МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1998

УДК 539.3

© 1998 г. Г.Я. ПОПОВ

К ВОПРОСУ ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАМЕ

Предложенный новый вариант решения уравнений Ламе в сферической системе координат наделяется необходимой общностью и используется для решения задач концентрации напряжений возле сферических дефектов (трещин или тонких включений) в сферически-слоистых средах. Рассмотрен случай, когда указанная среда не ограничена и произвольно загружена и дефекты расположены на поверхностях смены упругих постоянных, причем количество таких поверхностей может быть произвольным. Основным преимуществом предлагаемого метода является то, что система алгебраических уравнений для произвольных констант расщепляется в самом общем случае и явное решение ее можно выразить через матрицы размерности не выше 2×2. Метод легко обобщается на случай, когда слоистая среда конечных размеров.

1. Предложенное в работе [1] новое представление решения уравнений Ламе оказалось не обладающим требуемой общностью. Точнее говоря, использование решений уравнений (14) указанной работы позволяет решать только частные задачи теории упругости. Уравнение же (10) сохраняет силу, так как выражает известный факт, впервые, по-видимому, обнаруженный Мичелем [2, 3], что проекция вращения на радиус-вектор является гармонической функцией (можно показать, что введенная новая неизвестная функция $\tilde{z}(r,\ \theta,\ \varphi)\ \equiv\ z^*(r,\ \theta,\ \varphi)$ представляет собой указанную проекцию). Иными словами, для нахождения трансформанты Фурье – Лежандра $z_{nk}(r) \equiv \overset{*}{z}_{nk}(r)$ функции $z^*(r, \theta, \varphi)$ можем воспользоваться дифференциальным уравнением, приведенным в конце статьи [1], общее решение которого имеет вид

$$z^*_{nk}(r) = X_{nk}r^k + Y_{nk}z^{-k-1} \quad (n = 0, \mp 0, \mp 2, \ldots, k = \overline{0, \infty}) \tag{1.1}$$

Чтобы получить аналогичные общие представления для $u_{nk}(r)$ и $z_{nk}(r)$, будем исходить из формул, полученных Ламе [4] для смещений u_r, u_θ, u_φ и записанных А.Ф. Улитко [5] в виде

$$u_r(r,\theta,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=-k}^{k} \frac{P_k^{|n|}(\cos\theta)u_k^{(n)}(r)}{\sqrt{2\pi\sigma_{kn}}e^{-in\varphi}}, \quad \sigma_{kn} = \frac{k-|n|!}{k+|n|!}\frac{2k+1}{2}$$

$$u_k^{(n)}(r) = \mu_k^+ A_k^{(n)} r^{k+1} + B_k^{(n)} r^{k-1} + \mu_k^- C_k^{(n)} r^{-k} - D_k^{(n)} r^{-k-2}$$

$$\mu_k^+ = k - 2 - 4\mu, \quad \mu_k^- = k + 3 - 4\mu \tag{1.2}$$

Здесь X_{nk}, Y_{nk}, $A_k^{(n)}$, $B_k^{(n)}$, $C_k^{(n)}$, $D_k^{(n)}$ – произвольные постоянные, μ – коэффициент Пуассона, $P_k^m(z)$ – присоединенные функции Лежандра. Аналогичные формулы для u_θ и u_φ не приводим.

Переписав формулы (1.2) в виде (G – модуль сдвига):

$$2Gu_r = u = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=|n|}^{\infty} u_k^{(n)} \frac{2GP_k^{|n|}(\cos\theta)}{\sqrt{2\pi\sigma_{kn}}e^{-in\varphi}} \tag{1.3}$$

применим к (1.3), как и в [1], интегральное преобразование Фурье

$$u_n(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(r,\theta,\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi \tag{1.4}$$

и Лежандра

$$u_{nk}(r) = \int_0^{\pi} \sin\theta P_k^{|n|}(\cos\theta)u_n(r,\theta)d\theta \tag{1.5}$$

