МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1998

УДК 539.3

© 1998 г. В.А. ШАМИНА

О ПОСТРОЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ

В последнее время при оценке прочности и надежности конструкций все чаще обращаются к нелинейным соотношениям механики сплошных сред. Однако в самом общем виде они настолько сложны, что при современных математических методах и вычислительных средствах ими воспользоваться практически невозможно. Необходимо учитывать специфику задач и соответственно упрощать общие соотношения, т.е. строить математические модели в рамках механики сплошных сред.

Любая математическая модель – приближенная теория. Поэтому всегда возникает вопрос о погрешности ее соотношений по сравнению с общими соотношениями механики сплошных сред и, в частности, теории упругости. Это не всегда удается. Примером тому служат модели, при переходе к которым упрощающие предположения формулируются в виде гипотез, основанных на физических соображениях. Если же математическая модель является, например, начальным приближением некоторого итерационного процесса, то надежда на оценку ее погрешности не исчезает.

Одним из средств построения линейных одномерных и двумерных моделей механики деформируемого тела является асимптотический метод по малому параметру, связанному с изменяемостью напряженно-деформированного состояния. Этот метод позволяет дать асимптотическую оценку точности модели и определить границы ее применимости.

В предлагаемом сообщении исследуются возможности применения асимптотического метода для построения математических моделей меньшей размерности в нелинейных задачах механики деформируемого твердого тела. При этом рассматривается лишь случай, когда деформируемое тело представляет собой первоначально прямолинейный стержень.

1. В отсчетной конфигурации положение его точек в пространстве определяем прямоугольными декартовыми координатами x_1, x_2, x_3 с ортами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, введенными так, что $x_3 = s$ и $\mathbf{i}_3 = \mathbf{t}$ – длина дуги и орт касательной оси стержня. Эти же координаты являются материальными, так что отсчетные материальные координатные базисы, основной $\mathbf{R}_i$ и взаимный $\mathbf{R}^i$ совпадают, и

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}^1 = \mathbf{i}_1,\ \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}^2 = \mathbf{i}_2,\ \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}^3 = \mathbf{i}_3 = \mathbf{t} \tag{1.1}$$

Локальными характеристиками деформации среды считаем относительные удлинения ее линейных элементов и сдвиги между ними. Поэтому представляется естественным выбор меры деформации в виде тензора Грина

$$\varepsilon = \varepsilon_{\alpha\beta}\mathbf{R}^\alpha\mathbf{R}^\beta = \varepsilon_{\alpha\beta}\mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_\beta \tag{1.2}$$

Здесь и далее, если специально не оговорено, все буквенные индексы принимают значения 1, 2, 3; по повторяющимся греческим индексам производится суммирование в тех же пределах.

Обозначаем через $\varepsilon_{(i)}$ главные значения тензора (1.2), через $\mathbf{e}_{(i)}$ – его главные направления

$$\mathbf{e}_{(i)} = \mu_{(i).\alpha}\mathbf{i}_\alpha \tag{1.3}$$

Компоненты тензора (1.2) удовлетворяют условиям сплошности, которые, как и все последующие соотношения, записываем в выбранной координатной системе:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{ik}}{\partial x_j\partial x_k}+\frac{\partial^2\varepsilon_{kj}}{\partial x_k\partial x_i}-\frac{\partial^2\varepsilon_{kk}}{\partial x_j\partial x_i}-\frac{\partial^2\varepsilon_{ij}}{\partial x_k\partial x_k}-g^{*\lambda\delta}\left[\left(2\frac{\partial\varepsilon_{k\delta}}{\partial x_k}-\frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial x_\delta}\right)\left(\frac{\partial\varepsilon_{\lambda i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\varepsilon_{\lambda j}}{\partial x_i}-\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x_\lambda}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial\varepsilon_{\lambda k}}{\partial x_j}+\frac{\partial\varepsilon_{\lambda j}}{\partial x_k}-\frac{\partial\varepsilon_{kj}}{\partial x_\lambda}\right)\left(\frac{\partial\varepsilon_{k\delta}}{\partial x_i}+\frac{\partial\varepsilon_{i\delta}}{\partial x_k}-\frac{\partial\varepsilon_{ki}}{\partial x_\delta}\right)\right]=0 \tag{1.4}$$

В (1.4) заключено шесть соотношений. Их получаем, присваивая набору индексов i, j, k в том же порядке шесть вариантов значений: (*1*) 1, 1, 2; (*2*) 1, 1, 3; (*3*) 2, 2, 3; (*4*) 1, 2, 3; (*5*) 1, 3, 2; (*6*) 2, 3, 1. Далее

$$g^{*ii} = [1+2(\varepsilon_{jj}+\varepsilon_{kk})+4(\varepsilon_{jj}\varepsilon_{kk}-\varepsilon_{jk}^2)]/g^* \tag{1.5}$$

$$g^{*ij} = -2[\varepsilon_{ij}+2(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kk}-\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk})]/g^* \quad (i\neq j\neq k\neq i)$$

$$g^* = (1+2\varepsilon_{(1)})(1+2\varepsilon_{(2)})(1+2\varepsilon_{(3)}) \tag{1.6}$$

