

УДК 539

© 1998 г. Г.А. ВАНИН

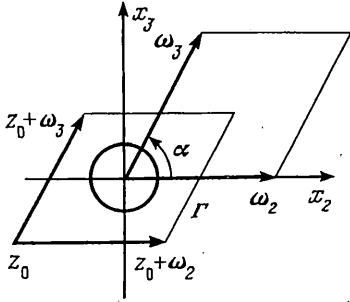
## НЕЛИНЕЙНЫЙ СДВИГ И РОДСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ КОМПОЗИТОВ

Физико-механические характеристики свойств компонентов волокнистых материалов в общем случае обладают нелинейными эффектами, влиянием которых в расчетах состояния материала для некоторых видов волокон и полимерных матриц можно пренебречь. В композиционных материалах, предназначенных для работы в условиях повышенной температуры, используют как полимерные матрицы с жесткой пространственной микроструктурой, так и соединения из алюминия, титана и легких сплавов. В последних случаях учет нелинейного поведения компонентов материала становится необходимым уже на начальном этапе его нагружения. В литературе исследование свойств нелинейных композитов с помощью моделей волокно-матрица в основном проведены на основе численных методов. В частности, влияние нелинейных свойств матрицы из титана на состояние волокнистого композита с тетрагональной структурой наиболее полно рассмотрена в цикле работ Ю.В. Соколкина и его последователей [1]. При формовании материалов с металлической матрицей, а также воздействию высокотемпературного нагружения в условиях эксплуатации в его структуре протекают процессы, изменяющие как его микростроение, так и состав. Указанные изменения в межфазной зоне неблагоприятно сказываются на взаимодействии компонентов материала, поэтому для защиты волокон на них наносят барьерные покрытия из тугоплавких соединений. Поэтому необходимы аналитические методы исследования композитов по данным о компонентах для различных моделей компоновок структуры с учетом специфики межфазных явлений. Ниже в постановке физически нелинейной теории упругости разработан аналитический метод решения задачи о продольном сдвиге неограниченной среды с двоякопериодической волокнистой структурой. Решение аналогичной упругой задачи было получено ранее с помощью эллиптических функций [2].

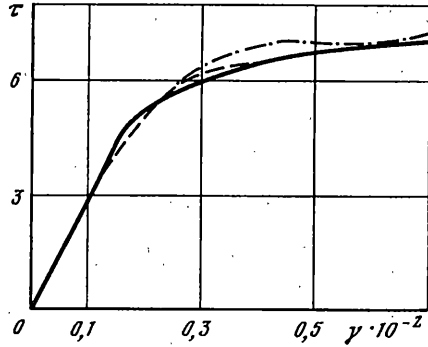
1. Расположение системы координат и основные параметры волокнистой среды с простой двоякопериодической структурой представлены на фиг. 1. Волокна одинаковы, все компоненты материала изотропны. Для гексагональной упаковки следует принять  $\alpha = \pi/3$ , тетрагональной  $\alpha = \pi/2$ . Ранее показано [2], что плотные упаковки стеклопластиков обладают механическими характеристиками, укладываемыми в вилку между данными, полученными для гексагональной и тетрагональной упаковок волокон в двоякопериодической среде. Указанная вилка значительно уже известных типа Хашина – Штрикмана и позволяет более строго оценить как величину разброса интегральных параметров, так и интенсивность внутренних напряжений. Состояние продольного сдвига в каждой точке характеризуется касательными напряжениями  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_{13}$ . Полагаем процесс нагружения простым, принимаем в качестве определяющих соотношения физически нелинейной теории упругости [3]. В одномерном состоянии принимаем

$$\sigma_{12} = G\gamma_{12} \left[ 1 + 2q \left( \frac{\mu}{4} \gamma_{12}^2 \right) \right], \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial x_2} \quad (1.1)$$

где  $q$  – монотонная функция,  $\mu$  – параметр. В случае двумерного состояния вводим комплексные комбинации переменных  $\tau = \sigma_{12} - i\sigma_{13}$ ,  $\gamma = \gamma_{12} - i\gamma_{13}$ ,  $z = x_2 + ix_3$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Обобщенное соотношение (1.1) на случай двумерного состояния будет

$$\tau = G\gamma \left[ 1 + 2q \left( \frac{\mu}{4} |\gamma|^2 \right) \right], \quad q \left( \frac{\mu}{4} |\gamma|^2 \right) = \sum_{n=1}^N \left( \frac{\mu}{4} \right)^n \alpha_n |\gamma|^{2n} = \sum_{n=1}^N \mu^n \alpha_n \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{2n} \quad (1.2)$$