В результате установим связь $u_{kn}(r) = 2G(2\pi\sigma_{kn})^{-1/2}u_k^{(n)}(r)$ и потому трансформанта Фурье – Лежандра функции (1.3) будет иметь вид

$$u_{nk}(r) = \mu_k^+ X_{nk}^0 r^{k+1} + X_{nk}^1 r^{k-1} + \mu_k^- Y_{nk}^0 r^{-k} - Y_{nk}^1 r^{-k-2} \tag{1.6}$$

где $X_{nk}^{0,1}$, $Y_{nk}^{0,1}$ – новые произвольные постоянные. Выполнив аналогичные операции над формулами для u_θ, u_φ из [5] с учетом формул для введенных в [1] новых неизвестных функций

$$\sin\theta\begin{pmatrix} z_n \\ z_n^* \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial\theta}\begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}\sin\theta \pm in\begin{pmatrix} w_n \\ v_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix} = 2G\begin{pmatrix} u_{\theta n} \\ u_{\varphi n} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

получим

$$-z_{nk}(r) = k\mu_{k+2}^- X_{nk}^0 r^{k+1} + (k+1)X_{nk}^1 r^{k-1} - (k+1)\mu_{k-2}^+ Y_{nk}^0 r^{-k} + kY_{nk}^1 r^{-k-2} \tag{1.8}$$

Располагая формулами (1.6) и (1.8) и пользуясь установленными в [1] формулами

$$\sigma_{rn} = \mu_0 u_n' + \frac{\mu(2u_n + z_n)}{(1-2\mu)r}, \quad \mu_0 = \frac{1-\mu}{1-2\mu} \tag{1.9}$$

$$2r\tau_n = r^2\left(\frac{z_n}{r}\right)' - \nabla_n u_n, \quad 2r\tau_n^* = r^2\left(\frac{z_n^*}{r}\right)' \tag{1.10}$$

(штрих означает производную по r) для трансформант Фурье-напряжений и введенных в [1] их комбинаций

$$\begin{pmatrix} \tau_n \\ \tau_n^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\begin{pmatrix} \tau_{\theta n} \\ \tau_{\varphi n} \end{pmatrix} \pm in\begin{pmatrix} \tau_{\varphi n} \\ \tau_{\theta n} \end{pmatrix}\right] \quad \begin{pmatrix} \tau_{r\varphi} \equiv \tau_\varphi \\ \tau_{r\theta} \equiv \tau_\theta \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

находим

$$\begin{aligned} \sigma_{rnk} &= \mu_k^\sigma X_{nk}^0 r^k + (k-1)X_{nk}^1 r^{k-2} - \mu_{k+2}^\sigma Y_{nk}^0 r^{-k-1} + (k+2)Y_{nk}' r^{-k-3} - \tau_{nk} = \\ &= k\mu_{k+1}^\tau X_{nk}^0 r^k + (k-1)X_{nk}^1 r^{k-2} + (k+1)\mu_k^\tau Y_{nk}^0 r^{-k-1} - k(k+2)Y_{nk}^1 r^{-k-3} (\mu_k^\sigma = \\ &= k(k-1) - 2 - 2\mu, \quad \mu_k^\tau = k^2 - 2 + 2\mu) \\ 2\tau_{nk}^* &= X_{nk}(k-1)r^{k-1} - Y_{nk}(k+2)r^{-k-2} \end{aligned} \tag{1.12}$$

В работе [1] было указано, что предложенное представление решений уравнений Ламе особенно удобно для решения краевых задач для сферически-слоистых сред. Это утверждение остается справедливым и для изложенного здесь уточненного варианта. Покажем это на такой задаче.