При известных компонентах деформации ε_{ij} вектор перемещения $\mathbf{U}(x_1, x_2, x_3)$ среды определяется из системы уравнений, по структуре близкой к той, которая известна из линейной теории упругости [1]:

$$\partial\mathbf{U}/\partial x_j = \varepsilon^*_{j\alpha}\mathbf{i}_\alpha+\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{i}_j+\varepsilon^*_{j\alpha}\mathbf{i}_\alpha)+\tfrac{1}{2}\mathbf{\Omega}\times[\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{i}_j+\varepsilon^*_{j\alpha}\mathbf{i}_\alpha)]\cos^{-2}\omega/2 \tag{1.7}$$

$$\partial\mathbf{\Omega}/\partial x_j = \mathbf{k}_j\cos\omega+\tfrac{1}{2}\mathbf{\Omega}\times\mathbf{k}_j-\tfrac{1}{4}\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{k}_j)\cos^{-2}\omega/2 \tag{1.8}$$

$$\mathbf{\Omega} = e_\Omega\sin\omega,\quad |\mathbf{e}_\Omega|=1 \tag{1.9}$$

Здесь $\mathbf{\Omega}$ – вектор конечного поворота главных осей тензора (1.2) при движении среды,

$$\varepsilon^*_{ij} = \varepsilon_{ij}-\frac{\varepsilon^2_{(\alpha)}\mu_{(\alpha),i}\mu_{(\alpha),j}}{1+\varepsilon_{(\alpha)}+(1+2\varepsilon_{(\alpha)})^{1/2}} \tag{1.10}$$

$$\mathbf{k}_j = \frac{1}{\sqrt{g^*}}[(\mathbf{i}_\alpha\times\mathbf{i}_\beta)\cdot\mathbf{i}_\gamma]\left(\frac{\partial\varepsilon_{\beta j}}{\partial x_\alpha}-\frac{1}{2}\varepsilon^*_{\delta\beta}\frac{\partial\varepsilon^*_{\alpha\delta}}{\partial x_j}\right)(\mathbf{i}_\gamma+\varepsilon^*_{\gamma\delta}\mathbf{i}_\delta) \tag{1.11}$$

где k_j – вектор изменения кривизны в направлении координатной x_j – линии.

Из (1.8), (1,9) следует, что

$$\partial\omega/\partial x_j = \mathbf{k}_j\cdot\mathbf{e}_\Omega \tag{1.12}$$

Для описания напряженного состояния среды используем симметричный тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа

$$\mathbf{\Sigma} = \sigma_{\alpha\beta}\mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_\beta \tag{1.13}$$

$$\sigma_{ij} = \sqrt{g^*}\sigma^{*ij} \tag{1.14}$$

где σ^{*ij} – контравариантные компоненты тензора истинных напряжений Коши, и σ_{ij} удовлетворяют следующим уравнениям равновесия (F^* – массовая сила):

$$\frac{\partial\sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}+g^{*i\gamma}\sigma_{\alpha\beta}\left(2\frac{\partial\varepsilon_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta}-\frac{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\right)+F^{*i}\sqrt{g^*}=0 \tag{1.15}$$

$$\mathbf{F}^*=F^{*\alpha}\mathbf{R}^*_\alpha \tag{1.16}$$

$$\mathbf{R}^*_j=\mathbf{i}_j+\partial\mathbf{U}/\partial x_j \tag{1.17}$$

Будем считать материал рассматриваемого объема сплошной среды стандартным второго порядка. Ему соответствует связь между компонентами тензоров (1.2) и (1.13), аналогичная обобщенному закону Гука:

$$\sigma_{ii}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ii}+\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})$$

$$\sigma_{ij}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij}\quad(i\neq j) \tag{1.18}$$

Краевые условия на торцах стержня произвольны. На боковой поверхности они формулируются в напряжениях

$$\boldsymbol{\sigma}_n=\mathbf{f}^*(s,\gamma)=f^{*\alpha}\mathbf{R}^*_\alpha,\quad 0\leqslant s=x_3\leqslant L,\quad \gamma\in\Gamma \tag{1.19}$$

Здесь L – длина стержня, Γ – контур его поперечного сечения s = const, γ – длина дуги линии Γ, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки на Γ.

Нормаль к деформированной боковой поверхности

$$\mathbf{N}^*=(\mathbf{R}^*_1\times\mathbf{R}^*_3)\frac{\partial x_1}{\partial\gamma}+(\mathbf{R}^*_2\times\mathbf{R}^*_3)\frac{\partial x_2}{\partial\gamma}+(\mathbf{R}^*_1\times\mathbf{R}^*_2)\left(\frac{\partial x_1}{\partial\gamma}\frac{\partial x_2}{\partial s}-\frac{\partial x_2}{\partial\gamma}\frac{\partial x_1}{\partial s}\right) \tag{1.20}$$

Используя (1.20), записываем соотношение (1.19) в виде

$$\sigma_{1i}\frac{\partial x_2}{\partial\gamma}-\sigma_{2i}\frac{\partial x_1}{\partial\gamma}+\sigma_{3i}\left(\frac{\partial x_1}{\partial\gamma}\frac{\partial x_2}{\partial s}-\frac{\partial x_2}{\partial\gamma}\frac{\partial x_1}{\partial s}\right)=|\mathbf{N}^*|f^{*i}(s,\gamma)$$

$$0\leqslant s=x_3\leqslant L,\ \gamma\in\Gamma \tag{1.21}$$

2. Пусть l_0 и l – характерные масштабы изменения напряженно-деформированного состояния вдоль оси стержня и в пределах его поперечного сечения соответственно, причем

$$\varepsilon_0=l/l_0\ll 1 \tag{2.1}$$

Исследуем возможности получения решения в виде разложений по положительным степеням параметра (2.1).

