МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1998

УДК 539.3

© 1998 г. В.П. МАТВЕЕНКО, Н.А. ЮРЛОВА

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ ПОСТОЯННЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Одной из особенностей композитных материалов, армированных волокнами, является то, что они создаются одновременно с конструкцией в процессе непрерывного плетения силового каркаса изделий. Поэтому структура материала может меняться от точки к точке, и свойства материала в конструкции зависеть от технологии изготовления, масштаба изделия, разориентации волокон, искривления и натяжения арматуры, начальных микро- и макроскопических напряжений. В связи с этим использование данных стандартных испытаний на образцах с фиксированной структурой или образцах, вырезанных из заготовок изделий, может дать неверную информацию о поведении материала в конструкции.

Одним из методов определения эффективных механических характеристик, устраняющих проблему получения представительного образца, является использование экспериментальной информации, получаемой при непосредственном нагружении оболочек. Особенный интерес такой подход приобретает для уникальных оболочечных конструкций, которые могут быть подвергнуты неразрушающим методам механических испытаний.

Для комплексных исследований конструкций из композиционных материалов необходима разработка корректных методов определения и контроля упругих характеристик. Поэтому в последнее время большое внимание уделяется методам идентификации (фактически – решению обратной задачи), позволяющим уточнить характеристики материала, закладываемые в расчет конкретной конструкции, а также прогнозировать поведение конструкции при эксплуатационных режимах. Обратные задачи все шире используются в механике композиционных материалов как для идентификации физико-механических характеристик материала в конструкции, так и для определения характеристик составляющих композитного материала.

Например, в [1–3] предложен и развит экспериментально-теоретический метод определения приведенных упругих характеристик армированных композитных материалов. Метод предусматривает: составление совместной конечно-элементной модели исследуемого объекта и системы измерений деформаций; введение целевой функции, оценивающей рассогласование расчетных и экспериментально полученных сигналов; расчет оптимальных значений упругих констант материала, доставляющих минимум целевой функции.

Хендриксом в [4] показано, что при определении, например, механических характеристик материала из экспериментов с пластинками при сложном напряженным состоянии, использование численно-экспериментальных подходов дает для композитов более достоверные результаты по сравнению с классическими экспериментальными методами.

Один из возможных подходов к уточненному определению физико-механических характеристик композитного материала при его работе в конструкции, основанный на использовании метода параметрической идентификации, предложен группой авторов в [5]. Ими рассмотрены органопластиковые цилиндрические оболочки. В качестве идентифицируемой величины выбрано значение давления, при котором происходит растрескивание связующего в слоях оболочки. В качестве метода оптимизации применен метод ЛП-поиска, а функцией цели служит разность квадратов вычисленной и измеренной величины давления.

В [6–8] по экспериментально полученным данным деформирования многослойного композита как единого целого восстанавливались реальные характеристики его монослоев. Здесь решение обратной задачи находится фактически путем перебора вариантов решения

прямой задачи. Принятая минимизируемая функция отражает степень несоответствия расчетных и экспериментальных значений базовых характеристик.

Метод оценки механических параметров композитов, основанный на совместном использовании МКЭ и техники системной идентификации, предложен в [9]. Данный метод является достаточно общим и может использоваться для материалов с различными определяющими соотношениями и сложной геометрией микроструктуры композита. При конечно-элементном расчете композита, моделируемого однородным материалом, определяется зависимость поля перемещений от эффективных упругих характеристик материала. Одновременно определяется поле перемещений реального композита с учетом деталей его микроструктуры. Сравнение вычисленных полей с использованием техники идентификации, основанной на фильтре Кальмана, позволяет вычислить оптимальные значения эффективных упругих характеристик композита.

Идентификация параметров ортотропных материалов по заданным на границе тела усилиям и измеренным в ряде точек границы перемещениям предложена в работе [10]. Для решения поставленной задачи проводится минимизация по характеристикам упругого материала суммы квадратов невязок между измеренными и рассчитанными по заданным усилиям перемещениями. Для вычисления перемещений предлагается использовать прямой метод граничных интегральных уравнений.