2. В неограниченной сферически-слоистой упругой среде, произвольно загруженной объемными силами, имеются дефекты типа трещин или тонких включений, расположенные на сферических поверхностях смены упругих постоянных. Требуется определить распределение напряжений и смещений в такой среде. Обозначим радиусы сферических поверхностей, на которых скачкообразно происходит смена упругих постоянных, через R_i $(i=\overline{0,\ m})$, так что при $R_{i-1}<r<R_i$ коэффициент Пуассона и модуль сдвига приобретают значения μ_i и G_i, причем $R_{-1}=0$, $R_{m+1}=\infty$. В качестве основных неизвестных примем функции, введенные в [1]: σ_r, τ, τ^*; $u=2Gu_r$, z, z^*. Как показано в [1], если будут найдены эти функции, то по ним можно определить все компоненты поля смещений и напряжений. Будем оперировать их трансформантами Фурье – Лежандра: σ_{rnk}, τ_{nk}, τ^*_{nk}; u_{nk}, z_{nk}, z^*_{nk}, определяемыми формулами типа (1.3), (1.4). Каждая из этих функций на слое $R_{i-1}<r<R_i$ $(i=\overline{0,\ m+1})$ будет определяться соответствующей формулой из (1.1), (1.6), (1.8) и (1.12) для каждого слоя со своими постоянными ${}_iX^{0,1}_{nk}$, ${}_iY^{0,1}_{nk}$ и упругими постоянными μ_0 и G_i. Например, для $u_{nk}(r)$ справедлива формула

$$\begin{aligned}
&{}_iu_{nk}(r)={}_iX^0_{nk}r^{k+1}{}_i\mu^+_k+{}_iX^1_{nk}r^{k-1}+{}_iY^0_{nk}r^{-k}{}_i\mu^-_k-\\
&-{}_iY^1_{nk}r^{-k-2}+{}_iu^0_{nk}(r),\quad {}_i\mu^+_k=k-2+4\mu_i\\
&{}_i\mu^-_k=k+3-4\mu_i\quad (i=\overline{0,m+1})
\end{aligned}\tag{2.1}$$

Подобные же формулы имеют место и для остальных трансформант:

$$\begin{aligned}
&{}_iz_{nk}(r),\quad {}_iz^*_{nk}(r),\quad {}_i\sigma_{rnk}(r),\quad {}_i\tau_{nk}(r),\\
&{}_i\tau_{nk}(r),\quad R_{i-1}<r<R_i\quad (i=\overline{0,m+1})
\end{aligned}\tag{2.2}$$

При этом, чтобы обеспечить регулярность перечисленных трансформант в нуле и на бесконечности, следует положить

$${}_0Y_{nk}={}_0Y^0_{nk}={}_0Y^1_{nk}=0,\quad {}_{m+1}X_{nk}={}_{m+1}X^0_{nk}={}_{m+1}X^1_{nk}=0\tag{2.3}$$

При получении формулы (2.1) учтено, что на каждом сферическом слое могут быть приложены объемные силы, которые вызывают свое поле напряжений и смещений. Соответствующие этому полю трансформанты (1.1), (1.6), (1.8) и (1.12) будем обозначать через ${}_iu^0_{nk}$, ${}_iz^0_{nk}$, ${}_iz^{*0}_{nk}$, ${}_i\sigma^0_{rnk}$, ${}_i\tau^0_{nk}$, ${}_i\tau^{*0}_{nk}$. Поскольку можно считать, что указанное поле возникает в неограниченной среде с постоянными μ_i и G_i, компоненты этого поля всегда можно определить с помощью известных формул теории упругости и потому будем считать перечисленные трансформанты известными. Таким образом, проблемой является определение постоянных ${}_iX_{nk}$, ${}_iY_{nk}$, ${}_iX^{0,1}_{nk}$, ${}_iY^{0,1}_{nk}$ $(i=\overline{0,\ m+1})$. Благодаря введению функций $z(r,\theta,\varphi)$, $z^*(r,\theta,\varphi)$, $\tau(r,\theta,\varphi)$, $\tau^*(r,\theta,\varphi)$ проблема распадается на раздельное нахождение ${}_iX_{nk}$, ${}_iY_{nk}$ и ${}_iX^{0,1}_{nk}$, ${}_iY^{0,1}_{nk}$.

Предлагаемый нами способ определения этих постоянных вначале опишем применительно к ${}_iX_{nk}$, ${}_iY_{nk}$.