Переходя к безразмерным координатам

$$\xi_1=x_1/l,\quad \xi_2=x_2/l,\quad \xi=x_3/l_0=s/l_0 \tag{2.2}$$

в уравнениях сплошности (1.4), получаем

$$-\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial\xi_1^2}+2\varepsilon_0\frac{\partial^2\varepsilon_{13}}{\partial\xi_1\partial\xi}-\varepsilon_0^2\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial\xi^2}-g^{*\lambda\delta}\left[\left(2\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{3\delta}}{\partial\xi}-\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi_\delta}\right)\left(2\frac{\partial\varepsilon_{1\lambda}}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi_\lambda}\right)-\right.$$

$$-\left(\frac{\partial\varepsilon_{\lambda 3}}{\partial\xi_1}+\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{\lambda 1}}{\partial\xi}-\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi_\lambda}\right)\left(\frac{\partial\varepsilon_{\delta 3}}{\partial\xi_1}+\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{\delta 1}}{\partial\xi}-\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi_\delta}\right)\Bigg]-$$

$$-g^{*33}\left[\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi}\left(2\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi_1}-\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi}\right)-\left(\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi_1}\right)^2\right]-g^{*\lambda 3}\Bigg[\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi}\left(2\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi_\lambda}\right)+$$

$$+\left(2\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{3\lambda}}{\partial\xi}-\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi_\lambda}\right)\left(2\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi_1}-\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi}\right)-2\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial\varepsilon_{\lambda 3}}{\partial\xi_1}+\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{1\lambda}}{\partial\xi}-\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi_\lambda}\right)\Bigg]=0 \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{13}}{\partial\xi_1\partial\xi_2}-\frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial\xi_1^2}+\varepsilon_0\left(\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial\xi_1\partial\xi}-\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial\xi\partial\xi_2}\right)-g^{*\lambda\delta}\Bigg[\left(2\frac{\partial\varepsilon_{1\delta}}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi_\delta}\right)\left(\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{2\lambda}}{\partial\xi}+\frac{\partial\varepsilon_{3\lambda}}{\partial\xi_2}-\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\xi_\lambda}\right)-$$

$$-\left(\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{1\lambda}}{\partial\xi}+\frac{\partial\varepsilon_{3\lambda}}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi_\lambda}\right)\left(\frac{\partial\varepsilon_{1\delta}}{\partial\xi_2}+\frac{\partial\varepsilon_{2\delta}}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi_\delta}\right)\Bigg]-$$

$$-g^{*33}\left[\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi_2}\left(2\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi_1}-\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi}\right)-\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi_2}+\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\xi_1}-\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi}\right)\right]-$$

$$-g^{*\lambda 3}\Bigg[\left(2\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi_1}-\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi}\right)\left(\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{2\lambda}}{\partial\xi}+\frac{\partial\varepsilon_{3\lambda}}{\partial\xi_2}-\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\xi_\lambda}\right)+\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi_2}\left(2\frac{\partial\varepsilon_{1\lambda}}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi_\lambda}\right)-$$

$$-\left(\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{1\lambda}}{\partial\xi}+\frac{\partial\varepsilon_{3\lambda}}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi_\lambda}\right)\left(\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi_2}+\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\xi_1}-\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi}\right)-\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial\varepsilon_{1\lambda}}{\partial\xi_2}+\frac{\partial\varepsilon_{2\lambda}}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi_\lambda}\right)\Bigg]=0 \quad (1\Leftrightarrow 2)$$

$$-\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial\xi_1\partial\xi_2}+\varepsilon_0\left(\frac{\partial^2\varepsilon_{13}}{\partial\xi_2\partial\xi}+\frac{\partial^2\varepsilon_{32}}{\partial\xi\partial\xi_1}\right)-\varepsilon_0^2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial\xi^2}-g^{*\lambda\delta}\Bigg[\left(2\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{3\delta}}{\partial\xi}-\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi_\delta}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial\varepsilon_{1\lambda}}{\partial\xi_2}+\frac{\partial\varepsilon_{2\lambda}}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi_\lambda}\right)-\left(\frac{\partial\varepsilon_{3\lambda}}{\partial\xi_2}+\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{2\lambda}}{\partial\xi}-\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi_\lambda}\right)\left(\frac{\partial\varepsilon_{3\delta}}{\partial\xi_1}+\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{1\delta}}{\partial\xi}-\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi_\delta}\right)\Bigg]-$$

$$-g^{*33}\left[\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi_2}+\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\xi_1}-\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi}\right)-\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi_1}\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi_2}\right]-g^{*\lambda 3}\Bigg[\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\varepsilon_{1\lambda}}{\partial\xi_2}+\frac{\partial\varepsilon_{2\lambda}}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi_\lambda}\right)+$$

$$+\left(2\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{3\lambda}}{\partial\xi}-\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi_\lambda}\right)\left(\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi_2}+\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\xi_1}-\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi}\right)-\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial\varepsilon_{\lambda 3}}{\partial\xi_2}+\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{\lambda 2}}{\partial\xi}-\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\xi_\lambda}\right)-$$

$$-\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi_2}\left(\frac{\partial\varepsilon_{\lambda 3}}{\partial\xi_1}+\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{\lambda 1}}{\partial\xi}-\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi_\lambda}\right)\Bigg]=0 \qquad (2.4)$$

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial\xi_1\partial\xi_2}-\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial\xi_1^2}-\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial\xi_2^2}-g^{*\lambda\delta}\Bigg[\left(2\frac{\partial\varepsilon_{2\delta}}{\partial\xi_2}-\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi_\delta}\right)\left(2\frac{\partial\varepsilon_{1\lambda}}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi_\lambda}\right)-$$

$$-\left(\frac{\partial\varepsilon_{\lambda 2}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial\varepsilon_{\lambda 1}}{\partial\xi_2}-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi_\lambda}\right)\left(\frac{\partial\varepsilon_{\delta 2}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial\varepsilon_{\delta 1}}{\partial\xi_2}-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi_\delta}\right)\Bigg]-$$

$$-g^{*33}\left[\left(2\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\xi_2}-\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi}\right)\left(2\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi_1}-\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi}\right)-\left(\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi_2}-\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi}\right)^2\right]-$$

$$-g^{*\lambda 3}\left[\left(2\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\xi_2}-\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi}\right)\left(2\frac{\partial\varepsilon_{1\lambda}}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi_\lambda}\right)+\left(2\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi_1}-\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\xi}\right)\left(2\frac{\partial\varepsilon_{2\lambda}}{\partial\xi_2}-\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\xi_\lambda}\right)-\right.$$

$$\left.-2\left(\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial\xi_2}-\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial\varepsilon_{2\lambda}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial\varepsilon_{1\lambda}}{\partial\xi_2}-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\xi_\lambda}\right)\right]=0 \qquad (2.5)$$

В (2.3) и далее все буквенные индексы принимают значения 1, 2, и в тех же пределах производится суммирование по повторяющимся греческим индексам.