Дальнейшее развитие этих исследований, представляемое в данной работе, связано с созданием алгоритмов, позволяющих рассматривать оболочки сложной геометрии с различными граничными условиями. При этом в качестве информации для идентификации механических характеристик могут использоваться как данные о различных статических нагружениях, реализуемых экспериментально, так и данные о резонансных режимах (спектр собственных частот, формы колебаний). И, наконец, алгоритм должен позволять оценивать экспериментальную информацию с позиций ее информативности для поиска необходимых механических характеристик.

В данной работе используется следующее понятие обратной задачи: необходимо определить коэффициенты уравнений, определяемые вектором

$$a_p = (a_{p1}, a_{p2}, \ldots, a_{pq})^T \tag{1}$$

Здесь q – число определяемых параметров, представляющих собой, например, упругие постоянные, при которых математическая модель, описывающая механическое состояние конструкции, наилучшим образом согласуется с экспериментальными данными.

Пусть для конструкции при k-м варианте нагружения получена информация о значениях перемещений $u_i^{эk}$ и деформаций $\varepsilon_{ij}^{эk}$ (здесь верхние индексы $э$ и k обозначают экспериментальную информацию при k варианте нагружения). При колебательных режимах нагружения, наряду со значениями перемещений и деформаций, определяющих собственные формы колебаний, в качестве информации о механическом поведении системы могут служить значения резонансных частот $\omega_n^э$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Для численной реализации предлагается следующий параметризованный вариант постановки обратной задачи идентификации параметров моделей механического поведения материала. Требуется найти вектор коэффициентов уравнений состояния $\bar{a}_0$, обеспечивающий в выбранной норме минимальное расстояние между расчетными (u_i^{rk}, ε_{ij}^{rk}, ω_n^r) и экспериментальными ($u_i^{эk}$, $\varepsilon_{ij}^{эk}$, $\omega_n^э$) данными. В качестве нормы выбран функционал, представляющий сумму среднеквадратичных отклонений u_i^{rk}, ε_{ij}^{rk}, ω_n^r, $u_i^{эk}$, $\varepsilon_{ij}^{эk}$, $\omega_n^э$.

$$\Phi(a_p) = \sum_{k=1}^{K} \int_V \left[\sum_{i=1}^{3} \alpha_i^k (u_i^{эk} - u_i^{rk})^2 + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \beta_{ij}^k (\varepsilon_{ij}^{эk} - \varepsilon_{ij}^{rk})^2 \right] dV + \sum_{n=1}^{N} \gamma_n (\omega_n^э - \omega_n^r)^2 \tag{2}$$

Здесь N – количество собственных частот, известных из эксперимента, α_i^k, β_{ij}^k, γ_n – весовые коэффициенты.

Тогда получаем задачу поиска минимума функционала (2):

$$\Phi(a_0) = \min \Phi(a_p) \tag{3}$$

при условии, что вектора a_p принадлежат области допустимых значений.

Экспериментальная информация о полях перемещений и деформаций, как правило, может быть получена в отдельных точках области V, занимаемой рассматриваемым телом. В этом случае функционал (2) становится функцией нескольких переменных:

$$\Phi(a_p) = \sum_{k=1}^{K}\left\{\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^k[u_i^{эk}(x_m) - u_i^{rk}(x_m)]^2 + \sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\beta_{ij}^k[\varepsilon_{ij}^{эk}(x_l) - \varepsilon_{ij}^{rk}(x_l)]^2\right\} +$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\gamma_n(\omega_n^э - \omega_n^r)^2 \tag{4}$$

а задача поиска минимума функционала сводится к задаче поиска минимума функции нескольких переменных. Здесь (x_m) и (x_l) – точки, в которых известна экспериментальная информация о перемещениях и деформациях.

Можно использовать другой вариант нормы: отыскивать такую область параметров, в которой обеспечивается равномерное расхождение в идентифицируемых и экспериментальных значениях.

$$\Phi(a_p) = \sum_{k=1}^{K}\left\{\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^k\,|\,u_i^{эk}(x_m) - u_i^{rk}(x_m)\,| + \sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\beta_{ij}^k\,|\,\varepsilon_{ij}^{эk}(x_l) - \varepsilon_{ij}^{rk}(x_l)\,|\right\} +$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\gamma_n|\omega_n^э - \omega_n^r| \tag{5}$$

Ориентированные композитные материалы в общем случае представляют собой анизотропные, нелинейные, вязкоупругие материалы. Но преимущественная эксплуатация их в области температур, лежащих ниже температуры стеклования, позволяет в первом приближении рассматривать их как твердые упругие тела, особенно в случае малых деформаций, а их механическое поведение может быть описано моделью анизотропного упругого тела с эффективными упругими постоянными.