В первую очередь следует обеспечить непрерывность смещений и напряжений при $r=R_i$ $(i=\overline{0,\ m})$. В данном случае речь идет о напряжениях $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{r\varphi}$, через которые выражается τ^*, и смещениях u_θ и u_φ, определяющих z^*. Условие непрерывности указанных смещений приводит к необходимости приравнять функцию $\overset{*}{z}_{nk}$ на i-м слое при $r=R_i$, разделенную на $2G_i$, к аналогичному значению той же функции на $(i+1)$-м слое, разделенной на $2G_{i+1}$.

Непрерывность напряжений $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{r\varphi}$ при $r = R_i$ приводит к равенству значений функции τ^* при $r = R_i$, определенных соответственно на i-м и $(i + 1)$-м слоях.

Сказанное справедливо при условии, что в упругой среде при $r = R_i$ нет дефекта: трещины или включения.

Поскольку предполагается рассмотреть более сложный случай, когда такой дефект имеется и расположен на сферической поверхности $r = R_i$ на участке l_0 ($\omega_1 \leqslant \theta \leqslant \omega_2$), необходимо ввести такие скачки и их трансформанты Лежандра

$$
\begin{gathered}
(2G_i)^{-1} z_n^*(R_i - 0,\theta) - (2G_{i+1})^{-1} z_n^*(R_i + 0,\theta) = \langle z_n^*(R_i,\theta)\rangle \\
\tau_n^*(R_i - 0,\theta) - \tau_n^*(R_i + 0,\theta) = \langle \tau_n^*(R_i,\theta)\rangle, \quad \theta \in l_0 \\
\int\limits_{l_0} \sin t \begin{pmatrix} \langle z_n^*(R_i,t)\rangle \\ \langle \tau_n^*(R_i,t)\rangle \end{pmatrix} P_k^{|n|}(\cos t)dt = \begin{pmatrix} {}_i z_{nk}^{*1} \\ {}_i \tau_{nk}^{*1} \end{pmatrix}
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

Условие непрерывности смещений и напряжений при $r = R_i$ $(i = \overline{0,\ m})$ с учетом наличия скачков (2.4) запишется в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{{}_iX_{nk}R_i^k}{2G_i} + \frac{{}_iY_{nk}R_i^{-k-1}}{2G_i} - \frac{{}_{i+1}X_{nk}R_i^k}{2G_{i+1}} - \frac{{}_{i+1}Y_{nk}R_i^{-k-1}}{2G_{i+1}} = {}_i Z_{nk}^* \\
{}_iX_{nk}(k-1)R_i^{k-1} - {}_i Y_{nk}(k+2)R_i^{-k-2} - {}_{i+1} X_{nk}(k-1)R_i^{k-1} + \\
+ {}_{i+1} Y_{nk}(k+2)R_i^{-k-2} = 2\, {}_i T_{nk}^* \quad (i = \overline{0,m}) \\
{}_iZ_{nk}^* = {}_i z_{nk}^{*1} + {}_{i+1} z_{nk}^{*0}(R_i)(2G_{i+1})^{-1} - {}_i z_{nk}^{*0}(R_i)(2R_i)^{-1} \\
{}_iT_{nk}^* = {}_i \tau_{nk}^{*1} + {}_{i+1} \tau_{nk}^{*0}(R_i) - {}_i \tau_{nk}^{*0}(R_i)
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

Чтобы определить из уравнений (2.5) коэффициенты ${}_iX_{nk}$ и ${}_iY_{nk}$ с учетом (2.3), введем векторы

$$
\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} {}_iX_{nk} \\ {}_iY_{nk} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_i = 2\begin{pmatrix} {}_iZ_{nk}^* \\ {}_iT_{nk} \end{pmatrix} \quad (i = 0, \overline{m+1})
\tag{2.6}
$$

