МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1998

УДК 624.072.2

© 1998 г. Л.С. РЫБАКОВ

О ТЕОРИИ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СТРУКТУРЫ ФЕРМЕННОГО ТИПА

Среди многочисленных исследований по механике стержневых упругих систем можно выделить два главных направления [1, 2]. Первое объединяет работы, связанные с применением и развитием традиционных методов сил и перемещений, конечно-разностных и других методов, позволяющих учитывать индивидуальные деформативные свойства элементов системы в полной мере. Второе – работы, в которых реальная стержневая система тем или иным способом сводится к соответствующей континуальной конструктивно-анизотропной модели.

В [3–5], относящихся к первому направлению, была предложена эффективная методика построения строгих замкнутых линейных теорий упругого деформирования плоских регулярных ферм и тонкостенных стержневых систем ортогональной структуры. В основе ее лежит метод склейки в версии, предполагающей членение изучаемой упругой системы на наименьшие элементы, поэлементный анализ их механического поведения и постановку геометрических условий сопряжения всех этих элементов. Каждая из упомянутых теорий описывается функциями дискретных аргументов и справедлива для упругой системы вполне конкретной структуры. Поэтому подобные теории уместно называть структурными дискретными теориями упругости. Обсуждаемая методика оказалась плодотворной и при изучении деформирования плоских квазирегулярных ферм ортогональной структуры [6, 7].

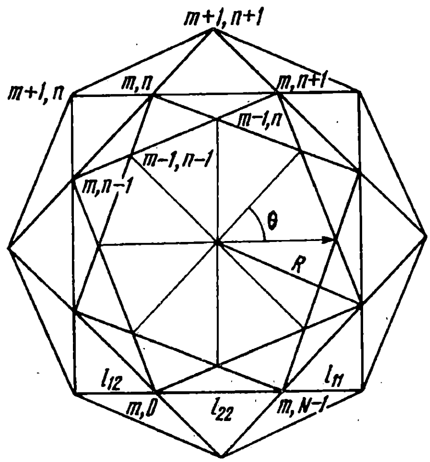
При упругом анализе циклических стержневых систем применялись в основном классические методы строительной механики [8]. В данной статье с помощью упомянутой выше методики строится строгая замкнутая линейная теория деформирования одной плоской упругой циклической стержневой системы ферменного типа. Определяющие соотношения теории сформулированы в терминах узловых смещений, полных удлинений и начальных усилий стержней и представлены статическими, физическими и геометрическими уравнениями, включая уравнение совместности полных удлинений стержней, образующими в своей совокупности совместную замкнутую систему уравнений в частных разностях.

В рамках построенной теории, напоминающей в дискретном плане плоскую задачу теории упругости в полярных координатах, даны альтернативные постановки задач в узловых смещениях и в начальных усилиях и указаны некоторые их обобщения. При постановке задачи в усилиях число статических искомых существенным образом сокращено путем введения силовой функции – дискретного аналога функции напряжений. Применение теории проиллюстрировано примерами циклически симметричного нагружения ферменной структуры, для которых построены точные аналитические решения в замкнутом виде.

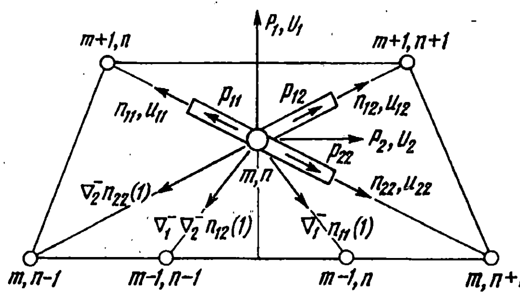
Следует подчеркнуть, что все эти рассуждения справедливы, если сжатые стержни не теряют устойчивость. С позиций линейной теории, позволяющей находить лишь докритическое напряженно-деформированное состояние упругой системы, такое предположение вполне оправдано. Статическая упругая устойчивость рассматриваемой структуры – предмет специального исследования.

Изложенный подход применим и для упругого анализа циклических систем иной структуры.

1. Определяющие соотношения. Рассмотрим плоскую свободную циклическую стержневую упругую систему ферменного типа, фрагмент которой показан на фиг. 1. Она образована из узлов, расположенных в вершинах правильных N-угольников



Фиг. 1



Фиг. 2

($N > 4$ – заданное положительное целое число; фиг. 1 отвечает случаю $N = 8$), и трех семейств $\alpha\beta$-стержней ($\alpha \leqslant \beta$; здесь и далее α, $\beta = 1, 2$): 11-стержни и 12-стержни являются звеньями ломаных спиралей, закручивающихся соответственно против и по часовой стрелки, а 22-стержни совпадают со сторонами N-угольников. Вершины текущего N-угольника лежат на пересечении линий, проходящих через пары вершин ближайшего объемлющего его N-угольника, разделенных другой одной вершиной.

По предположению, все стержни работают только на растяжение–сжатие и имеют постоянное поперечное сечение. Тогда геометрические и физические свойства упругой фермы целиком определяются длинами $l_{\alpha\beta}$ и жесткостями $g_{\alpha\beta}$ на растяжение–сжатие $\alpha\beta$-стержней. Регулярность ферменной структуры проявляется в неизменности длин $l_{\alpha\beta}$ в окружном направлении (дискретная геометрическая однородность в этом направлении) и жесткостей $g_{\alpha\beta}$ в пределах семейства $\alpha\beta$-стержней (дискретная физическая однородность).

Из других особенностей изучаемой структуры следует отметить постоянство углов по всем направлениям (изогональность структуры) и переменность характерных линейных размеров в радиальном направлении. С технологической точки зрения такие структуры, по-видимому, наиболее предпочтительны. К важным достоинствам их относится и то, что, как показано ниже, при физической однородности семейств стержней все теоретические соотношения описываются уравнениями в частных разностях с постоянными коффициентами.