Методы численной реализации поставленной обратной задачи по идентификации механических характеристик композиционных материалов основываются на информации, полученной из решения прямых задач о статическом деформировании или о собственных колебаниях.

Для построения обобщенного решения прямых задач используется принцип возможных перемещений

$$-\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV + \int_{S_\sigma} P_i\delta u_i dS - \int_V \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\delta u_i dV = 0 \tag{6}$$

где в задачах о статическом деформировании отсутствует слагаемое, учитывающее работу сил инерции, а в задачах о собственных колебаниях – слагаемое, учитывающее работу внешних нагрузок, определяемых вектором с компонентами P_i.

При анализе оболочечных конструкций использовались соотношения моментной теории оболочек, основанные на гипотезах Кирхгофа – Лява [11].

Объектом исследований в работе являлись оболочки вращения. Для численной реализации уравнения (6) использовался полуаналитический вариант метода конечных элементов [12], согласно которому компоненты векторов перемещений и нагрузок, тензоров напряжений и деформаций представляются в виде рядов Фурье по окружной координате. В качестве конечных элементов использовался элемент, предложенный Зенкевичем [12], в форме усеченного конуса с линейной

аппроксимацией аксиальной и окружной и кубической аппроксимацией нормальной–составляющих вектора перемещений для каждой из гармоник ряда Фурье.

Предлагаемая постановка рассматриваемой проблемы сводится к классической задаче нелинейного математического программирования: минимизировать функцию (4) или (5) при ограничениях в виде равенств или неравенств. Последние определяют область допустимых значений вектора a_p и вытекают из известных ограничений на параметры анизотропного материала, например, [13].

При выборе метода решения задачи нелинейного математического программирования (или метода оптимизации) учитывалась, кроме других факторов, и чувствительность методов оптимизации к помехам (например, к погрешности измерений). Наименее чувствительными к погрешностям измерений являются методы, в которых строится нелокальная аппроксимация функции по ее значениям в ряде точек (типа симплексного поиска или метода барицентрических координат).

Для численной реализации поставленной задачи оптимального поиска с ограничениями были проверены две программные версии симплексного метода: Недлера – Мида и метод скользящего допуска, использующий для решения задачи безусловной оптимизации метод Нелдера – Мида [14].

Алгоритм скользящего допуска позволяет минимизировать целевую функцию как за счет информации, получаемой в допустимых точках пространства решений, так и за счет информации, которую удается получить при прохождении через некоторые точки, лежащие вне допустимой области, но являющиеся близкими к допустимым, что позволяет смягчить влияние погрешности измерений – исходной информации для получения целевой функции. Интервалы, в пределах которых точки можно считать почти допустимыми, в ходе оптимизационного поиска постепенно сокращаются, так что в пределе (по мере приближения к искомому решению задачи нелинейного программирования) учитываются только допустимые точки [14]. Стратегия алгоритма не зависит ни от локальных свойств целевой функции, ни от сочетаний характеристик функции и ограничений.

Для прогноза информативности и поиска экспериментов, которые могут быть использованы для определения эффективных упругих констант материала, а также оценки возможности определения тех или иных констант материала из одного и того же эксперимента путем изменения вида целевой функции (например, при введении весовых коэффициентов) был применен аппарат анализа чувствительности [15].

При статическом деформировании конструкций процедура метода конечных элементов приводит вариационное уравнение (6) к следующему алгебраическому аналогу:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\} \tag{7}$$

где $[\mathbf{K}]$ – матрица жесткости, $\{\mathbf{F}\}$ – вектор внешних нагрузок, $\{\mathbf{u}\}$ – вектор перемещений.