что позволит уравнения (2.5) записать в таком виде

$$
a_i\mathbf{x}_i - b_i\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{f}_i, \quad \mathbf{x}_{i+1} = c_i\mathbf{x}_i - b_i^{-1}\mathbf{f}_i
\tag{2.7}
$$

$$
a_i = \begin{Vmatrix} R_iG_i^{-1} & R_i^{-k-1}G_i^{-1} \\ (k-1)R_i^{k-1} & -(k+2)R_i^{-k-2} \end{Vmatrix}, \quad b = \begin{Vmatrix} R_i^kG_{i+1}^{-1} & R_i^{-k-1}G_{i+1}^{1} \\ (k-1)R_i^{k-1} & -(k+2)R_i^{-k-2} \end{Vmatrix}
$$

Используя (2.7), решение уравнений (2.5) удалось получить в виде

$$
\mathbf{x}_i = C_{j-1}^{(0)}\mathbf{x}_0 - \sum_{l=0}^{j-1} C_{j-1}^{(l+1)}b_l^{-1}\mathbf{f}_l \quad (i = \overline{0,m})
\tag{2.8}
$$

где (I – единичная матрица второго порядка 2×2):

$$
C_j^{(l)} = C_jC_{j-1}\ldots C_l, \quad l < j; \quad C_j^{(l)} = C_j; \quad C_j^{(l)} = I, \quad l > j
\tag{2.9}
$$

При этом, согласно (2.3):

$$
\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} {}_0X_{nk} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{m+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ {}_{m+1}Y_{nk} \end{pmatrix}
\tag{2.10}
$$

Чтобы найти значения этих векторов, положим в (2.7) $i = m$ и подставим туда выражение для x_m взятое из (1.8) с учетом (2.10). В результате получим

$$B_m\begin{pmatrix} {}_0X_{nk} \\ 0 \end{pmatrix} - b_m\begin{pmatrix} 0 \\ {}_{m+1}Y_{nk} \end{pmatrix} = \mathbf{f}_m + \sum_{l=0}^{m-1} D_l^{(m)}\mathbf{f}_l \tag{2.11}$$

$$B_m = a_m C_{m-1}^{(0)} = \begin{pmatrix} B_{00}^{(m)} & B_{01}^{(m)} \\ B_{10}^{(m)} & B_{11}^{(m)} \end{pmatrix}, \quad D_l^{(m)} = a_m C_{m-1}^{(l+1)} b_l^{-1} = \begin{pmatrix} d_{00}^{l,m} & d_{01}^{l,m} \\ d_{10}^{l,m} & d_{11}^{l,m} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Решая систему (2.11), находим

$$ {}_0X_{nk} = \Delta_m^{-1}[b_{11}^{(m)}F_{nk}^0 - b_{01}^{(m)}F_{nk}^1], \quad {}_{m+1}Y_{nk} = \Delta_m^{-1}[B_{10}^{(m)}F_{nk}^0 - B_{00}^{(m)}F_{nk}^1],$$

$$\Delta_m = b_{11}^{(m)}B_{00}^{(m)} - b_{01}^{(m)}B_{10}^{(m)} \tag{2.13}$$

При этом, согласно (2.7) и (2.12), имеем

$$b_{01}^{(m)} = R_m^{-k-1}G_{m+1}^{-1}, \quad b_{11}^{(m)} = -(k+2)R_m^{-k-2} \tag{2.14}$$

$$F_{nk}^0 = 2Z_{nk}^* + 2\sum_{l=0}^{m-1} ({}_lZ_{nk}^* d_{00}^{l,m} + {}_lT_{nk}^* d_{01}^{l,m})$$

$$F_{nk}^1 = 2T_{nk}^* + 2\sum_{l=0}^{m-1} ({}_lZ_{nk}^* d_{10}^{l,m} + {}_lT_{nk}^* d_{11}^{l,m})$$

Формулы (2.8), (2.10) и (2.13) полностью определяют неизвестные коэффициенты, вошедшие в выражения определяющей функции $z_{nk}^*(r)$ и $\tau_{nk}^*(r)$.