При $\varepsilon_0 \to 0$ уравнения (2.3)–(2.5) остаются нелинейными относительно компонент деформации, притом вид их произволен. Поэтому использование асимптотического метода по малому параметру (2.1) в рассматриваемой задаче вряд ли имеет какие-либо преимущества по сравнению с другими математическими методами. Речь идет о простоте получения приемлемого для практики приближенного решения. Однако такое преимущество появляется, если ограничить величину деформации.

Пусть главные относительные удлинения $E_{(i)}=\sqrt{(1+2\varepsilon_{(i)})}-1\ll 1$ $(i=1,2,3)$. Тогда и $\varepsilon_{(i)} \ll 1$. Это условие выполнено, если $\varepsilon_{(i)} \sim \varepsilon_0$ и, как следствие, $\varepsilon_{ij} \sim \varepsilon_0$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

Компоненты деформации представим в виде

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_0\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_{ij,k}(\xi,\xi_1,\xi_2)\varepsilon_0^k=\varepsilon_{ij}^0(s,x_1,x_2)+\varepsilon_{ij}^{\vee}(s,x_1,x_2) \qquad (2.6)$$

$$\varepsilon_{ij}^0=\varepsilon_0\varepsilon_{ij,0}\sim\varepsilon_0,\quad \varepsilon_{ij}^{\vee}=\varepsilon_0\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_{ij,k}\varepsilon_0^k\sim\varepsilon_0^2\quad (i,j=1,2,3) \qquad (2.7)$$

Подставляя (2.6) в (2.3)–(2.5) и учитывая (1.5), (1.6), получаем следующие соотношения для определения $\varepsilon_{ij,0}(\xi,\xi_1,\xi_2)$:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{33,0}}{\partial\xi_1^2}=0,\quad \frac{\partial^2\varepsilon_{33,0}}{\partial\xi_2^2}=0,\quad \frac{\partial^2\varepsilon_{33,0}}{\partial\xi_1\partial\xi_2}=0 \qquad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{13,0}}{\partial\xi_1\partial\xi_2}-\frac{\partial^2\varepsilon_{23,0}}{\partial\xi_1^2}=0,\quad \frac{\partial^2\varepsilon_{23,0}}{\partial\xi_1\partial\xi_2}-\frac{\partial^2\varepsilon_{13,0}}{\partial\xi_2^2}=0$$

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{12,0}}{\partial\xi_1\partial\xi_2}-\frac{\partial^2\varepsilon_{22,0}}{\partial\xi_1^2}-\frac{\partial^2\varepsilon_{11,0}}{\partial\xi_2^2}=0 \qquad (2.9)$$

Решение уравнений (2.8) очевидно. Записываем его в координатах s, x_1, x_2, используя при этом (2.2), (2.7):

$$\varepsilon_{33}^0(s,x_1,x_2)=\varepsilon^0(s)-x_1\beta_{11}^0(s)-x_2\beta_{22}^0(s) \qquad (2.10)$$

$$\varepsilon_{13}^0(s,x_1,x_2)=-x_2\beta_{12}^0(s)+\partial\varphi/\partial x_1$$

$$\varepsilon_{23}^0(s,x_1,x_2)=x_1\beta_{12}^0(s)+\partial\varphi/\partial x_2,\quad \varphi=\varphi(s,x_1,x_2) \qquad (2.11)$$

В уравнении (2.9) также переходим к координатам s, x_1, x_2:

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}^0}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2\varepsilon_{22}^0}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\varepsilon_{11}^0}{\partial x_2^2}=0 \qquad (2.12)$$

3. Напряжения σ_{ij} представим выражениями, аналогичными (2.6):

$$\sigma_{ij}=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_{ij,k}(\xi,\xi_1,\xi_2)\varepsilon_0^k=\sigma_{ij}^0(s,x_1,x_2)+\sigma_{ij}^*(s,x_1,x_2) \tag{3.1}$$

$$\sigma_{ij}^0=\sigma_{ij,0}\sim\sigma_0,\;\; \sigma_{ij}^*=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_{ij,k}\varepsilon_0^k\sim\varepsilon_0\sigma_0\quad (i,j=1,2,3) \tag{3.2}$$

Подставляя (3.1), (2.6) в (1.18) и учитывая при этом (2.10), (2.11), устанавливаем связь между главными членами разложений (3.1) и (2.6):

$$\sigma_{33}^0=\frac{E}{1+\nu}[\varepsilon^0(s)-x_1\beta_{11}^0(s)-x_2\beta_{22}^0(s)]+\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11}^0+\varepsilon_{22}^0+\varepsilon_{33}^0) \tag{3.3}$$

$$\sigma_{ii}^0=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ii}^0+\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11}^0+\varepsilon_{22}^0+\varepsilon_{33}^0) \tag{3.4}$$

$$\sigma_{12}^0=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12}^0$$

$$\sigma_{13}^0=\frac{E}{1+\nu}\left[-x_2\beta_{12}^0(s)+\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right] \tag{3.5}$$

$$\sigma_{23}^0=\frac{E}{1+\nu}\left[x_1\beta_{12}^0(s)+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right],\quad \varphi=\varphi(s,x_1,x_2)$$