В общем случае внешние статические воздействия на упругую систему слагаются из погонных осевых сил стержней и сосредоточенных сил в узлах, под действием которых свободная система находится в состоянии равновесия.

В силу дискретной двухмерности изучаемой структуры, для нумерации ее элементов (узлов и соединяющих их стержней) требуется два целочисленных параметра. Обозначим их символами m, n и условимся считать, что они отсчитываются соответственно вдоль ломаной, образованной из 12-стержней, и в окружном направлении (по часовой стрелке). Области изменения m, n для элементов структуры имеют такой вид: $m = 0, 1, 2,..., M - 1$ – для 1α-стержней, $m = 0, 1, 2,..., M$ – для 22-стержней и узлов; $n = 0, 1, 2,..., N - 1$ – для всех элементов. Здесь M – еще одно заданное положительное целое число.

Ниже используются линейные разностные операторы $\Delta_\alpha^\pm$ и $\nabla_\alpha^\pm$, смысл которых на примере отвлеченной функции $\psi[m, n]$ дискретных аргументов m, n поясняют равенства

$$\Delta_1^{\pm}\psi[m,n] = \pm\psi[m\pm 1,n]\mp\psi[m,n], \quad \Delta_2^{\pm}\psi[m,n] = \pm\psi[m,n\pm 1]\mp\psi[m,n]$$

$$\nabla_1^{\pm}\psi[m,n] = \psi[m\pm 1,n], \quad \nabla_2^{\pm}\psi[m,n] = \psi[m,n\pm 1]$$

Нетрудно видеть, что эти операторы перестановочны, причем

$$\nabla_\alpha^{\pm} = 1\pm\Delta_\alpha^{\pm}, \quad \nabla_\alpha^{+}\nabla_\alpha^{-} = 1, \quad \Delta_\alpha^{\pm} = \Delta_\alpha^{\mp}\nabla_\alpha^{\pm} \tag{1.1}$$

Введенные операторы позволяют, во-первых, записывать все формулы и уравнения в переменных с несмещенными текущими значениями дискретных аргументов без явного указания этих аргументов при символах переменных, а во-вторых, образовывать посредством их операторы частных разностей более высокого порядка. Так, например, для операторов частных разностей второго порядка имеем

$$\Delta_1^2\psi = \Delta_1^2\psi[m,n] = \psi[m+1,n] - 2\psi[m,n] + \psi[m-1,n]$$

$$\Delta_2^2\psi = \Delta_2^2\psi[m,n] = \psi[m,n+1] - 2\psi[m,n] + \psi[m,n-1] \tag{1.2}$$

$$\Delta_\alpha^2 = \Delta_\alpha^{+}\Delta_\alpha^{-} = \Delta_\alpha^{+} - \Delta_\alpha^{-} = \nabla_\alpha^{+} - 2 + \nabla_\alpha^{-}$$

Условимся также, что если в формулах и уравнениях попадается переменная со значениями дискретных аргументов, указывающими явно или неявно (обнаруживается после раскрытия предшествующего разностного оператора) на несуществующий элемент системы, то это ее значение равно нулю.

Отметим некоторые геометрические свойства изучаемой структуры. Длина $l_{\alpha\beta}$ текущего (с номером m, n) $\alpha\beta$-стержня и радиус R описанной окружности текущего N-угольника (фиг. 1) являются функциями только дискретного аргумента m: $l_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta}[m]$, $R = R[m]$. Полагая $\theta = 2\pi/N$, без труда убеждаемся в справедливости следующих геометрических зависимостей:

$$R^{-1}\nabla_1^{+}R = l_{\alpha\beta}^{-1}\nabla_1^{+}l_{\alpha\beta} = qc, \quad 2l_{1\alpha} = ql_{22} = 2sqR \tag{1.3}$$

$$q = 1/\cos\theta, \quad s = \sin(\theta/2), \quad c = \cos(\theta/2)$$

Следуя методу склейки, расчленим структуру на изолированные элементы (узлы и $\alpha\beta$-стержни) и проведем их анализ (упругий – для стержней, статический – для узлов) с учетом сил взаимодействия и геометрических условий сопряжения с соседними элементами.

Пусть $x \in [0, 1]$ – продольная безразмерная (отнесена к $l_{\alpha\beta}$) координата на оси $\alpha\beta$-стержня; $u_{\alpha\beta}(x)$, $n_{\alpha\beta}(x)$ и $p_{\alpha\beta}(x)$ – осевые соответственно отнесенное к $l_{\alpha\beta}$ смещение, внутреннее усилие и погонная нагрузка в произвольной точке упругой линии того же стержня; U_1 и U_2 – отнесенные соответственно к l_{11} и l_{12} радиальное и окружное узловые смещения; P_1 и P_2 – радиальная и окружная внешние узловые силы (см. фиг. 2). Подчеркнем, что все введенные функции зависят от дискретных аргументов m, n, так что следовало бы, например, писать $u_{\alpha\beta}(x; m, n)$, $U_\alpha[m, n]$. Однако по принятому выше соглашению эти аргументы, ради краткости записи, явно не указываются.