где  $u = u_1$ ;  $\alpha_n$  – параметры, определяемые по данным экспериментальных исследований. Сохранение в (1.2) высоких степеней градиентов перемещений допустимо при соизмеримых по абсолютной величине слагаемых этого ряда, т.к. высшие степени градиентов смещений опущены в определении деформаций. Типовая диаграмма ( $\tau$ ,  $\gamma$ ) без явно выраженной площадки текучести для легкого сплава типа АМГ-6 приведена на фиг. 2 в виде сплошной кривой (напряжения приведены в кгс/мм<sup>2</sup>). Штриховая кривая определяет результат аппроксимации диаграммы с помощью двух первых членов, а штрих-пунктирная – при сохранении трех членов в формуле

$$\tau = G\gamma(1 - 2,5 \cdot 10^4 \gamma^2 + 1,3125 \cdot 10^8 \gamma^4) \quad (1.3)$$

$\mu = 0,5$ ;  $\alpha_1 = -10^5$ ;  $\alpha_2 = 42 \cdot 10^8$ ;  $G = 2670$  кгс/мм<sup>2</sup>.

Из приведенных данных следует, что для  $\gamma \leq 0,4 \cdot 10^{-2}$  можно воспользоваться упрощенным уравнением состояния

$$\tau = G\gamma(1 + \mu / 2\alpha_1 |\gamma|^2) \quad (1.4)$$

Для волокон с аналогичной диаграммой состояния следует принять

$$\tau_a = G_a \gamma_a [1 + 2q_a (\mu_a / 4 |\gamma_a|^2)] \quad (1.5)$$

Здесь и везде в дальнейшем величины, относящиеся к волокнам, отмечаются индексом  $a$ , без индекса – к матрице или ко всем компонентам одновременно. Путем простых преобразований уравнения равновесия с учетом (1.2), получаем нелинейное интегральное уравнение для определения разрешающей функции

$$u = U(z) + \overline{U(z)} - \int q \left[ \mu \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 \right] du \quad (1.6)$$

где  $U(z)$  – аналитическая функция. На межфазных границах волокно–матрица  $z \in l + P$  решения уравнения (1.6) должны быть подчинены условиям совершенного контакта

$$u_a = u, \quad \tau_{na} = \tau_n, \quad z \in l + P \quad (1.7)$$

$$P = m\omega_2 + n\omega_3 = \omega(m + ne^{i\alpha}), \quad m, n = 0, \pm 1, \dots$$

Касательные напряжения на наклонных площадках с нормалью  $n$  будут

$$\tau_n = -iG \left( \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{ds} - \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \frac{d\bar{z}}{ds} \right) \left[ 1 + 2q \left( \mu \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 \right) \right] \quad (1.8)$$

Введенные функции подчиняем условиям усреднения, определяющих средние напряжения и деформации, а также связи между ними [2]:

$$\hat{\tau} = -\frac{i}{2F} \oint_{\Gamma} \bar{z} (\tau dz - \bar{\tau} d\bar{z}), \quad \hat{\gamma} = \frac{i}{F} \oint_{\Gamma} u d\bar{z} \quad (1.9)$$

где  $\Gamma$  – контур параллелограмма периодов,  $F = \omega^2 \sin \alpha$  – его площадь. Решение уравнения (1.6) построено в виде асимптотического разложения искомых функций по параметру  $\mu$  в предположении монотонного изменения функции  $q$  для всех компонентов

$$\begin{pmatrix} u \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ U_0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} u_1 \\ U_1 \end{pmatrix} + \mu^2 \begin{pmatrix} u_2 \\ U_2 \end{pmatrix} + \dots \quad (1.10)$$

Первые приближения имеют вид

$$u_0 = U_0 + \bar{U}_0, \quad u_1 = U_1 + \bar{U}_1 - \alpha_1 \int \left| \frac{\partial u_0}{\partial z} \right|^2 du_0 \quad (1.11)$$

$$u_2 = U_2 + \bar{U}_2 - 2\alpha_1 \operatorname{Re} \int \left( \frac{\partial u_0}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}} dz - 2\alpha_1 \int \left| \frac{\partial u_0}{\partial z} \right|^2 du_1 - \alpha_2 \int \left| \frac{\partial u_0}{\partial z} \right|^4 du_0,$$