4. В безразмерных координатах (2.2) уравнения равновесия (1.15) и краевые условия (1.21) принимают вид

$$\frac{\partial\sigma_{i1}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial\sigma_{i2}}{\partial\xi_2}+\varepsilon_0\frac{\partial\sigma_{i3}}{\partial\xi}+g^{*i\gamma}\left[\sigma_{\alpha\beta}\left(2\frac{\partial\varepsilon_{\alpha\gamma}}{\partial\xi_\beta}-\frac{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial\xi_\gamma}\right)+\right.$$
$$\left.+2\sigma_{\alpha3}\left(\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{\alpha\gamma}}{\partial\xi}+\frac{\partial\varepsilon_{\gamma3}}{\partial\xi_\alpha}-\frac{\partial\varepsilon_{\alpha3}}{\partial\xi_\gamma}\right)+\sigma_{33}\left(2\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{\gamma3}}{\partial\xi}-\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi_\gamma}\right)\right]+$$
$$+g^{*i3}\left[\sigma_{\alpha\beta}\left(2\frac{\partial\varepsilon_{3\alpha}}{\partial\xi_\beta}-\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial\xi}\right)+2\sigma_{\alpha3}\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi_\alpha}+\sigma_{33}\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\xi}\right]+lF^{*i}\sqrt{g^*}=0\quad (i=1,2,3) \tag{4.1}$$

$$\sigma_{1i}\frac{\partial\xi_2}{\partial\eta}-\sigma_{2i}\frac{\partial\xi_1}{\partial\eta}+\varepsilon_0\sigma_{3i}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial\eta}\frac{\partial\xi_2}{\partial\xi}-\frac{\partial\xi_2}{\partial\eta}\frac{\partial\xi_1}{\partial\xi}\right)=l|N^*|f^{*i}$$
$$\eta=\gamma/l,\;\;\xi_1=\xi(\xi,\eta),\;\;\xi_2=\xi_2(\xi,\eta)\quad (i=1,2,3) \tag{4.2}$$

Пусть

$$lF^{*i}\sqrt{g^*}=\varepsilon_0\sum_{k=0}^{\infty}F_{i,k}^*(\xi,\xi_1,\xi_2)\varepsilon_0^k$$
$$l|N^*|f^{*i}=\varepsilon_0\sum_{k=0}^{\infty}f_{i,k}^*(\xi,\xi_1,\xi_2)\varepsilon_0^k\quad (i=1,2,3) \tag{4.3}$$

Используя для компонент напряжений и деформаций формулы (2.6), (3.1), при помощи (4.1)–(4.3) получаем соотношения для определения главных членов разложений (2.6), (3.1). Их записываем в координатах s, x_1, x_2:

$$\frac{\partial\sigma_{13}^0}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}^0}{\partial x_2}=0,\quad \sigma_{13}^0\frac{\partial x_2}{\partial\gamma}-\sigma_{23}^0\frac{\partial x_1}{\partial\gamma}=0 \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial\sigma_{11}^0}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}^0}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{12}^0}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}^0}{\partial x_2}=0 \tag{4.5}$$

$$\sigma_{11}^0\frac{\partial x_2}{\partial\gamma}-\sigma_{12}^0\frac{\partial x_1}{\partial\gamma}=0,\quad \sigma_{12}^0\frac{\partial x_2}{\partial\gamma}-\sigma_{22}^0\frac{\partial x_1}{\partial\gamma}=0 \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial\sigma_{i3}^0}{\partial s}+\frac{\partial\sigma_{i1,1}^*}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{i2,1}^*}{\partial x_2}+\sigma_{\alpha\beta}^0\left(2\frac{\partial\varepsilon_{i\alpha}^0}{\partial x_\beta}-\frac{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}^0}{\partial x_i}\right)+$$

$$+2\sigma_{\alpha3}^0\left(\frac{\partial\varepsilon_{i3}^0}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial\varepsilon_{13}^0}{\partial x_i}\right)-\sigma_{33}^0\frac{\partial\varepsilon_{33}^0}{\partial x_i}+F_i^{*0}=0 \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial\sigma_{33}^0}{\partial s}+\frac{\partial\sigma_{13,1}^*}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23,1}^*}{\partial x_2}+2\sigma_{\alpha\beta}^0\frac{\partial\varepsilon_{3\alpha}^0}{\partial x_\beta}+2\sigma_{\alpha3}^0\frac{\partial\varepsilon_{33}^0}{\partial x_\alpha}+F_3^{*0}=0,$$

$$F_i^{*0}=\varepsilon_0F_{i,0}^*,\quad F_3^{*0}=\varepsilon_0F_{3,0}^*$$

$$\sigma_{3i}^0\left(\frac{\partial x_1}{\partial\gamma}\frac{\partial x_2}{\partial s}-\frac{\partial x_2}{\partial\gamma}\frac{\partial x_1}{\partial s}\right)+\sigma_{1i,1}^*\frac{\partial x_2}{\partial\gamma}-\sigma_{2i,1}^*\frac{\partial x_1}{\partial\gamma}=f_i^{*0}$$

$$\sigma_{33}^0\left(\frac{\partial x_1}{\partial\gamma}\frac{\partial x_2}{\partial s}-\frac{\partial x_2}{\partial\gamma}\frac{\partial x_1}{\partial s}\right)+\sigma_{13,1}^*\frac{\partial x_2}{\partial\gamma}-\sigma_{23,1}^*\frac{\partial x_1}{\partial\gamma}=f_3^{*0} \tag{4.8}$$

$$f_i^{*0}=\varepsilon_0f_{i,0}^*,\quad f_3^{*0}=\varepsilon_0f_{3,0}^*$$

Равенства (4.6), (4.8) и последнее из соотношений (4.4) определены на боковой поверхности стержня; в (4.7), (4.8) $\overset{*}{\sigma}_{ij,1}=\varepsilon_0\sigma_{ij,1}\sim\varepsilon_0\sigma_0$ $(i,j=1,2,3)$.