Если в качестве переменных проектирования принимается вектор $a_p = (a_{p1}, a_{p2}, \ldots$ $\ldots, a_{pq})^T$, то глобальная матрица жесткости и вектор внешних нагрузок являются функциями этих переменных проектирования

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}(a_p)],\ \{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{F}(a_p)\} \tag{8}$$

Очевидно, что и решение также зависит от этих переменных

$$\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{u}(a_p)\} \tag{9}$$

В задачах проектирования конструкций минимизируется (или максимизируется) некоторая функция цели при удовлетворении ограничений на переменные проектирования. Рассматривается функция общего вида

$$\Psi = \Psi(a_p, u(a_p)) \tag{10}$$

В данной задаче функция цели определяется соотношениями (4) или (5), а ограничения являются константами и в анализе чувствительности не рассматриваются.

Цель анализа чувствительности заключается в определении полной зависимости этой функции от переменных проектирования, т.е. в вычислении $d\Psi/da_p$.

Предположим, что все величины, входящие в $[\mathbf{K}(a_p)]$ и $\{\mathbf{F}(a_p)\}$, s раз дифференцируемы по переменным проектирования, тогда по теореме о неявной функции решение уравнения (7) также s раз непрерывно дифференцируемо.

Вычисление полной производной функции Ψ по a_p проводилось двумя методами [15]. Используя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{d\Psi}{da_p} = \frac{\partial\Psi}{\partial a_p} + \frac{\partial\Psi}{\partial u}\mathbf{K}^{-1}(a_p)\left[\frac{\partial}{\partial a_p}\{\mathbf{F}(a_p) - \mathbf{K}(a_p)\tilde{u}\}\right] \tag{11}$$

Второй метод вычисления производных основан на определении сопряженной переменной λ:

$$\lambda \equiv \left[\frac{\partial\Psi}{\partial u}\mathbf{K}^{-1}(a_p)\right]^T = \mathbf{K}^{-1}(a_p)\frac{\partial\Psi^T}{\partial u} \tag{12}$$

Тогда производные чувствительности вычисляются по формуле

$$\frac{d\Psi}{da_p} = \frac{\partial\Psi}{\partial a_p} + \frac{\partial}{\partial a_p}[\tilde{\lambda}^T\mathbf{F}(a_p) - \tilde{\lambda}^T\mathbf{K}(a_p)\tilde{u}] \tag{13}$$

Здесь значок (~) означает, что данный параметр в процессе дифференцирования остается постоянным.

Вычислительные аспекты производных чувствительности рассмотрены в [15, 16].

При анализе собственных колебаний процедура метода конечных элементов приводит к следующей алгебраической задаче на собственные значения:

$$([\mathbf{K}(a_p)] - \omega[\mathbf{M}(a_p)])\{\xi\} = 0 \tag{14}$$

где собственный вектор $\{\xi\}$ нормируется следующим образом:

$$\{\xi\}^T[\mathbf{M}(a_p)]\{\xi\} = 1 \tag{15}$$

В [15] доказана следующая теорема. Если симметричные положительно определенные матрицы $[\mathbf{K}(a_p)]$ и $[\mathbf{M}(a_p)]$ непрерывно дифференцируемы по переменным проектирования и собственное значение ω не является кратным, то собственное значение и собственный вектор также непрерывно дифференцируемы по переменным проектирования. Преобразуем уравнение (14) к виду

$$\tilde{\xi}^T\mathbf{K}(a_p)\tilde{\xi} = \omega\tilde{\xi}^T\mathbf{M}(a_p)\tilde{\xi} \tag{16}$$

Отсюда получим необходимое выражение для производных чувствительности

$$\frac{d\omega}{da_p} = \frac{\partial}{\partial a_p}[\tilde{\xi}^T\mathbf{K}(a_p)\tilde{\xi}] - \omega\frac{\partial}{\partial a_p}[\tilde{\xi}^T\mathbf{M}(a_p)\tilde{\xi}] \tag{17}$$

Таким образом, если решена задача о собственных колебаниях, то производные от некратных собственных значений по параметрам проектирования вычисляются непосредственно на основе соотношения (17).

Если в качестве параметров состояния принять переменные, характеризующие собственные формы, то при этом значительно увеличивается размерность задачи идентификации системы даже в случае учета небольшого числа собственных форм [17].