$$u_3 = U_3 + \bar{U}_3 - 2\alpha_1 \int \left( \frac{\partial u_0}{\partial z} \right)^2 du_2 - 3\alpha_2 \int \left| \frac{\partial u_0}{\partial z} \right|^4 du_1 - \alpha_3 \int \left| \frac{\partial u_0}{\partial z} \right|^6 du_0 - 2\alpha_1 \int \left| \frac{\partial u_1}{\partial z} \right|^2 du_0 -$$

$$- 2\alpha_1 \operatorname{Re} \int \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial u_0}{\partial \bar{z}} - \left( \frac{\partial u_0}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{z}} \right] dz - 4\alpha_2 \operatorname{Re} \int \left| \frac{\partial u_0}{\partial z} \right|^2 \left( \frac{\partial u_0}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}} dz$$

Последующие члены находятся аналогично, но достаточно громоздки, поэтому здесь не приводятся. Каждое приближение использует представления для всех предыдущих решений, что позволяет разделить комплексные переменные в каждой функции. В дальнейшем ограничимся первыми двумя членами в уравнениях состояния (1.4) и (1.5) и сохраняем функции первого и второго приближения (1.11). Если ввести функции с разделенными переменными  $z$  и  $\bar{z}$ , то представление неопределенного интеграла (1.6) в виде разложения по малому параметру с функциями, обладающих свойствами типа

$$\int U(z)V(\bar{z})dz = V(\bar{z}) \int U(z)dz$$

обеспечивает выполнение уравнения равновесия, поэтому после разделения переменных в (1.11), найдем

$$u_0 = 2 \operatorname{Re} U_0, \quad u_1 = 2 \operatorname{Re} (U_1 - \alpha_1 \bar{U}'_0 J_2) \quad (1.12)$$

$$u_2 = 2 \operatorname{Re} (U_2 + 3\alpha_1^2 \bar{U}'_0{}^2 J_3 + \alpha_1^2 \bar{U}'_0 J_2^2 - 2\alpha_1 \bar{U}'_0 J - \alpha_1 \bar{U}'_1 J_2 + \alpha_1^2 U'_0 \bar{U}'_0{}^2 J_2)$$

$$J_m = \int U'_0{}^m dz, \quad J = \int U'_0 U'_1 dz$$

В рассматриваемых средах при однородных внешних нагрузках на каждую ячейку напряжения будут периодическими функциями

$$\tau(z + \omega_j) = \tau(z) \quad (j = 2, 3) \quad (1.13)$$

Поэтому функции упругого состояния ищем в виде ряда по эллиптическим функциям Вейерштрасса [4]:

$$U_k = C^k z - C_0^k \zeta(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{2n}^k}{(2n+1)!} \rho(z)^{(2n-1)} \quad (1.14)$$

$$\zeta(z) = -\int \rho(z) dz, \quad \rho(z + \omega_j) = \rho(z), \quad \zeta(z + \omega_j) = \zeta(z) + \delta_j$$

В частности, для гексагональной и тетрагональной решеток следует принять

$$\delta_2 = \frac{\pi}{\omega \sin \alpha}, \quad \delta_3 = \frac{\pi e^{-i\alpha}}{\omega \sin \alpha}$$

Для определения функций, заданных интегралами в (1.12), воспользуемся дифференциальным уравнением, которому удовлетворяют функции Вейерштрасса

$$(\rho')^2 = 4\rho^3 - g_2\rho - g_3, \quad \rho = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^{2k-2} \quad (1.15)$$

$$c_2 = \frac{g_2}{20}, \quad c_3 = \frac{g_3}{28}, \quad c_k = \frac{3}{(2k+1)(k-3)} \sum_{m=2}^{k-2} c_m c_{k-m}$$

$$g_2 = 60 \sum'_{m,n} (m\omega + n\omega e^{i\alpha})^{-4}, \quad g_3 = 140 \sum'_{m,n} (m\omega + n\omega e^{i\alpha})^{-6}$$

Здесь и везде в дальнейшем  $\rho(z) = \rho$ . С помощью (1.15) находятся производные любого порядка. Непосредственным интегрированием с использованием разложения производных, последовательно находим

$$\int \rho^2 dz = \frac{\rho'}{6} + \frac{g_2}{12} z, \quad \int \rho^3 dz = \frac{1}{10} \rho \rho' - \frac{3}{20} g_2 \zeta(z) + \frac{1}{10} g_3 z \quad (1.16)$$

$$\int \rho^4 dz = \frac{1}{14} \rho^2 \rho' + \frac{5g_2}{168} \rho' - \frac{g_3}{7} \zeta(z) + \frac{5}{336} g_2^2 z$$