Упругое деформирование изолированного $\alpha\beta$-стержня описывается уравнениями $n'_{\alpha\beta}(x) + l_{\alpha\beta}p_{\alpha\beta}(x) = 0$, $n_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}u'_{\alpha\beta}(x)$, общее решение которых с учетом геометрических условий сопряжения узлов с началами исходящих из них стержней (см. (1.3) и фиг. 2):

$$u_{1\alpha}(0) = V_1 + (-1)^\alpha V_2, \quad u_{22}(0) = -q(V_1 - V_2)/2 \tag{1.4}$$

дается формулами

$$
\begin{aligned}
&u_{1\alpha}(x) = V_1 + (-1)^{\alpha} V_2 + x g_{1\alpha}^{-1} N_{1\alpha} + u_{1\alpha}^*(x), \quad n_{\alpha\beta}(x) = N_{\alpha\beta} + n_{\alpha\beta}^*(x) \\
&u_{22}(x) = -\tfrac{1}{2} q (V_1 - V_2) + x g_{22}^{-1} N_{22} + u_{22}^*(x), \quad N_{\alpha\beta} = n_{\alpha\beta}(0) \\
&u_{\alpha\beta}^*(x) = -l_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} \int_0^x (x-\tau) p_{\alpha\beta}(\tau) d\tau, \quad n_{\alpha\beta}^*(x) = -l_{\alpha\beta} \int_0^x p_{\alpha\beta}(\tau) d\tau
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

где вместо узловых смещений U_1 и U_2 введены их проекции $V_1 = sU_1$ и $V_2 = cU_2$ на оси 11- и 12-стержней соответственно.

Подстановка первого и третьего выражений (1.5) в геометрические условия сопряжения концов стержней с прилежащими к ним узлами (см. (1.1), (1.3) и фиг. 2):

$$
u_{11}(1) = \nabla_1^+[(q+1)V_1 - V_2], \quad u_{22}(1) = \tfrac{1}{2} q \nabla_2^+ (V_1 + V_2), \quad u_{12}(1) = \nabla_1^+ \nabla_2^+ [(q+1)V_1 + V_2] \tag{1.6}
$$

позволяет, во-первых, ввести полные относительные удлинения $\alpha\beta$-стержней $E_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}(1) - u_{\alpha\beta}(0)$ и выразить их через эквиваленты узловых смещений V_α формулами

$$
\begin{aligned}
E_{11} &= [(q+1)\nabla_1^+ - 1]V_1 + (1 - \nabla_1^+)V_2 \\
E_{22} &= \tfrac{1}{2} q[(\nabla_2^+ + 1)V_1 + (\nabla_2^+ - 1)V_2] \\
E_{12} &= [(q+1)\nabla_1^+ \nabla_2^+ - 1]V_1 + (\nabla_1^+ \nabla_2^+ - 1)V_2
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

а во-вторых, связать эти удлинения с начальными усилиями $N_{\alpha\beta}$ $\alpha\beta$-стержней зависимостями

$$
N_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(E_{\alpha\beta} - U_{\alpha\beta}^*), \quad U_{\alpha\beta}^* = u_{\alpha\beta}^*(1) \tag{1.8}
$$

Уравнения равновесия изолированных узлов в проекциях на радиальное и перпендикулярное ему (окружное) направления (см. фиг. 2):

$$
\begin{aligned}
&s[n_{11}(0) + n_{12}(0) - n_{22}(0) - \nabla_2^- n_{22}(1)] - 2cs[\nabla_1^- \nabla_2^- n_{12}(1) + \nabla_1^- n_{11}(1)] + P_1 = 0 \\
&c[n_{12}(0) - n_{11}(0) + n_{22}(0) - \nabla_2^- n_{22}(1)] + q^{-1}[\nabla_1^- n_{11}(1) - \nabla_1^- \nabla_2^- n_{12}(1)] + P_2 = 0
\end{aligned}
$$

с помощью второй формулы (1.5) преобразуются к виду (см. (1.1)):

$$
\begin{aligned}
&(1 - 2c\nabla_1^-)N_{11} + (1 - 2c\nabla_1^- \nabla_2^-)N_{12} - (1 + \nabla_2^-)N_{22} + s^{-1}P_1^* = 0 \\
&(\nabla_1^- - qc)N_{11} + (qc - \nabla_1^- \nabla_2^-)N_{12} + qc\Delta_2^- N_{22} + qP_2^* = 0 \\
&P_1^* = P_1 - 2cs\nabla_1^-[n_{11}^*(1) + \nabla_2^- n_{12}^*(1)] - s\nabla_2^- n_{22}^*(1) \\
&P_2^* = P_2 + q^{-1}\nabla_1^-[n_{11}^*(1) - \nabla_2^- n_{12}^*(1)] - c\nabla_2^- n_{22}^*(1)
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Уравнения (1.7)–(1.9) играют для изучаемой теории роль соответственно геометрических, физических и статических соотношений.

Заметим, что число статических искомых $N_{\alpha\beta}$, равно $(3M + 1)N$. Поскольку оно превосходит число $2(M + 1)N - 3$ независимых уравнений равновесия (1.9) (без трех уравнений глобального равновесия системы) на величину $(M - 1)N + 3$, то изучаемая задача столько же раз статически неопределима. Недостающие соотношения дает уравнение совместности полных удлинений $\alpha\beta$-стержней

$$
\begin{aligned}
&(q\Delta_2^+ + 2\nabla_1^- \nabla_2^- - 2)E_{11} + 2q^{-1}[2\nabla_1^- \nabla_2^- - (q+2)(1 + \nabla_2^-) + 2(q+1)\nabla_1^+]E_{22} = \\
&= (q\Delta_2^- + 2\Delta_1^-)E_{12} \quad (m = 1, 2, \ldots, M-1;\ n = 0, 1, 2, \ldots, N-1)
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

полученное путем исключения смещений из геометрических соотношений (1.7). Заметим, что количество равенств, содержащихся в нем и в уравнениях равновесия на 3 меньше числа статических искомых. Объясняется это двусвязностью (в дискретном смысле) циклической структуры фермы.