Таблица 1

N	E_1/G_{12}	E_2/G_{12}	ν_2	l_1	l_2	l_3
	10,000	3,053	0,28	−0,764	0,104	−0,637
a	7,00	2,35	0,251	0,728	0,098	−0,678
	1,875	1,25	0,42	−0,993	−0,06	0,101
	10,000	3,053	0,28	0,000	0,231	−0,973
b	7,00	2,35	0,251	0,000	0,131	−0,991
	1,875	1,25	0,42	0,000	−0,512	0,859
	10,000	3,053	0,28	0,014	0,089	0,996
c	7,00	2,35	0,251	0,021	−0,437	−0,899
	1,875	1,25	0,42	−0,109	−0,293	−0,950

Численные расчеты проводились для цилиндрических, конических и полусферических ортотропных оболочек при различных вариантах граничных условий на краях оболочки. Статическое нагружение осуществлялось закручивающими или растягивающими усилиями, внутренним давлением.

В выполненных численных исследованиях, как правило, вместо натурных экспериментов использовались результаты численных или аналитических решений при заданных значениях механических характеристик. При этом вычисленные перемещения и деформации имитировали результаты замеров в соответствующем эксперименте, а значения механических характеристик служили критерием достоверности решения обратной задачи.

Стратегия вычислений предусматривает предварительный анализ коэффициентов чувствительности. Как следовало ожидать, при нагружении закручивающими усилиями рассматриваемых вариантов оболочек отлична от нуля только компонента вектора чувствительности $\partial\Psi/\partial G_{12}$. Следовательно, использование информации от этого вида испытаний при решении обратной задачи должно позволить определить только модуль G_{12}, что и было получено в расчетах. Для анализа более удобно использовать нормированный вектор чувствительности

$$l_i^n = l_i \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{4} l_i^2}, \quad l_1 = \frac{\partial\Psi}{\partial E_1}, \quad l_2 = \frac{\partial\Psi}{\partial E_2}, \quad l_3 = \frac{\partial\Psi}{\partial \nu_2}, \quad l_4 = \frac{\partial\Psi}{\partial G_{12}} \tag{18}$$

В данной работе определяется чувствительность к четырем упругим постоянным, что соответствует случаю, когда оболочка изготовлена из ортотропного материала так, что в каждой точке оболочки все три главных направления упругости материала совпадают с направлениями соответствующих координатных линий, т.е. имеем дело с собственно ортотропными оболочками [18]. В ортотропных оболочках в каждой точке каждого слоя одна из плоскостей упругой симметрии параллельна срединной поверхности оболочки, а остальные две перпендикулярны к координатным линиям, совпадающим с линиями главной кривизны срединной поверхности оболочки. Для рассматриваемого варианта анизотропии выполняется соотношение $E_1\nu_2 = E_2\nu_1$ [19].

Для примера в табл. 1 приведены значения коэффициентов чувствительности для цилиндрической оболочки, определяемой размерами $L/R = 4$, $h/R = 0{,}02$ и имеющей следующие значения упругих постоянных: $E_1/G_{12} = 5{,}0$; $E_2/G_{12} = 2{,}3$; $\nu_2 = 0{,}31$, где L, R, h – соответственно длина, радиус и толщина оболочки. Вычисления приведены при различных значениях начальных приближений в задаче поиска минимума функции (4) в предположении, что имеется экспериментальная информация для компонент вектора перемещений в десяти точках, расположенных равномерно по длине оболочки. Вычисления проводились при различных начальных приближениях.

Таблица 2

E_1/G_{12}	E_2/G_{12}	ν_2	l_1	l_2	l_3
		Внутреннее давление			
10,000	3,053	0,28	0,000	0,231	– 0,973
7,00	2,35	0,251	0,000	0,131	– 0,991
1,875	1,25	0,42	0,000	– 0,512	0,859
		Внутреннее давление с кольцевым шпангоутом в середине			
10,000	3,053	0,28	0,020	0,363	0,931
7,00	2,35	0,251	0,003	0,220	– 0,976
1,875	1,25	0,42	– 0,091	– 0,978	– 0,190

Рассмотрены следующие схемы N нагружений оболочки: *a* – один торец оболочки закреплен, а ко второму приложено растягивающее усилие; *b* – оболочка нагружена внутренним давлением, оба края свободны от напряжений; *c* – оболочка нагружена внутренним давлением, оба края неподвижны.