Используя приведенные соотношения, находим, что интегралы в (1.12) являются функциями вида

$$J = az - b\zeta(z) + j(z), \quad J_m = a_m z - b_m \zeta(z) + j_m(z) \quad (1.17)$$

$$j(z + \omega_j) = j(z), \quad j_m(z + \omega_j) = j_m(z)$$

Если сохранить под интегралами только первые три функции, то получим

$$j(z) = \frac{1}{6} (C_0 C_0^1 + C^1 C_2 + C C_2^1 + \frac{1}{84} q_2 C_2 C_2^1) \rho' + \frac{1}{10} (C_0 C_2^1 + C_0^1 C_2) \rho \rho' + \frac{1}{4} C_2 C_2^1 \rho^2 \rho'$$

$$a = C C^1 + \frac{1}{12} q_2 C_0 C_0^1 + \frac{1}{10} q_3 (C_0 C_2^1 + C_0^1 C_2) + \frac{1}{126} q_2^2 C_2 C_2^1$$

$$b = C_0 C^1 + C_0^1 C + \frac{1}{15} q_2 (C_0 C_2^1 + C_0^1 C_2) + \frac{1}{4} q_3 C_2 C_2^1 \quad (1.18)$$

Здесь и везде в дальнейшем индекс 0 для нулевого приближения опущен. Если в (1.18) принять  $C_i^k = C_i$ , то легко находим формулы, определяющие  $J_2$ :

$$j(z) \rightarrow j_2(z), \quad a \rightarrow a_2, \quad b \rightarrow b_2 \quad (1.19)$$

Функции  $J_3$  имеют более громоздкое строение, поэтому приводим окончательные результаты

$$j_3(z) = \rho' \left( \lambda_0 + \lambda_1 \rho + \lambda_2 \rho^2 + \frac{1}{6} C_0 C_2^2 \rho^3 + \frac{1}{22} C_2^3 \rho^4 \right) \quad (1.20)$$

$$a_3 = \left( \frac{g_2}{4} R + \frac{5g_2^2}{112} C_2 \right) (C_0^2 + R C_2) + \frac{g_3}{10} C_0 (C_0^2 + 6R C_2) + \frac{g_2 g_3}{10} C_0 C_2^2 + \left( \frac{g_3^2}{55} + \frac{15g_2^3}{4928} \right) C_2^3$$

$$\lambda_0 = \left( \frac{R}{2} + \frac{5g_2}{56} C_2 \right) (C_0^2 + RC_2) + \frac{g_3}{12} C_0 C_2^2 + \frac{15g_2^2}{2464} C_2^3$$

$$b_3 = 3C_0 R^2 + \frac{3g_2}{20} C_0 (C_0^2 + 6RC_2) + \frac{3g_3}{7} C_2 (C_0^2 + RC_2) + \frac{7g_2^2}{80} C_0 C_2^2 + \frac{87g_2g_3}{1540} C_2^3$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{10} C_0^3 + \frac{g_3}{55} C_2^3 + \frac{C_0 C_2}{120} (72R + 7g_2 C_2), \quad R = C - \frac{g_2}{12} C_2$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{14} C_2 \left( C_0^2 + RC_2 + \frac{3g_2}{44} C_2^2 \right)$$

Здесь верхние индексы обозначают степень. Соотношения (1.18) и (1.20) вместе с (1.12) определяют с принятой точностью искомые функции. Функция смещений для волокон строится в виде разложений, аналогичных (1.10), где в качестве допустимых функций приняты степенные ряды

$$U_{ak} = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} D_n^k \frac{z^n}{n} \quad (1.21)$$

а искомые приближения смещений имеют вид, аналогичный приведенному в (1.12). В этом случае соответствующие выражения для функций  $U_{a0}$ ,  $U_{a1}$  и  $J_{am}$  находятся без труда.