Действительно, в случае односвязной фермы, получаемой из исходной путем исключения, например, $\alpha 2$-стержней с номерами $(m, N-1)$, число уравнений равновесия сохраняется, а число статических искомых сокращается на $2M+1$ и становится равным $(3M+1)N-2M-1$. Следовательно, степень статической неопределимости здесь равна $(M-1)(N-2)$, что в точности совпадает с числом внутренних узлов, в которых имеет место уравнение (1.10). Для циклических структур дополнительные три соотношения доставляют условия отсутствия дислокационных смещений. Они, очевидно, равносильны требованиям однозначности узловых смещений при обходе в окружном направлении всех узлов текущего N-угольника и могут быть выражены условиями дискретной периодичности

$$\nabla_2^{\pm N} U_\alpha = U_\alpha \tag{1.11}$$

Согласно формулам (1.5) напряженно-деформированное состояние упругой структуры определено с точностью до узловых смещений U_α (или величин V_α) и усилий $N_{\alpha\beta}$. Для их определения и связанных с ними полных удлинений $E_{\alpha\beta}$ стержней служат геометрические (1.7) и физические (1.8) соотношения, уравнения равновесия узлов (1.9) и уравнение совместности деформаций (1.10), образующие все вместе полную замкнутую систему определяющих соотношений дискретной теории упругости изучаемой ферменной структуры. Они отражают смешанную постановку задачи и, как можно показать, подтверждаются вариационными принципами Лагранжа и Кастильяно.

Заметим, наконец, что уравнения (1.9), отвечающие граничным узлам, представляют статические краевые условия, которые дополняют условия дискретной периодичности

$$\nabla_2^{\pm N} N_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta} \tag{1.12}$$

В тех случаях, когда на граничные узлы наложены геометрические связи, они заменяются условиями вида (для циклической структуры) $U_\alpha = U_\alpha^*$ $(m=0, M)$, где U_α^* – предписываемые наложенными связями смещения граничных узлов, и дополняются условиями периодичности (1.11).

2. **Альтернативные постановки задач**. Примем сначала за основные (определяемые в первую очередь) неизвестные величины V_α, с точностью до постоянных совпадающие с узловыми смещениями U_α. Посредством формул (1.7), (1.8) равенства (1.9) преобразуются (см. (1.1), (1.2)) в систему уравнений в частных разностях четвертого порядка с постоянными коэффициентами

$$[g_{11}(\nabla_1^+ - 2c)(q+\Delta_1^-) + g_{12}(\nabla_1^+\nabla_2^+ - 2c)(2qc^2 - \nabla_1^-\nabla_2^-) - \tfrac{1}{2} q g_{22}(\Delta_2^2 + 4)]V_1 -$$

$$-[g_{11}(\Delta_1^+ - 2c\Delta_1^-) - g_{12}(\nabla_1^+\nabla_2^+ - 2c)(1 - \nabla_1^-\nabla_2^-) + \tfrac{1}{2} q g_{22}(\Delta_2^+ + \Delta_2^-)]V_2 + s^{-1}F_1 = 0$$

$$\left[g_{11}\left(\frac{1}{qc} - \nabla_1^+\right)(q+\Delta_1^-) + g_{12}\left(\nabla_1^+\nabla_2^+ - \frac{1}{qc}\right)(2qc^2 - \nabla_1^-\nabla_2^-) + \frac{q}{2} g_{22}(\Delta_2^+ + \Delta_2^-)\right]V_1 +$$

$$+\left[g_{11}\left(\Delta_1^+ - \frac{1}{qc}\Delta_1^-\right) + g_{12}\left(\nabla_1^+\nabla_2^+ - \frac{1}{qc}\right)(1 - \nabla_1^-\nabla_2^-) + \frac{q}{2} g_{22}\Delta_2^2\right]V_2 + c^{-1}F_2 = 0$$

$$F_1 = P_1^* - s[g_{11}(1 - 2c\nabla_1^-)U_{11}^* + g_{12}(1 - 2c\nabla_1^-\nabla_2^-)U_{12}^* - g_{22}(1+\nabla_2^-)U_{22}^*]$$

$$F_2 = P_2^* - c\left[g_{11}\left(\frac{1}{qc}\nabla_1^- - 1\right)U_{11}^* + g_{12}\left(1 - \frac{1}{qc}\nabla_1^-\nabla_2^-\right)U_{12}^* + g_{22}\Delta_2^- U_{22}^*\right]$$

служащую для нахождения искомых V_α.

Пусть теперь роль основных неизвестных играют усилия $N_{\alpha\beta}$. Для их отыскания следует воспользоваться уравнениями равновесия (1.9) и равенством

$$\varkappa_{11}(q\Delta_2^+ + 2\nabla_1^-\nabla_2^- - 2)N_{11} + \varkappa_{22}\frac{2}{q}[2\nabla_1^-\nabla_2^- - (q+2)(1+\nabla_2^-) + 2(q+1)\nabla_1^+]N_{22} -$$
$$-\varkappa_{12}(q\Delta_2^- + 2\Delta_1^-)N_{12} = U^* \qquad (m = 1,2,\ldots,M-1;\ n = 0,1,2,\ldots,N-1) \tag{2.1}$$

в которое переходит уравнение совместности полных удлинений (1.10) после исключения из него деформаций $E_{\alpha\beta}$ с помощью соотношений (1.8) и введения обозначений

$$U^* = (q\Delta_2^- + 2\Delta_1^-)U_{12}^* - (q\Delta_2^+ + 2\nabla_1^-\nabla_2^- - 2)U_{11}^* -$$
$$-2q^{-1}[2\nabla_1^-\nabla_2^- - (q+2)(1+\nabla_2^-) + 2(q+1)\nabla_1^+]U_{22}^*, \quad \varkappa_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{-1} \tag{2.2}$$