Сопоставляя величины коэффициентов чувствительности, можно делать выводы о возможности поиска соответствующих упругих постоянных. Например, коэффициент чувствительности l_2 при нагружении оболочки по схеме *a* по отношению к другим коэффициентам мал. Соответствующие расчеты показали, что в процессе поиска упругих постоянных по результатам информации о растяжении оболочки величины E_1 и ν_1 находятся с приемлемой точностью, а значение E_2 удается получить лишь при удачном выборе начального приближения.

Методы анализа чувствительности в рассматриваемой задаче могут быть использованы для поиска наиболее информативных экспериментов для поиска упругих постоянных. Например, если в средней части оболочки, с обоими свободными от напряжений торцами, установить жесткое кольцо, то при нагружении внутренним давлением величины коэффициентов чувствительности (табл. 2) получаются более соизмеримыми. Варианты начальных приближений приняты такие же, как и в предыдущем случае.

При использовании информации о спектрах собственных частот колебаний анализ коэффициентов чувствительности позволяет выделить частоты, по которым в рамках рассматриваемого подхода могут быть найдены значения упругих постоянных.

Рассматривая результаты проделанных численных экспериментов можно сделать следующие выводы.

При наличии экспериментальной информации о кручении, растяжении и нагружении внутренним давлением предлагаемый подход позволяет определить упругие характеристики ортотропных оболочек сложной формы. Информация о растяжении оболочек может не использоваться для решения оптимизационной задачи, а служить для проверочного расчета.

Для варианта с линейно изменяющимися по длине механическими характеристиками для их идентификации может быть использован комплекс экспериментальных данных о кручении оболочки и нагружении ее внутренним давлением с жестким шпангоутом, установленным в средней части оболочки.

Для определения упругих механических характеристик на основе информации о спектрах собственных частот колебаний необходима информация об одной частоте крутильной формы колебаний и одной – двух частотах не для крутильных форм колебаний. Отбор последних осуществляется на основе оценки коэффициентов чувствительности.

Моделирование влияния погрешности эксперимента привело к выводам о том, что при использовании экспериментальной информации о перемещениях погрешность в

определении модулей упругости соизмерима с погрешностью эксперимента, а погрешность в определении коэффициентов Пуассона в среднем превышает ее в два раза. При использовании в качестве экспериментальной информации значений деформаций погрешность в определении значений упругих постоянных меньше погрешности измерений.

Рассмотрим в качестве примера задачу определения эффективных упругих постоянных слоистой цилиндрической оболочки, полученной методом непрерывной намотки. В [20] приведены экспериментальные данные по нагружению оболочки внутренним давлением, когда один торец неподвижен, а ко второму приложено растягивающее усилие. Экспериментально реализовано два варианта растягивающих усилий: $T = pR/2$ и $T = p(R - R_0)/2$. Второй вариант соответствует случаю, когда в крышке подвижного торца имеется отверстие радиуса R_0.

Геометрические параметры оболочки $h_i = 0{,}23$ мм, $R = 100$ мм, $L = 350$ мм, $R_0 = 25$ мм, где h_i – толщина каждого слоя. Оболочка состоит из 28 слоев, из них 16 кольцевых и 6 спиральных. Угол намотки – 29°. Нагружение производилось внутренним давлением $p = 0{,}85$ МПа.

В эксперименте замерялись перемещения u_r и u_φ в четырех поперечных сечениях, в каждом из которых было установлено по 6 датчиков для измерения перемещений. Для решения обратной задачи использовалась информация в 4 точках по длине конструкции, как среднее арифметическое значение от показаний датчиков в данном сечении. В результате решения были найдены следующие значения упругих постоянных: $E_1 = 2{,}012 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 4{,}826 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_1 = 0{,}13$, $\nu_2 = 0{,}3122$.