5. Уравнения (4.5) удовлетворяются тождественно, если

$$\sigma_{11}^0=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2},\quad \sigma_{22}^0=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2},\quad \sigma_{12}^0=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2},\quad \Phi=\Phi(s,x_1,x_2) \tag{5.1}$$

Используя (3.4), (2.10), (5.1), находим

$$\varepsilon_{11}^0=\frac{1+\nu}{E}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}-\nu\Delta\Phi\right)-\nu[\varepsilon^0(s)-x_1\beta_{11}^0(s)-x_2\beta_{22}^0(s)]$$

$$\varepsilon_{22}^0=\frac{1+\nu}{E}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}-\nu\Delta\Phi\right)-\nu[\varepsilon^0(s)-x_1\beta_{11}^0(s)-x_2\beta_{22}^0(s)] \tag{5.2}$$

$$\varepsilon_{12}^0=-\frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2},\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Выражения для компонент деформации (5.2) подставляем в уравнение сплошности (2.12). В результате получаем уравнение для определения функции напряжений $\Phi(s, x_1, x_2)$:

$$\Delta\Delta\Phi=0 \tag{5.3}$$

В силу (4.6), (5.1) на контуре поперечного сечения Г должно быть

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}\frac{\partial x_2}{\partial\gamma}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial x_1}{\partial\gamma}=\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\right)=0$$
$$-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}\frac{\partial x_1}{\partial\gamma}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial\gamma}=-\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right)=0 \tag{5.4}$$

Решение краевой задачи (5.3), (5.4) для односвязной области тривиально $\Phi(s,x_1,x_2)\equiv 0$. Тогда

$$\varepsilon_{11}^0=\varepsilon_{22}^0=-\nu\varepsilon_{33}^0,\quad \varepsilon_{12}^0=0 \tag{5.5}$$

$$\sigma_{11}^0=\sigma_{22}^0=\sigma_{12}^0=0 \tag{5.6}$$

6. Подставляя выражения для напряжений (3.5) в уравнения (4.4), приходим к следующей краевой задаче для функции $\phi(s,x_1,x_2)$:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=0,\quad \left.\frac{\partial\phi}{\partial n^0}\right|_\Gamma=\frac{1}{2}\beta_{12}^0(s)\frac{d}{d\gamma}(x_1^2+x_2^2) \tag{6.1}$$

где $\mathbf{n}^0$ – орт внешней нормали к недеформированному контуру поперечного сечения, $\beta_{12}^0(s)$ подлежит определению.

Линейная задача о кручении прямолинейного стержня постоянного сечения описывается соотношениями, аналогичными (6.1), (3.5) [2]. Разница в том, что в линейной задаче $\beta_{12}^0=\mathrm{const}$. Поэтому, как и в линейной задаче

$$\int_S\sigma_{12}^0dx_1dx_2=0,\quad \int_S\sigma_{13}^0dx_1dx_2=0 \tag{6.2}$$

где S – площадь поперечного сечения стержня.

7. Обратимся теперь к соотношениям (1.7)–(1.11). Они исследуются так же, как уравнения сплошности и уравнения равновесия: векторы изменения кривизны, вектор конечного поворота $\mathbf{\Omega}$ и перемещение $\mathbf{U}$ представляются степенными рядами по малому параметру (2.1) и затем с учетом (2.2), (2.6), (2,7), (2.10), (2.11), (5.5) выводятся соотношения для определения главных членов в разложениях $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{U}$. Итак

$$\omega=\sum_{k=0}^{\infty}\omega_k(\xi,\xi_1,\xi_2)\varepsilon_0^k=\omega_0(s,x_1,x_2)+\varepsilon_0\omega_*(s,x_1,x_2)$$
$$\mathbf{e}_\Omega=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{e}_{\Omega,k}(\xi,\xi_1,\xi_2)\varepsilon_0^k=\mathbf{e}_\Omega^0(s,x_1,x_2)+\varepsilon_0\mathbf{e}_\Omega^*(s,x_1,x_2)$$
$$\mathbf{\Omega}=\mathbf{\Omega}_0(s,x_1,x_2)+\varepsilon_0\mathbf{\Omega}_*(s,x_1,x_2);\quad \mathbf{\Omega}_0=\mathbf{e}_\Omega^0\sin\omega_0$$
$$\mathbf{\Omega}_*=\mathbf{e}_\Omega^*\sin\omega_0+\omega_*\cos\omega_0\mathbf{e}_\Omega^0,\quad \mathbf{U}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{U}_k(s,x_1,x_2)\varepsilon_0^k \tag{7.1}$$

Для определения вектора $\mathbf{\Omega}_0(s,x_1,x_2)$ имеем следующую систему уравнений:

$$\partial\mathbf{\Omega}_0/\partial x_i=0 \tag{7.2}$$

$$\partial\mathbf{\Omega}_0/\partial s=\mathbf{k}_3^0\cos\omega_0+\tfrac{1}{2}\mathbf{\Omega}_0\times\mathbf{k}_3^0-\tfrac{1}{4}\mathbf{\Omega}_0\times(\mathbf{\Omega}_0\times\mathbf{k}_3^0)\cos^{-2}(\omega_0/2) \tag{7.3}$$

$$\mathbf{k}_3^0=-\beta_{22}^0(s)\mathbf{i}_1+\beta_{11}^0(s)\mathbf{i}_2+2\beta_{12}^0(s)\mathbf{t}\quad(\mathbf{t}=\mathbf{i}_3) \tag{7.4}$$