Изложенная схема годится и для определения оставшихся коэффициентов ${}_iX_{nk}^{0,1}$ и ${}_iY_{nk}^{0,1}$ $(i = \overline{0, m+1})$. Действительно, как и выше, записываем условие непрерывности функций $u_{nk}(r)$, $z_{nk}(r)$ и $\sigma_{rnk}(r)$, $\tau_{nk}(r)$ на каждой сферической поверхности $r = R_i$ $(i = \overline{0, m})$. Если записывать условия непрерывности с учетом наличия дефекта, то к этим условиям следует подключить трансформанты Лежандра ${}_iz_{nk}^1$, ${}_i\tau_{nk}^1$ скачков

$$z_n(R_i - 0, \theta)(2G_i)^{-1} - z_n(R + 0, \theta)(2G_{i+1})^{-1} = \langle z_n(R_i, \theta)\rangle$$

$$\tau_n(R_i - 0, \theta) - \tau_n(R_i + 0, \theta) = \langle \tau_n(R_i, \theta)\rangle, \quad \theta \in l_0 \tag{2.15}$$

определяемые формулами, аналогичными (2.4).

Введя векторы

$${}_i\mathbf{X}_{nk}, \ {}_i\mathbf{Y}_{nk}, \ {}_i\mathbf{V}_{nk}, \ {}_i\mathbf{S}_{nk} = \begin{pmatrix} {}_iX_{nk}^0 \\ {}_iX_{nk}^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} {}_iY_{nk}^0 \\ {}_iY_{nk}^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} {}_iU_{nk} \\ {}_iZ_{nk} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} {}_i\Sigma_{nk} \\ {}_iT_{nk} \end{pmatrix}$$

$${}_iU_{nk} = u_{nk}^1 + {}_{i+1}u_{nk}(R_i)(2G_{i+1})^{-1} - {}_iu_{nk}^0(R_i)(2G_i)^{-1}$$

$${}_iZ_{nk} = {}_iz_{nk}^1 + {}_{i+1}z_{nk}^0(R_i)(2G_{i+1})^{-1} - {}_iz_{nk}^0(R_i)(2G_i)^{-1}$$

$${}_i\Sigma_{nk} = {}_i\sigma_{rnk}^1 + {}_{i+1}\sigma_{rnk}^0(R_i) - {}_i\sigma_{rnk}^0(R_i)$$

$${}_iT_{nk} = {}_i\tau_{nk}^1 + {}_{i+1}\tau_{nk}^0(R_i) - {}_i\tau_{nk}^0(R_i) \tag{2.16}$$

условия непрерывности смещений можно записать в виде

$$\alpha^{(i)}{}_i\mathbf{X}_{nk} - \alpha_k^{(i)}{}_{i+1}\mathbf{X}_{nk} + \beta^{(i)}{}_i\mathbf{Y}_{nk} - \beta_*^{(i)}{}_{i+1}\mathbf{Y}_{nk} = {}_i\mathbf{V}_{nk} \quad (i = \overline{0, m})$$

$$\alpha^{(i)}=\frac{R_i^{k-1}}{2G_i}\begin{Vmatrix} {}_i\mu_k^+R_i^2 & 1 \\ -{}_i\mu_{k+2}R_i^2k & -(k+1)\end{Vmatrix},\quad \alpha_*^{(i)}=\frac{R_i^{k-1}}{2G_{i+1}}\begin{Vmatrix} {}_{i+1}\mu_k^+R_i^2 & 1 \\ -{}_{i+1}\mu_{k+2}^-R_i^2 & -(k+1)\end{Vmatrix}$$

$$\beta^{(i)}=\frac{R_i^{-k-2}}{2G_i}\begin{Vmatrix} {}_i\mu_k^-R_i^2 & -1 \\ {}_i\mu_{k-2}^+(k+1)R_i^2 & -k\end{Vmatrix}$$

$$\beta_*^{(i)}=\frac{R_i^{-k-2}}{2G_{i+1}}\begin{Vmatrix} {}_{i+1}\mu_k^-R_i^2 & -1 \\ {}_{i+1}\mu_{k-2}^+(k+1)R_i^2 & -k\end{Vmatrix} \tag{2.17}$$