2. Рассмотрим сдвиг композита, составленного из упругих волокон и матрицы из легких сплавов с нелинейной диаграммой деформирования. Условия равенства напряжений в контурах всех волокон (1.7) удовлетворяются автоматически благодаря двоякой периодичности производных  $du/dz$ . Условия равенства смещений на межфазных границах выполняются аналогично, т.к. они эквивалентны соотношениям

$$\frac{du_a}{ds} = \frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \frac{d\bar{z}}{ds}$$

Складывая краевые уравнения для напряжений и смещений, получим одно граничное условие

$$\left( 1 + \frac{G_a}{G} \right) \frac{\partial u_a}{\partial z} - \left( 1 - \frac{G_a}{G} \right) \frac{\partial u_a}{\partial \bar{z}} e^{-2i\theta} = 2 \frac{\partial u}{\partial z} + 2q \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} e^{-2i\theta} \right) \quad (2.1)$$

Разложим функции в этом уравнении в ряды по одному параметру

$$u_a = u_{a0} + \mu u_{a1} + \mu^2 u_{a2} + \dots, \quad u_{ak} = U_{ak} + \bar{U}_{ak} \quad (2.2)$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j V_j, \quad V_j = \sum_{k=0}^j \frac{\partial u_k}{\partial z} \frac{\partial u_{j-k}}{\partial \bar{z}}$$

Разделяя переменные и приравнивая члены с равными степенями параметра  $\mu$ , приходим к последовательности граничных условий

$$(1 + G_a / G) U'_{a0} - (1 - G_a / G) \bar{U}'_{a0} e^{-2i\theta} = 2U'_0 \quad (2.3)$$

$$(1 + G_a / G) U'_{a1} - (1 - G_a / G) \bar{U}'_{a1} e^{-2i\theta} = 2\partial u_1 / \partial z + 2\alpha_1 |U'_0|^2 (\bar{U}'_0 + \bar{U}'_0 e^{-2i\theta})$$

$$(1 + G_a / G) U'_{a2} - (1 - G_a / G) \bar{U}'_{a2} e^{-2i\theta} = 2\partial u_2 / \partial z + 2\alpha_1 |U'_0|^2 (\partial u_1 / \partial z + \partial u_1 / \partial \bar{z} e^{-2i\theta}) + 2\alpha_1 (U'_0 + \bar{U}'_0 e^{-2i\theta}) 2 \operatorname{Re}[U'_0 \bar{U}'_1 - \alpha_1 (U'_0 \bar{U}'_0 J_2 + U_0'^2 \bar{J}_2)]$$

$$\partial u_1 / \partial z = U'_1 - \alpha_1 \bar{U}'_0 J_2 - \alpha_1 U'_0 \bar{J}_2, \quad \partial u_2 / \partial z = U'_2 + 3\alpha_1^2 (\bar{U}'_0 J_3 + 2U'_0 U'_0 \bar{J}_3) +$$

$$+ \alpha_1^2 (2\bar{U}'_0 J_2 J_2 + U_0'^2 \bar{J}_2^2) - 2\alpha_1 (\bar{U}'_0 J' + U_0' \bar{J}) - \alpha_1 (\bar{U}'_1 J_2 + U_1' \bar{J}_2) + \alpha_1^2 \bar{U}'_0'^2 (U_0' J_2 + U_0' J_2) +$$

$$+ 2\alpha_1^2 U_0' U_0' \bar{U}'_0 \bar{J}_2$$

На основе разложений (1.14) и (1.21) из первого краевого условия (2.3) получаем две бесконечных системы алгебраических уравнений. Решение одной системы найдено в явном виде

$$D_{2n-1}^0 = -2\bar{C}_{2n-2}^0 a^{-4n+2} (1 - G_a / G)^{-1} \quad (2.4)$$

Другая система приводится к бесконечной последовательности диагонального вида, решение которой проводится итерационным методом. Для оценки степени сходимости решений ниже приведены результаты числовых расчетов коэффициентов в случае гексагональной структуры среды при  $\zeta = 0,7$ ,  $G/G_a = 0,12777$ , когда число удерживаемых неизвестных в системе растет.

	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$\bar{C}_0^0 a^{-2} / C^0$	0,77341	0,77754	0,77754	0,77982
$\bar{C}_4^0 a^{-6} / \bar{C}^0$		0,12667	0,12667	0,12719
$\bar{C}_6^0 a^{-8} / C^0$			0,14169	0,14144
$\bar{C}_{10}^0 a^{-12} / \bar{C}^0$				0,0025163

Из приведенных данных следует, что при сохранении в (1.14) первых двух членов обеспечивается устойчивое отношение между коэффициентами  $C_0^0$  и  $C^0$ . В дальнейшем для построения упругого решения сохраняем ряд (1.14). Оценку влияния нелинейных эффектов ведем при сохранении первых двух функций (1.14). Анализ систем алгебраических уравнений, вытекающих из краевых условий, показывает, что первое приближение в решении задачи можно получить в аналитическом виде. Поэтому, сохраняя первые две функции в (1.14) и первые члены в разложении эллиптических функций в степенные ряды, для гексагональной структуры находим

$$C^1 = -\alpha_1 a^2 C^0 |C^0|^2 (1 - \lambda - 4\lambda^2 - \lambda^4 / 3) + \dots \quad (2.5)$$