Следовательно, $\mathbf{\Omega}_0 = \mathbf{\Omega}_0(s)$ и уравнение (7.3) обыкновенное дифференциальное. С точностью до величин порядка ε_0:

$$\mathbf{\Omega} \approx \mathbf{\Omega}_0(s) = \mathbf{e}^0_\Omega \sin\omega_0(s) \tag{7.5}$$

Видно, что $|k^0_3| \sim \varepsilon_0/l$. Тогда в силу (1.12), (7.4) $\omega_0 \sim \varepsilon_0 l_0/l$, т.е. получено аналитическое обоснование утверждения В.В. Новожилова о том, что при малой деформации углы поворота существенно превосходят относительные удлинения и сдвиги преимущественно в гибких телах, таких как стержни, пластины, оболочки [2].

Чтобы система уравнений относительно главного члена в разложении (7.1) была совместной, необходимо уточнить для вектора конечного поворота его выражение (7.5). Требуемую поправку $\mathbf{\Omega}^* = \varepsilon_0\mathbf{\Omega}_*$ получаем как решение системы уравнений

$$\partial\mathbf{\Omega}^* / \partial x_j = \mathbf{k}_{j,1}\cos\omega_0 + \tfrac{1}{2}\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{k}_{j,1} - \tfrac{1}{4}\mathbf{\Omega}_0 \times (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{k}_{j,1})\cos^{-2}(\omega_0/2) \tag{7.6}$$

$$\mathbf{k}_{1,1} = \left[-\beta^0_{12}(s) + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1 \partial x_2}\right]\mathbf{i}_1 - \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}\mathbf{i}_2 - \nu\beta^0_{22}(s)\mathbf{t}$$

$$\mathbf{k}_{2,1} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}\mathbf{i}_1 - \left[\beta^0_{12}(s) + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1 \partial x_2}\right]\mathbf{i}_2 + \nu\beta^0_{11}(s)\mathbf{t}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{i}_3$$

Уравнения (7.6) удовлетворяются при

$$\mathbf{\Omega}^* = \mathbf{k}\cos\omega_0 + \tfrac{1}{2}\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{k} - \tfrac{1}{4}\mathbf{\Omega}_0 \times (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{k})\cos^{-2}(\omega_0/2)$$

$$\mathbf{k} = [-x_1\beta^0_{12}(s) + \partial\phi/\partial x_2]\mathbf{i}_1 - [x_2\beta^0_{12}(s) + \partial\phi/\partial x_1]\mathbf{i}_2 + \nu\mathbf{t}[x_1\beta^0_{22}(s) - x_2\beta^0_{11}(s)]$$

Полагая $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_0(s) + \mathbf{\Omega}^*$ и учитывая малость $|\mathbf{\Omega}^*|$ по сравнению с $|\mathbf{\Omega}_0|$, получаем следующие уравнения для определения $\mathbf{U}_0(s, x_1, x_2)$:

$$\begin{gathered}\partial\mathbf{U}_0/\partial s = \mathbf{a} + \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{t} + \tfrac{1}{2}\mathbf{\Omega}_0 \times (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{t})\cos^{-2}(\omega_0/2)\\ \mathbf{a} = [\varepsilon^0(s) - x_1\beta^0_{11}(s) - x_2\beta^0_{22}(s)]\mathbf{t} + 2\beta^0_{12}(s)(x_1\mathbf{i}_2 - x_2\mathbf{i}_1)\\ \frac{\partial\mathbf{U}_0}{\partial x_j} = \mathbf{a}_j + \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{i}_j + \tfrac{1}{2}\mathbf{\Omega}_0 \times (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{i}_j)\cos^{-2}\frac{\omega_0}{2}, \quad \mathbf{a}_j = 2\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\mathbf{t}\end{gathered} \tag{7.7}$$

Решение системы (7.7) имеет вид

$$\mathbf{U}_0(s, x_1, x_2) = \mathbf{u}(s) + 2\phi(s, x_1, x_2)\mathbf{t} + \mathbf{\Omega}_0 \times x_\alpha\mathbf{i}_\alpha + \tfrac{1}{2}\mathbf{\Omega}_0 \times (\mathbf{\Omega}_0 \times x_\alpha\mathbf{i}_\alpha)\cos^{-2}(\omega_0/2) \tag{7.8}$$

Вектор $\mathbf{u}(s)$ (перемещение точек оси стержня) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d\mathbf{u}/ds = \varepsilon^0(s)\mathbf{t} + \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{t} + \tfrac{1}{2}\mathbf{\Omega}_0 \times (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{t})\cos^{-2}(\omega_0/2) \tag{7.9}$$

Функция $\phi(s, x_1, x_2)$ определяет депланацию поперечного сечения стержня в процессе деформации. Действительно, нормаль к поверхности поперечного сечения стержня после деформации

$$\mathbf{N} = \left(\mathbf{i}_1 + \frac{\partial\mathbf{U}_0}{\partial x_1}\right) \times \left(\mathbf{i}_2 + \frac{\partial\mathbf{U}_0}{\partial x_2}\right) = \mathbf{n} + \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{n} + \tfrac{1}{2}\mathbf{\Omega}_0 \times (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{n})\cos^{-2}\frac{\omega_0}{2}$$

$$\mathbf{n} = \left(\mathbf{i}_1 + 2\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\mathbf{t}\right) \times \left(\mathbf{i}_2 + 2\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\mathbf{t}\right) = \mathbf{t} - 2\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\mathbf{i}_1 - 2\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\mathbf{i}_2$$

При $\phi(s, x_1, x_2) \equiv 0$ вектор **N** не зависит от x_1, x_2, и поперечные сечения остаются плоскими после деформации.