условия же непрерывности напряжений запишутся так:

$$\gamma_i^{(i)}\mathbf{X}_{nk}-\gamma_*^{(i)}{}_{i+1}\mathbf{X}_{nk}+\delta^{(i)}{}_i\mathbf{Y}_{nk}-\delta_*^{(i)}{}_{i+1}\mathbf{Y}_{nk}={}_i\,\mathbf{S}_{nk}\quad (i=\overline{0,m})$$

$$\frac{\gamma^{(i)}}{R_i^{k-2}}=\begin{Vmatrix} {}_i\,\mu_k^\sigma R_i^2 & k-1 \\ -{}_i\mu_k^\tau R_i^2k & 1-k^2\end{Vmatrix},\quad \frac{\gamma^{(i)}}{R_i^{-k+2}}=\begin{Vmatrix} {}_{i+1}\,\mu_k^\sigma R_i^2 & k-1 \\ -{}_{i+1}\mu_k^\tau R_i^2k & 1-k^2\end{Vmatrix} \tag{2.18}$$

$$-\frac{\delta^{(i)}}{R_i^{k+3}}=\begin{Vmatrix} {}_i\mu_{k+1}^\sigma R_i^2 & -k-2 \\ {}_i\mu_k^\tau R_i^2(k+1) & -k(k+2)\end{Vmatrix}$$

$$-\frac{\delta_*^{(i)}}{R_i^{k+3}}=\begin{Vmatrix} {}_{i+1}\mu_{k+1}^\sigma R_i^2 & -k-2 \\ {}_{i+1}\mu_k^\tau R_i^2(k+1) & -k(k+2)\end{Vmatrix}$$

Систему уравнений (2.17), (2.18) приведем к уже изученной (2.7), если введем четырехмерные векторы и соответствующие матрицы:

$$\mathbf{x}_i,\mathbf{f}_i=\begin{pmatrix} {}_i\mathbf{X}_{nk} \\ {}_i\mathbf{Y}_{nk}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} {}_i\mathbf{V}_{nk} \\ {}_i\mathbf{S}_{nk}\end{pmatrix};\quad a_i,b_i=\begin{Vmatrix}\alpha^{(i)}\beta^{(i)} \\ \gamma^{(i)}\delta^{(i)}\end{Vmatrix},\ \begin{Vmatrix}\alpha_*^{(i)}\beta_*^{(i)} \\ \gamma_*^{(i)}\delta_*^{(i)}\end{Vmatrix} \tag{2.19}$$

Следовательно, решение системы (2.17) и (2.18) запишется в виде (2.8), где векторы и матрицы следует брать согласно (2.19). При этом сохраняют силу формулы (2.10), где вместо ${}_0X_{nk}$ и ${}_{m+1}Y_{nk}$ следует принять векторы ${}_0X_{nk}$, ${}_{m+1}Y_{nk}$. Можно убедиться, что для их определения справедливы формулы (2.13) с корректировкой, что и для формулы (2.8).

Таким образом, все коэффициенты ${}_iX_{nk}$, ${}_iY_{nk}$, ${}_iX_{nk}^{0,1}$, ${}_iY_{nk}^{0,1}$ найдены, а зная их, определим трансформанты (2.1), (2.2).

Для окончательного решения задачи, следует найти скачки (2.3) и (2.15). Для получения соответствующих уравнений необходимо подставить найденные коэффициенты в формулы (2.1), (2.2) и обратить полученные трансформанты Лежандра. Последующее удовлетворение условий на дефекте в трансформантах Фурье позволит получить интегральные или интегродифференциальные уравнения для определения указанных скачков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов Г.Я.* // Докл. РАН, в печати.
2. *Michel J.H.* // Proc. Math. Soc. London. V. 32. P. 23–35.
3. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1935. 674 с.
4. *Lamé G.* Zecons sur les coordonnées curvilignes et lurs diverses applications. Paris: Bechelier, 1859.
5. *Улитко А.Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 263 с.

Одесса

Поступила в редакцию
9.III.1997