3. Для определения усредненных напряжений преобразуем первый интеграл (1.9) с учетом двойкой периодичности напряжений

$$\hat{\tau} = -\frac{iG}{F} \omega \left( \int_{z_0}^{z_0+\omega_3} -e^{-i\alpha} \int_{z_0}^{z_0+\omega} \right) (1 + 2q + \dots) d\wedge u \quad (3.1)$$

Согласно (1.10) находим ( $\wedge$  - дифференциальная операция):

$$d\wedge u = \partial u / \partial z dz - \partial \bar{u} / \partial \bar{z} d\bar{z}, \quad d\wedge u_0 = U_0' dz - \bar{U}_0' d\bar{z}$$

$$d\wedge u_1 = d\wedge U_1 + \alpha_1 |U_0'|^2 d\wedge U_0 - \alpha_1 d\wedge \bar{U}_0' J_2 - \alpha_1 d\wedge U_0' \bar{J}_2$$

Первое приближение в (3.1) сводится к определению интегралов от комбинации функций

$$\hat{\tau} = -i \frac{G}{F} \omega \left( \int_{z_0}^{z_0+\omega_3} -e^{-i\alpha} \int_{z_0}^{z_0+\omega} \right) (d\wedge U_0 + 2\mu\alpha_1 |U_0'|^2 d\wedge U_0 + \mu d\wedge U_1 - \mu\alpha_1 d\wedge \bar{U}_0' J_2 - \mu\alpha_1 d\wedge U_0' \bar{J}_2) \quad (3.2)$$

Комплексные дифференциалы последующих приближений устанавливаются простым дифференцированием соответствующих функций (1.12). Интегрирование в (3.1) сводится к вычислению нестандартных интегралов от эллиптических функций. Окончательный результат интегрирования приводим без вывода. Учитывая условие  $\rho_0' = 0$ , путем преобразований подынтегральных функций с учетом теорем сложения

эллиптических функций, находим с точностью до произвольных постоянных

$$\begin{aligned}
 \rho_0'' / 2 \int (\rho - \rho_0)^{-1} dz &= -z\rho_0 - \zeta(z + z_0), \quad \rho_0 = \rho(z_0) \\
 \rho_0'^2 / 4 \int (\rho - \rho_0)^{-2} dz &= z\rho_0^2 + zg_2 / 12 + \rho'(z + z_0) / 6 + 2\rho_0\zeta(z + z_0) \\
 \int \rho(z + z_0)\rho(z + \bar{z}_0) dz &= z(2\rho_0\bar{\rho}_0 + g_2 / 4) + \zeta(z + \bar{z}_0)(\rho_0\bar{\rho}_0 + 2\rho_0^2 - g_2 / 4)(\rho_0 - \bar{\rho}_0)^{-1} - \\
 &- \zeta(z + z_0)(\rho_0\bar{\rho}_0 + 2\bar{\rho}_0^2 - g_2 / 4) \\
 \int \rho'(z + z_0)\rho'(z + \bar{z}_0) dz &= -|\rho_0''|^2 [z(\rho_0 + \bar{\rho}_0) + \zeta(z + z_0) + \zeta(z + \bar{z}_0)](\rho_0 - \bar{\rho}_0)^{-2} \\
 \int \rho^2(z + z_0)\rho(z + \bar{z}_0) dz &= \frac{1}{6}\rho'(z + z_0)\rho(z + \bar{z}_0) - \frac{g_2}{12}\zeta(z + \bar{z}_0) + \\
 &+ \frac{|\rho_0''|^2}{6(\rho_0 - \bar{\rho}_0)^2} [z(\rho_0 + \bar{\rho}_0) + \zeta(z + z_0) + \zeta(z + \bar{z}_0)]
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Интегралы от произведения большого числа функций находятся путем аналогичных преобразований с учетом приведенных соотношений. Вследствие симметрии рассматриваемых структур условие равенства усредненных касательных напряжений  $\hat{\tau}_{12} = \hat{\tau}_{13}$  выполняется при сохранении в решении бесконечного ряда функций. В приближенных решениях необходимо проведение операции симметризации соотношений для определения напряжений. Опуская промежуточные выкладки, приводим конечный результат усреднения напряжений

$$\begin{aligned}
 \hat{\tau}_{12} &= 2(1 + \lambda\zeta)G\dot{C} + 2\mu\alpha_1 G\Omega^{-1}\dot{C}^3, \quad C = \dot{C} - i\ddot{C} \\
 \Omega^{-1} &= -1 - \zeta + 5\lambda\zeta + 4\lambda^2\zeta + \lambda^4\zeta / 3 + \dots
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\alpha = \pi / 3, \quad g_2 = 0, \quad \rho_0 = -e^{-i\alpha}(g_3 / 4)^{1/3}$$