Систему уравнений в частных разностях (1.9), (2.1) путем введения функции усилий $\varphi[m, n]$ можно свести к одному уравнению. В самом деле, пусть $N_{\alpha\beta}^*$ – какое-либо частное решение уравнений равновесия (1.9). Чтобы найти его достаточно дополнить эти уравнения какими-нибудь не противоречащими им независимыми соотношениями между $N_{\alpha\beta}^*$ в количестве $(M - 1)N + 3$. Для этого можно прибегнуть к одной из основных систем метода сил или же воспользоваться эвристическими соображениями. Нетрудно теперь убедиться в том, что общее решение уравнений равновесия (1.9) дается формулами

$$N_{11} = (2c\nabla_1^+\nabla_2^+ - \Delta_2^- - 2q^{-1})\varphi + N_{11}^*, \quad N_{12} = (2c\nabla_1^+ + \Delta_2^+ - 2q^{-1})\varphi + N_{12}^*$$
$$N_{22} = (2c\nabla_1^+\nabla_2^+ + 4cq^{-1}\nabla_1^- - (q+2)q^{-1}(\nabla_2^+ + 1)]\varphi + N_{22}^* \tag{2.3}$$

Подставляя их в равенство (2.1), находим искомое уравнение в частных разностях четвертого порядка

$$\{\varkappa_{11}(2\nabla_1^-\nabla_2^- - 2 + q\Delta_2^+)(2c\nabla_1^+\nabla_2^+ - \Delta_2^- - 2q^{-1}) + 2q^{-1}\varkappa_{22}[2\nabla_1^-\nabla_2^- +$$
$$+2(q+1)\nabla_1^+ - (q+2)(1+\nabla_2^-)][2c\nabla_1^+\nabla_2^+ + 4cq^{-1}\nabla_1^- - (q+2)q^{-1}(1+\nabla_2^+)] -$$
$$-\varkappa_{12}(2\Delta_1^- + q\Delta_2^+)(2c\nabla_1^+ + \Delta_2^+ - 2q^{-1})]\}\varphi = f \quad (m = 1,2,\ldots M-1;\ n = 0,1,2,\ldots,N-1) \tag{2.4}$$

служащее для отыскания силовой функции $\varphi[m, n]$. В нем введено обозначение (см. (2.2))

$$f = (2\Delta_1^- + q\Delta_2^-)(U_{12}^* + \varkappa_{12}N_{12}^*) - (2\nabla_1^-\nabla_2^- - 2 + q\Delta_2^+)(U_{11}^* + \varkappa_{11}N_{11}^*) -$$
$$-2q^{-1}[2\nabla_1^-\nabla_2^- + 2(q+1)\nabla_1^+ - (q+2)(1+\nabla_2^-)](U_{22}^* + \varkappa_{22}N_{22}^*)$$

В силу равенства (1.12) функция φ должна удовлетворять условию дискретной периодичности $\nabla_2^{\pm N}\varphi[m,n] = \varphi[m,n]$. Кроме того ее следует подчинить краевым условиям $\varphi = 0$ $(m = -1, 0, M, M + 1)$, вытекающим из статических граничных условий (см. (1.9) при $m = 0, M$ и (2.3)).

Полученные выше результаты допускают очевидные обобщения на случай термостатики, динамики и дискретной физической неоднородности структуры (когда $g_{\alpha\beta}$ – функции m, n). Остановимся детальнее на обобщении, связанном с заменой геометрических условий сопряжения (1.4), (1.6) условиями

$$u_{1\alpha}(0) = V_1 + (-1)^\alpha V_2 + d_{1\alpha}^{(0)}, \quad u_{22}(0) = -\tfrac{1}{2}q(V_1 - V_2) + d_{22}^{(0)}$$
$$u_{11}(1) = \nabla_1^+[(q+1)V_1 - V_2] - d_{11}^{(1)}, \quad u_{22}(1) = \tfrac{1}{2}q\nabla_2^+(V_1 + V_2) - d_{22}^{(1)}$$
$$u_{12}(1) = \nabla_1^+\nabla_2^+[(q+1)V_1 + V_2] - d_{12}^{(1)}$$

допускающими взаимные смещения $d_{\alpha\beta}^{(0)}$ и $d_{\alpha\beta}^{(1)}$ соответственно начал и концов $\alpha\beta$-стержней и прилежащих к ним узлов. Нетрудно видеть, что все остальные рассуждения сохранят силу, если внести в них коррективы (срав. с (1.5), (1.8)):

$$u_{1\alpha}(x) = V_1 + (-1)^\alpha V_2 + d_{1\alpha}^{(0)} + xg_{1\alpha}^{-1}N_{1\alpha} + u_{1\alpha}^*(x)$$

$$u_{22}(x) = -\tfrac{1}{2}q(V_1 - V_2) + d_{22}^{(0)} + xg_{22}^{-1}N_{22} + u_{22}^*(x)$$

$$U_{\alpha\beta}^* = u_{\alpha\beta}^*(1) + d_{\alpha\beta}, \quad d_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta}^{(0)} + d_{\alpha\beta}^{(1)}$$

Искусственное введение в определяющие соотношения несовместностей $d_{\alpha\beta}$ дает возможность влиять на взаимодействие элементов фермы либо до, либо в процессе, либо же после построения решения задачи. В последнем случае из уже построенного аналитического решения одной общей задачи удается извлечь, по существу, готовые решения других частных задач.

