) использовалось известное равенство $\frac{1}{z}+2z\sum_{k=1}^{\infty}(z^2-$ $-a^2k^2)^{-1}=(\pi/a)\operatorname{ctg}(\pi z/a)$

Подставив (2.3) в (1.3) и (1.4), получим

$$\sigma_{11}+\sigma_{22}+i\frac{8\mu}{\varkappa+1}\omega=-\frac{4i\pi S}{\varkappa a^2}\left[\frac{\operatorname{ch}2\eta\cos2\xi-1+i\operatorname{sh}2\eta\sin2\xi}{(\operatorname{ch}2\eta-\cos2\xi)^2}+\frac{a}{2\pi}C\right] \tag{2.4}$$

$$\sigma_{22}-i\sigma_{12}=-\frac{i\pi S}{\varkappa a^2}\left[\frac{(\operatorname{ch}2\eta\cos2\xi-1)(\varkappa+1)+i(1-\varkappa)\operatorname{sh}2\eta\sin2\xi}{(\operatorname{ch}2\eta-\cos2\xi)^2}+\frac{(\varkappa+1)a}{2\pi}C\right]+$$

$$+\frac{4\pi\bar S\eta}{\varkappa a^2}\left[\frac{(\operatorname{ch}2\eta\cos2\xi-1+\operatorname{sh}^2 2\eta)\sin2\xi}{(\operatorname{ch}2\eta-\cos2\xi)^3}+\right.$$

$$\left.+i\frac{(\operatorname{ch}2\eta\cos2\xi-1-\sin^2 2\xi)\operatorname{sh}2\eta}{(\operatorname{ch}2\eta-\cos2\xi)^3}\right]$$

$$2\mu(u_1+iu_2)=\frac{S}{a}\left[-\frac{\operatorname{sh}2\eta}{\operatorname{ch}2\eta-\cos 2\xi}+\frac{a\eta}{\pi}C\right]+$$

$$+\frac{2\overline{S}}{\varkappa a}\eta\left[\frac{\operatorname{ch}2\eta\cos 2\xi-1-i\operatorname{sh}2\eta\sin 2\xi}{(\operatorname{ch}2\eta-\cos 2\xi)^2}+\frac{a}{2\pi}\overline{C}\right] \tag{2.5}$$

На бесконечности при $\operatorname{Im}z\to-\infty$ выполняются соотношения

$$\sigma_{11}^{\infty}+\sigma_{22}^{\infty}+i\frac{8\mu}{\varkappa+1}\omega^{\infty}=\frac{2iS}{\varkappa a}C,\qquad \sigma_{22}^{\infty}-i\sigma_{12}^{\infty}=-\frac{i(\varkappa+1)S}{\varkappa a}C \tag{2.6}$$

При условии равенства нулю главного вектора сил, приложенных к границе Г, $C=0$.

Автор признателен Н.Ф. Морозову, по инициативе которого написана эта статья.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96.01.00559).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
2. *Линьков А.М.* Задачи теории упругости для плоскости с периодическими системами разрезов // Исследования по упругости и пластичности. Л.: ЛГУ, 1976. Вып. 11. С. 11–18.
3. *Саврук М.П., Дацышин А.П.* О взаимодействии системы трещин с границей упругого тела // Прикл. механика. 1974. Т. 10. № 7. С. 84–92.
4. *Бурышкин М.Л., Радиолло М.В.* Обобщенная периодическая задача теории упругости для трещиноватой полуплоскости // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 285–274.
5. *Греков М.А.* Об одном методе решения плоских задач теории упругости для полуплоскости с разрезом // Новожиловский сборник. С.-Пб.: Судостроение, 1992. С. 171–179.
6. *Линьков А.М.* О методе решения задач о приповерхностных трещинах в упругих телах // Исслед. по механике строит. конструкций и материал. С.-Пб.: СПбГАСУ, 1995. С. 78–85.
7. *Гольдштейн Р.В.* К вопросу о применении метода граничных интегральных уравнений для решения задач механики сплошных сред // Метод граничных интегральных уравнений. М.: Мир, 1978. С. 183–209.
8. *Крауч С., Старфилд А.* Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. 328 с.
9. *Chen Y.Z., Cheung Y.K.* New integral equation approach for the crack problem in elastic half-plane // Intern. J. Fracture. 1990. V. 46. No. 1. P. 57–69.
10. *Греков М.А., Даль Ю.М., Курочкин В.А.* Предельное состояние упругой полосы с внутренней трещиной // Изв. АН. МТТ. 1992. № 6. С. 148–155.
11. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
12. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
14.VIII.1997