Для определения зависимости между  $\dot{C}$  и усредненными напряжениями, рассмотрим кубическое уравнение, вытекающее из (3.4):

$$\dot{C}^3 + \Omega(1 + \lambda\zeta)(\mu\alpha_1)^{-1}\dot{C} - \Omega(2\mu\alpha_1)^{-1}\hat{\tau}_{12} / G = 0 \tag{3.5}$$

Решение этого уравнения известно [5]:

$$\dot{C}_1 = A + B, \quad \dot{C}_{2,3} = -(A + B) / 2 \pm i\sqrt{3}(A - B) / 2 \tag{3.6}$$

$$A = (-q / 2 + Q^{1/2})^{1/3}, \quad B = (-q / 2 - Q^{1/2})^{1/3}, \quad Q = (p / 3)^3 + (q / 2)^2$$

$$p = \Omega(1 + \lambda\zeta)(\mu\alpha_1)^{-1}, \quad q = -\Omega(2\mu\alpha_1)^{-1}\hat{\tau}_{12} / G$$

Комплексно-сопряженные корни отбрасываем, как неудовлетворяющие физическим условиям задачи. В зависимости от знака параметра  $Q$  возможны различные корни, поэтому необходим в этих случаях анализ допустимых решений. Усредненные деформации сдвига находим с учетом периодических свойств подынтегральных функций

$$\hat{\gamma} = \frac{i}{F} \int_{z_0}^{z_0 + \omega_3} \Delta_2 u d\bar{z} - \frac{i}{F} \int_{z_0}^{z_0 + \omega} \Delta_3 u d\bar{z}, \quad \Delta_k u = u(z + \omega_k) - u(z) \tag{3.7}$$

В принятом приближении для гексагональной упаковки волокон следует принять

$$\begin{aligned}
 \Delta_k u_0 &= C\omega_k - C_0\delta_k + \bar{C}\bar{\omega}_k - \bar{C}_0\bar{\delta}_k \\
 \Delta_k u_1 &= C^1\omega_k - C_0^1\delta_k + \bar{C}^1\bar{\omega}_k - \bar{C}_0^1\bar{\delta}_k - \alpha_1\bar{U}_0^1\Delta_k J_2 - \alpha_1 U_0^1\Delta_k \bar{J}_2
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\Delta_k J_2 = \omega_k C^2 - 2\delta_k C C_0$$

После операции симметризации получаем

$$\hat{\gamma}_{12} = 2(1 - \lambda\zeta)\dot{C} + \mu\alpha_1\kappa^{-1}\dot{C}^3 \quad (3.9)$$

$$\kappa^{-1} = -1 - \zeta + 9\lambda\zeta/2 + 4\lambda^2\zeta^2 + 2\lambda^2\zeta^2 + \lambda^4\zeta/3 + \dots$$

Искомое решение кубического уравнения находим на основе параметров, приведенных (3.9):

$$p = 2(1 - \lambda\zeta)\kappa(\mu\alpha_1)^{-1}, \quad q = -\kappa(\mu\alpha_1)^{-1}\hat{\gamma}_{12} \quad (3.10)$$

$$C = F + D, \quad F = (-q/2 + Q^{1/2})^{1/3}, \quad D = (-q/2 - Q^{1/2})^{1/3}$$

Приведенные соотношения позволяют выписать уравнение состояния композита при сдвиге в явном виде

$$\hat{\tau}_{12} = 2G\kappa\Omega^{-1}\hat{\gamma}_{12} + 2(1 - \lambda\zeta)(G_{12} - 2G\kappa\Omega^{-1})(F + D) \quad (3.11)$$

Обратное соотношение имеет вид

$$\hat{\gamma}_{12} = \Omega(2\kappa G)^{-1}\hat{\tau}_{12} + 2(1 - \lambda\zeta)[1 - \Omega G_{12}(2G\kappa)^{-1}](A + B)$$

$G_{12}$  – интегральный упругий модуль сдвига композита. Из приведенных уравнений следует, что степенная нелинейность после усреднения преобразуется к дробной нелинейности композита.