В зависимости от решаемой задачи несовместимости могут выступать и как задаваемые, и как искомые величины. Если, например, для фиксированных целых α, β и r, s сохранить лишь $d_{\alpha\beta}[r, s]$ (искомая несовместность), полагая равными нулю остальные (задаваемые) несовместности, и потребовать одновременно $p_{\alpha\beta}[r, s] = N_{\alpha\beta}[r, s] = 0$, то в итоге придем к задаче о структуре с исключенным (поврежденным в каком-то сечении) $\alpha\beta$-стержнем с номером (r, s).

Несовместности $d_{\alpha\beta}$ можно интерпретировать как предварительные полные деформации соответствующих стержней, происхождение которых может быть самым разнообразным.

3. Некоторые аналитические результаты. Проиллюстрируем применение построенной теории на примере постановки задач в усилиях. Не касаясь деталей, заметим, что с помощью разложений в дискретный ряд Фурье неизвестной $\varphi[m, n]$ и заданной $f[m, n]$ функций

$$\varphi[m,n] = \sum_{k=0}^{N-1} \varphi_k[m] e^{2\pi i \frac{kn}{N}}, \quad f[m,n] = \sum_{k=0}^{N-1} f_k[m] e^{2\pi i \frac{kn}{N}}, \quad i = \sqrt{-1}$$

уравнение (2.4) сводится к обыкновенному разностному уравнению четвертого порядка относительно искомой $\varphi_k[m]$, решение которого может быть построено известными методами в аналитическом виде.

В особом рассмотрении нуждается случай циклического нагружения фермы, когда все переменные задачи зависят лишь от аргумента m, так что $f = f_0[m]$, $\varphi = \varphi_0[m]$. Последняя функция, являясь решением обыкновенного разностного уравнения четвертого порядка (см. (2.4)):

$$4q^{-2}[2\varkappa_{22}(2qc^2\Delta_1^+ - \Delta_1^-)(1 - 2c\nabla_1^-) - q(\varkappa_{11} + \varkappa_{12})\Delta_1^-](qc\nabla_1^+ - 1)\varphi_0[m] = f_0[m]$$
$$(m = 1, 2, \ldots, M)$$

будет содержать четыре постоянные. Формулы (2.3) переходят здесь в равенства

$$N_{1\alpha}[m] = 2q^{-1}(qc\nabla_1^+ - 1)\varphi_0[m] + N_{1\alpha}^*[m]$$
$$N_{22}[m] = 2q^{-1}(1 - 2c\nabla_1^-)(qc\nabla_1^+ - 1)\varphi_0[m] + N_{22}^*[m] \qquad (3.1)$$

а уравнения равновесия (1.9) принимают вид

$$(1 - 2c\nabla_1^-)(N_{11}[m] + N_{12}[m]) - 2N_{22}[m] + s^{-1}P_1^*[m] = 0$$
$$(\nabla_1^- - qc)(N_{11}[m] - N_{12}[m]) + qP_2^*[m] = 0 \qquad (3.2)$$

$$P_1^* = P_1 - 2cs\nabla_1^-[n_{11}^*(1) + n_{12}^*(1)] - sn_{22}^*(1)$$
$$P_2^* = P_2 + q^{-1}\nabla_1^-[n_{11}^*(1) - n_{12}^*(1)] - cn_{22}^*(1) \qquad (3.3)$$

Первое уравнение (3.2) будет выполняться для краевых узлов ($m = 0, M$) при условии $N_{1\alpha}[-1] = N_{1\alpha}[M] = 0$. Отсюда заключаем, что для функции $\varphi_0[m]$ имеется только два краевых условия

$$qc\varphi_0[0] - \varphi_0[-1] = 0, \quad qc\varphi_0[M+1] - \varphi_0[M] = 0$$

чего явно недостаточно для получения единственного решения задачи. Подобная ситуация возникает и в осесимметричной плоской задачи теории упругости, если ее решение для функции напряжений рассматривать как частный случай неосесимметричной задачи.

С позиций циклически симметричной (осесимметричной) задачи это объясняется, с одной стороны, завышенным порядком самого уравнения совместности деформаций, а с другой стороны, – избыточными разностными операторами (операциями дифференцирования), содержащимися в выражениях усилий (напряжений) через силовую функцию (функцию напряжений).

Действительно, последнее утверждение подтверждают формулы (3.1). Что же касается первого утверждения, то в его справедливости убеждают следующие рассуждения. В рамках циклически симметричной задачи геометрические соотношения (1.7) принимают вид

$$E_{1\alpha} = (2qc^2\nabla_1^+ - 1)V_1 + (-1)^\alpha V_2, \quad E_{22} = qV_1$$

Отсюда имеем уравнение совместности деформаций

$$q(E_{11} + E_{12}) - 2(2qc^2\nabla_1^+ - 1)E_{22} = 0 \quad (m = 0,1,2,\ldots,M-1) \tag{3.4}$$

в то время как равенство (1.10) дает

$$\Delta_1^-[q(E_{11} + E_{12}) - 2(2qc^2\nabla_1^+ - 1)E_{22}] = 0 \quad (m = 0,1,2,\ldots,M-1)$$

Из уравнений равновесия (3.2) вытекают выражения

$$N_{11}[m] = N_{12}[m] + N_1[m], \quad N_{22}[m] = (1 - 2c\nabla_1^-)N_{12}[m] + N_2[m]$$

$$N_1[m] = c^{-1}\sum_{k=0}^{m}(qc)^{k-m}P_2^*[k], \quad 2N_2[m] = s^{-1}P_1^*[m] + 2qcP_2^*[m] - qN_1[m] \tag{3.5}$$

в которых, как обычно, сумма считается равной нулю, если ее верхний предел меньше нижнего. Они показывают, что вводить здесь силовую функцию совсем не обязательно, ибо ее роль может играть усилие $N_{12}[m]$.