Приведенные в работе упругие характеристики однонаправленного слоя ($E_1 = 7{,}10 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 0{,}245 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_2 = 0{,}23$, $G_{12} = 0{,}196 \cdot 10^4$ МПа) позволяют по формулам для вычисления средних (эффективных) упругих характеристик композита с произвольной схемой армирования, например, приведенным в [21], вычислить эффективные упругие характеристики многослойного материала оболочки. Они дают следующие значения: $E_1 = 1{,}932 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 4{,}216 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_1 = 0{,}127$, $\nu_2 = 0{,}277$, $G_{12} = 0{,}695 \cdot 10^4$ МПа. Отличие этих значений от параметров, найденных в результате решения обратной задачи, составляет не более 12%.

Таким образом, предлагаемый подход открывает новые возможности для идентификации эффективных упругих постоянных оболочечных конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воронцов Г.В., Плющев Б.И., Резниченко А.И.* Определение приведенных упругих характеристик армированных композитных материалов методами обратных задач тензометрирования // МКМ. 1990. № 4. С. 733–736.
2. *Воронцов Г.В., Резниченко А.И.* Обобщенные методы определения приведенных (эффективных) характеристик армированных композиционных материалов // Численные и аналитические методы решения задач строительной механики теории упругости. Ростов н/Д.: Рост. инж.-стр. ин-т., 1991. С. 78–88.
3. *Воронцов Г.В., Ганзен А.Г., Резниченко А.И.* Экспериментально-теоретические методы определения приведенных упругих характеристик армированных композиционных материалов // Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк. Техн. науки. 1990. № 2. С. 32–37.
4. *Hendriks M.A.N., Oomens C.W.J., Jans H.W.J., Janssen J.D.* A numerical experimental approach for mechanical characterization of composites // Proc. 9th Int. Conf. Experim. Mech. Copenhagen, 1990. Copenhagen: Danish Counc. Sci. and Industr. Res., 1990. V. 2. P. 552–561.
5. *Суворова Ю.В., Добрынин В.С.* Определение свойств композита в конструкции методом параметрической идентификации // МКМ. 1989. № 1. С. 150–157.
6. *Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Таирова Л.П.* Идентификация упругих характеристик однонаправленных материалов по результатам испытаний многослойных композитов // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1989. Т. 30. С. 16–31.

7. *Алфутов Н.А., Таирова Л.П.* Возможности определения свойств монослоя в композите // Методы и средства диагностики несущей способности изделий из композитов: Проблемы. Рига: Зинанте, 1986. С. 212–215.
8. *Таирова Л.П.* Расчет упругих постоянных монослоя по экспериментально определенным упругим характеристикам многослойных армированных пластиков // Сб. тр. МВТУ. 1987. № 22. С. 3–9.
9. *Courage W.M.G., Schreurs P.J.G., Janssen J.D.* Estimation of mechanical parameter values of composites with the use of finite element and system identification techniques // Comput. and Struct. 1990. V. 34. № 2. P. 231–237.
10. *Ohkami T., Ichikawa Y., Kawamoto T.* A boundary element method for identifying orthotropic material parameters. // Intern. J. Numer. and Anal. Meth. Geomech. 1991. V. 15. № 9. P. 609–625.
11. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
12. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.
13. *Абрамчук С.С., Булдаков В.П.* Допустимые значения коэффициента Пуассона анизотропных материалов // МКМ. 1979. № 2. С. 235–239.
14. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 534 с.
15. *Хок Э.Дж., Чой К., Комков В.* Анализ чувствительности при проектировании конструкций. М.: Мир, 1988. 428 с.
16. *Арора Дж.С., Хог Э.Дж.* Методы расчета чувствительности по проектным переменным при оптимизации конструкций // РТиК. 1979. Т. 17. № 9. С. 52–58.
17. *Кэммер Д.К., Дженсен Б.М., Мейсо Д.Р.* Корреляция результатов расчета и испытаний центрального отсека твердотопливного двигателя КЛАМИ "Спейс Шаттл" // Аэрокосмич. техника. 1990. № 8. С. 138–149.
18. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с.
19. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
20. *Протасов В.Д., Филипенко А.А.* Безмоментные слоистые цилиндрические оболочки с переменными параметрами упругости, полученные методом непрерывной намотки // МКМ. 1984. № 3. С. 493–502.
21. *Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А.* Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.

Пермь

Поступила в редакцию
25.V.1997