4. Рассмотренный метод решения нелинейных задач без принципиальных затруднений распространяется на родственные задачи, возникающие в теории композитов, например задачи диффузии тепла и массы, задачи электростатики и другие. Решение ряда подобных задач строится по аналогии. Для иллюстрации рассмотрим задачу об определении эффективной диэлектрической проницаемости двояко-периодической армированной среды в поперечном электрическом поле высокой интенсивности, когда в матрице проявляются нелинейные эффекты. Теория плоских состояний подобных сред в линейном приближении построена ранее [2]. Напряженность электрического поля  $E_2, E_3$  определена через электростатический потенциал

$$E = E_2 - iE_3 = -2\partial\Phi / \partial z \quad (4.1)$$

Компоненты вектора электрической индукции  $D_2, D_3$  связаны с напряженностью поля определяющими соотношениями

$$D = D_2 - iD_3 = \epsilon(E_2 - iE_3) \quad (4.2)$$

Обобщая эти соотношения на случай нелинейной зависимости диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  от интенсивности электрического поля, получим

$$D = \epsilon E [1 + 2q(\mu/4 |E|^2)] \quad (4.3)$$

$$q(\mu/4 |E|^2) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\mu}{4}\right)^n \alpha_n |E|^{2n} = \sum_{n=1}^N \mu_n \alpha_n \left| \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|^{2n}$$

где  $\alpha_n$  определяется по данным экспериментов. Используя уравнения для вектора индукций, получим

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial z} \left( q \frac{\partial\Phi}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( q \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.4)$$

Решение последнего при отмеченных условиях имеет вид

$$\Phi(z, \bar{z}) = U(z) + \overline{U(\bar{z})} - \int q \left( \frac{\mu}{4} \left| \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|^2 \right) dz \quad (4.5)$$



Подобные соотношения имеют место для всех физически различных компонентов среды. Если принять идеальные контактные условия на всех межфазных границах  $z \in s$ , то следует принять

$$\Phi_a(s) = \Phi(s), \quad D_{na}(s) = D_n(s) \quad (4.6)$$

$$D_n = -i\varepsilon \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \frac{d\bar{z}}{ds} \right) \left[ 1 + 2q \left( \frac{\mu}{4} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|^2 \right) \right]$$

Для определения эффективных характеристик вводим соотношения операции усреднения

$$\hat{D} = -\frac{i}{2F} \oint_{\Gamma} \bar{z} (D dz - \bar{D} d\bar{z}), \quad \hat{E} = \frac{i}{F} \oint_{\Gamma} \Phi d\bar{z} \quad (4.7)$$

Дальнейшие преобразования ведем при использовании аналогий между функциями и параметрами в данной задаче и рассмотренной выше согласно соотношений  $u \rightarrow \Phi$ ,  $\tau \rightarrow D$ ,  $\gamma \rightarrow E$ ,  $G \rightarrow \varepsilon$ ,  $\lambda \rightarrow \lambda_0 = -(1 - \varepsilon_d/\varepsilon)(1 + \varepsilon_d/\varepsilon)^{-1}$ .

В заключение приводим конечный результат исследования решения задачи в первом приближении, когда диэлектрическая постоянная волокон не зависит от напряженности поля

$$\hat{D}_2 = \hat{D}_3 = \varepsilon_{12} \hat{E}_2 + [3\kappa(2\Omega)^{-1} \varepsilon - \varepsilon_{12}] [\hat{E}_2 - 2(1 - \lambda_0 \zeta)(F + D)] \quad (4.8)$$

$$\hat{E}_2 = \hat{E}_3 = \hat{D}_2 / \varepsilon_{12} - [1 - 2\Omega(2\kappa\varepsilon)^{-1} \varepsilon_{12}] [\hat{D}_2 / \varepsilon_{12} - 2(1 - \lambda_0 \zeta)(A + B)]$$

Внутреннее поле в компонентах среды устанавливается по вышеприведенным формулам при заданных соотношениях между усредненными величинами.

Отметим, что решение более общей задачи о термогальваномагнитных явлениях в двоякопериодических композитах с гексагональной или тетрагональной структурами [2], строится по аналогии с приведенной при условии, что нелинейными свойствами обладает только матрица.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анциферов В.Н., Соколкин Ю.В., Ташинов А.А. и др. Волокнистые композиционные материалы на основе титана. М.: Наука, 1990. 136 с.
2. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 302 с.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 778 с.
4. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1974. 831 с.

Москва

Поступила в редакцию  
8.XI.1997