Выражая из физических соотношений (1.8) удлинения $E_{\alpha\beta}$ через усилия $N_{\alpha\beta}$ и подставляя полученный результат в равенство (3.4), с помощью первых двух формул (3.5) получаем дискретную краевую задачу второго порядка

$$(qc\nabla_1^+ - 2\eta\sqrt{qc} + \nabla_1^-)N_{12}[m] = N[m], \quad (m = 0,1,2,\ldots,M-1)$$

$$N_{12}[-1] = N_{12}[M] = 0$$

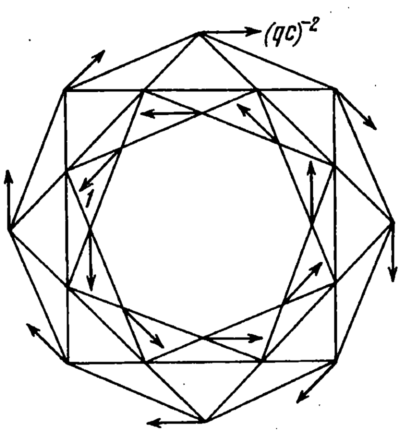
решение которой для произвольного, подчеркнем, циклически симметричного нагружения имеет вид

$$N_{12}[m] = N_{12}^*[m] - \frac{u_m^*}{u_M^*}N_{12}^*[M], \quad N_{12}^*[m] = \frac{1}{qc}\sum_{k=0}^{m-1}u_{m-k-1}^*N[k] \tag{3.6}$$

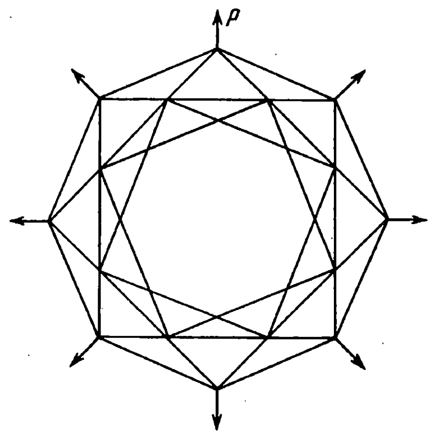
$$\eta = \frac{4qc^3 + 1}{4c\sqrt{qc}} + \frac{q(\varkappa_{11} + \varkappa_{12})}{8c\varkappa_{22}\sqrt{qc}}$$

$$N[m] = \frac{q}{4c\varkappa_{22}}(U_{11}^* + U_{12}^* + \varkappa_{11}N_1) - \frac{2qc^2\nabla_1^+ - 1}{2c\varkappa_{22}}(U_{22}^* + \varkappa_{22}N_2) \tag{3.7}$$

$$u_m^* = (qc)^{-m/2}u_m(\eta), \quad u_0 = 1, \quad u_1 = 2\eta, \quad u_m = 2\eta u_{m-1} - u_{m-2}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

где $u_m(\eta)$ – полином Чебышева второго рода степени m. Усилия $N_{\alpha\alpha}$ находятся по усилию N_{12} из выражений (3.5).

В качестве первого примера конкретного циклически симметричного нагружения рассмотрим кручение ферменной структуры единичными силами, приложенными в отрицательном окружном направлении к вершинам внутреннего N-треугольника, и уравновешивающими их силами q^{-M}, аналогичным образом действующими в положительном направлении на вершины внешнего N-угольника (для $M = 2$ это показано на фиг. 3). Нетрудно понять, что в этом случае (см. (1.5), (1.8), (3.3), (3.5)–(3.7)):

$$P_{\alpha\beta} = u^*_{\alpha\beta} = U^*_{\alpha\beta} = \eta^*_{\alpha\beta} = P_1 = P_1^* \equiv 0, \quad P_2^* = P_2 = (qc)^{-M}\delta_{mM} - \delta_{m0}$$

$$cN_1[m] = (qc)^{-M}\delta_{mM} - (qc)^{-m}, \quad 2cN_2[m] = (qc)^{-M}\delta_{mM} - 2qc^2\delta_{m0} + q(qc)^{-m}$$

$$N[m] = \frac{q\varkappa_{11} + \varkappa_{22}}{4c^2\varkappa_{22}(qc)^M}\delta_{mM} - \frac{q}{2(qc)^M}\delta_{m,M-1} - \frac{q}{2}\delta_{m0} - q\frac{\varkappa_{11} + (2c-1)\varkappa_{22}}{4c^2\varkappa_{22}(qc)^m}$$

$$N_{12}^*[m] = -\frac{h_{m-M}}{2c(qc)^M} - \frac{u^*_{m-1}}{2c} - \frac{\varkappa_{11} + (2c-1)\varkappa_{22}}{4c^3\varkappa_{22}}\sum_{k=0}^{m-1}(qc)^{-k}u^*_{m-k-1}$$