8. При помощи (5.5), (2.10) преобразуем выражение (3.3) к виду

$$\sigma_{33}^0 = E[\varepsilon^0(s) - x_1\beta_{11}^0(s) - x_2\beta_{22}^0(s)] \tag{8.1}$$

Следовательно, чтобы завершить вычисление главных членов разложений (2.6), (3.1), необходимо определить четыре функции одной независимой переменной: $\varepsilon^0(s)$ и $\beta_{ij}^0(s)$. Их естественно искать как решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Для вывода таких уравнений используем условия равновесия элемента стержня длиной ds, ограниченного двумя поперечными сечениями и соответствующей боковой поверхностью.

Напряжения, действующие в поперечном сечении стержня, статически эквивалентны силе $\mathbf{T}(s)$ и моменту $\mathbf{M}(s)$:

$$\mathbf{T}(s) = \int_S (\sigma_{\alpha 3}\mathbf{R}_\alpha^* + \sigma_{33}\mathbf{R}_3^*)dx_1dx_2 = T(s)\mathbf{t}^* + Q_\alpha(s)\mathbf{i}_\alpha^*$$

$$\mathbf{M}(s) = \int_S [\mathbf{R}^*(s,x_1,x_2) - \mathbf{R}^*(s,0,0)] \times (\sigma_{\alpha 3}\mathbf{R}_\alpha^* + \sigma_{33}\mathbf{R}_3^*)dx_1dx_2 = \tag{8.2}$$

$$= M(s)\mathbf{t}^* + M_1(s)\mathbf{i}_1^* - M_2(s)\mathbf{i}_2^*$$

Здесь в силу (7.7), (1.17) с принятой точностью

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}^*(s,x_1,x_2) = x_\alpha\mathbf{i}_\alpha + s\mathbf{t} + \mathbf{U}_0(s,x_1,x_2)\\
&\mathbf{R}_j^* \approx \mathbf{i}_j^* = \mathbf{i}_j + \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{i}_j + \tfrac{1}{2}\mathbf{\Omega}_0 \times (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{i}_j)\cos^{-2}(\omega_0/2)\\
&\mathbf{R}_3^* \approx \mathbf{t}^* = \mathbf{t} + \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{t} + \tfrac{1}{2}\mathbf{\Omega}_0 \times (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{t})\cos^{-2}(\omega_0/2)\\
&\mathbf{R}^*(s,x_1,x_2) - \mathbf{R}^*(s,0,0) \approx x_\alpha\mathbf{i}_\alpha^*
\end{aligned} \tag{8.3}$$

Вывод искомых уравнений хорошо известен и потому опускается. Итак, учитывая (1.19), (1.21), имеем

$$d\mathbf{T}(s)/ds + \mathbf{q}(s) = 0, \quad d\mathbf{M}(s)/ds + \mathbf{t}^*(s) \times \mathbf{T}(s) + \mathbf{m}(s) = 0 \tag{8.4}$$

$$\mathbf{q}(s) = \int_\Gamma |\mathbf{N}^*|\,\mathbf{f}^*(s,\gamma)d\gamma + \int_S \mathbf{F}^*\sqrt{g^*}\,dx_1dx_2$$

$$\mathbf{m}(s) = \mathbf{i}_\alpha^* \times \left[\int_\Gamma x_\alpha |\mathbf{N}^*|\,\mathbf{f}^*(s,\gamma)d\gamma + \int_S x_\alpha\mathbf{F}^*\sqrt{g^*}\,dx_1dx_2\right]$$

Компоненты векторов $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{M}(s)$, $\mathbf{q}(s)$, $\mathbf{m}(s)$ можно представить степенными рядами по параметру ε_0, если в определяющих их формулах для напряжений и внешних сил использовать равенства (3.1), (4.3). Учитывая также (6.2), (3.5), (8.1)–(8.3), с точностью до величин порядка ε_0 находим

$$T(s) = \int_S \sigma_{33}dx_1dx_2 \approx E\left[\varepsilon^0(s)S - \beta_{11}^0(s)\int_S x_1dx_1dx_2 - \beta_{22}^0(s)\int_S x_2dx_1dx_2\right], \tag{8.5}$$

$$Q_j(s) = \int_S \sigma_{j3}dx_1dx_2 \approx \int_S \sigma_{j3}^*dx_1dx_2$$

$$M(s) = \int_S (x_1\sigma_{23} - x_2\sigma_{13})dx_1dx_2 \approx$$

$$\approx \frac{E}{1+\nu}\left[\beta_{12}^0(s)\int_S (x_1^2+x_2^2)dx_1dx_2+\int_S\left(x_1\frac{\partial\phi}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial\phi}{\partial x_1}x_1\right)dx_1dx_2\right]$$

$$M_j(s)=\int_S \sigma_{33}x_jdx_1dx_2\approx E\left[\varepsilon^0(s)\int_S x_jdx_1dx_2-\beta_{11}^0(s)\int_S x_1x_jdx_1dx_2-\beta_{22}^0(s)\int_S x_2x_jdx_1dx_2\right]$$

Таким образом, нелинейная задача о напряженно-деформированном состоянии тонкого стержня при малых относительных удлинениях и сдвигах расчленена на три слабо связанных задачи. Две из них, в плоскости поперечного сечения, линейны, их решение хорошо известно. Третья задача, нелинейная, одномерна. Она описывается соотношениями (7.3), (7.4), (7.8), (7.9), (8.1)–(8.5). Использование асимптотического метода для построения приближенной теории тонких стержней представляется эффективным при ограничении на величину относительных удлинений и сдвигов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 95-01-00334-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамина В.А.* Об определении вектора перемещения по компонентам тензора деформации в нелинейной механике сплошной среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 1. С. 14–22.
2. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию 21.III.1996