где δ_{mn} – символ Кронекера, а h_m – дискретный аналог функции Хевисайда: $h_m = 1$ при $m \geqslant 1$ и $h_m = 0$, если $m < 0$. Для нахождения усилий $N_{\alpha\beta}$ следует обратиться к формулам (3.5), (3.6). В частности, при $M = 2$ имеем

$$N_{11}[0] = N_{12}[0] - c^{-1}, \quad N_{11}[1] = N_{12}[1] - (qc^2)^{-1}, \quad N_{22}[0] = N_{12}[0] - (2c)^{-1}$$

$$N_{22}[1] = N_{12}[1] - 2cN_{12}[0] + (2c^2)^{-1}, \quad N_{22}[2] = -2cN_{12}[1] + (qc)^{-1}$$

$$N_{12}[0] = -\frac{2\eta\sqrt{qc}N[0] + qcN[1]}{4\eta^2 - 1}, \quad N_{12}[1] = -\frac{N[0] + 2\eta\sqrt{qc}N[1]}{qc(4\eta^2 - 1)}$$

$$N[0] = -\frac{1 + 2qc}{4c^2} - \frac{q\varkappa_{11}}{4c^2\varkappa_{22}}, \quad N[1] = -1 - \frac{\varkappa_{11} - \varkappa_{22}}{4c^3\varkappa_{22}}$$

В качестве второго примера циклического симметричного нагружения фермы рассмотрим растяжение ее одинаковыми радиальными силами P, приложенными к вершинам внешнего N-угольника (для $M = 2$ это показано на фиг. 4). Такому нагружению отвечают внешние воздействия $p_{\alpha\beta} = u^*_{\alpha\beta} = n^*_{\alpha\beta} = U^*_{\alpha\beta} = P_2 = P_2^* \equiv 0$, $P_1 = P_1^* = P\delta_{mM}$, подстановка которых в формулы (3.5), (3.6) дает

$$N_{1\alpha}[m] = \frac{P}{2s}\left(\frac{u_m^*}{u_M^*} - \delta_{mM}\right), \quad N_{22}[m] = P\frac{u_m^* - 2cu_{m-1}^*}{2su_M^*} \tag{3.8}$$

Отсюда, в частности, при $M = 2$ находим

$$N_{1\alpha}[0] = \frac{Pqc}{2s(4\eta^2 - 1)}, \quad N_{1\alpha}[1] = \frac{P\eta\sqrt{qc}}{s(4\eta^2 - 1)}$$

$$N_{22}[0] = \frac{Pqc}{2s(4\eta^2 - 1)}, \quad N_{22}[1] = P\frac{\eta\sqrt{qc} - qc^2}{s(4\eta^2 - 1)}, \quad N_{22}[2] = \frac{P}{2s}\left(1 - \frac{4c\eta\sqrt{qc}}{4\eta^2 - 1}\right)$$

В заключение отметим, что при $N \to \infty$ каждая совокупность 1α-стержней, соединяющих смежные N-угольники, как и каждый N-угольник вырождается в кольцо радиуса $R_0 = R[0]$. В результате ферменная структура превращается в составное кольцо, образованное из $(2M + 1)$-го кольца, с унаследованной от нее схемой взаимодействия последних. Положим в формулах (3.8) $P = pR[M]\theta$, где $R[M] = R_0(qc)^{-M}$ – радиус внешнего N-угольника (см. (1.3)), а p – постоянная погонная радиальная нагрузка. Принимая во внимание, что при $\theta = 2\pi/N \to 0$ ($N \to \infty$; см. (1.3), (3.7)):

$$s = 0, \quad c = q = \frac{\theta}{2s} = 1, \quad \eta = \frac{5}{4} + \frac{\varkappa_{11} + \varkappa_{12}}{8\varkappa_{22}}$$

из формул (3.8) находим

$$N_{1\alpha}^\infty[m] = \lim_{N\to\infty} N_{1\alpha}[m] = pR_0\frac{u_m}{u_M}, \quad N_{22}^\infty[m] = \lim_{N\to\infty} N_{22}[m] = pR_0\frac{u_m - 2u_{m-1}}{u_M}$$

Отсюда с помощью очевидной формулы

$$\sum_{k=0}^{m} u_k(\eta) = \frac{u_{m+1} - u_m - 1}{2(\eta - 1)}$$

устанавливаем, что для суммарного окружного усилия в составном кольце имеет место выражение

$$\sum_{m=0}^{M-1} N_{1\alpha}^\infty[m] + \sum_{m=0}^{M} N_{22}^\infty[m] = pR_0$$

Последний результат, как и следовало ожидать, полностью совпадает с хорошо известным элементарным выражением для окружного усилия в кольце радиуса R_0, равномерно растягиваемом в радиальном направлении постоянной погонной нагрузкой p.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sherman D.R.* Latticed structures: State of the art report // J. Struct. Div. ASCE. 1976. V. 102. No. ST-1. P. 2197–2230.
2. *Образцов И.Ф., Рыбаков Л.С., Мишустин И.В.* О методах анализа деформирования стержневых упругих систем регулярной структуры // ИПРИМ РАН. Механика композиционных материалов и конструкций. 1996. Т. 2. № 2. С. 3–14.
3. *Рыбаков Л.С.* О теории одной плоской регулярной упругой структуры ферменного типа // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 171–179.

4. *Рыбаков Л.С.* Упругий анализ одной плоской регулярной стержневой структуры // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 1. С. 198–207.
5. *Рыбаков Л.С.* Упругий анализ плоской прямоугольной панели, регулярно подкрепленной ортогональной системой стрингеров // Вестник МАИ. Т. 3. № 2. С. 66–71.
6. *Рыбаков Л.С., Мишустин И.В.* О теории одной плоской квазирегулярной в одном направлении структуры ферменного типа // ИПРИМ РАН. Механика композиционных материалов и конструкций. 1996. Т. 2. № 1. С. 41–50.
7. *Рыбаков Л.С., Мишустин И.В.* Теория одной плоской квазирегулярной в двух направлениях структуры ферменного типа // ИПРИМ РАН. Механика композиционных материалов и конструкций. 1996. Т. 2. № 3–4. С. 88–98.
8. *Динкевич С.З.* Расчет циклических конструкций. Спектральный метод. М.: Стройиздат, 1977. 128 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.V.1997