

УДК 539.374

© 1998 г. Э.И. СТАРОВОЙТОВ, А.В. ЯРОВАЯ

ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ТРЕХСЛОЙНЫЙ СТЕРЖЕНЬ ПРИ ТЕРМОСИЛОВЫХ НАГРУЗКАХ

Рассматривается несимметричный по толщине трехслойный стержень, наружные несущие слои которого выполнены из металла, а несжимаемый по толщине внутренний слой (заполнитель) – полимер. Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, в заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый угол $\psi(x, t)$. Несущие слои приняты вязкоупругопластическими, заполнитель – нелинейно вязкоупругий.

Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя (фиг. 1). На внешний слой стержня действует распределенная силовая нагрузка $p(x, t)$, $q(x, t)$. Через $w(x, t)$ и $u(x, t)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя.

Продольные перемещения в слоях $u^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя) можно выразить через три искомые функции $u(x, t)$, $\psi(x, t)$ и $w(x, t)$ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,x}, & c \leq z \leq c + h_1 \\ u^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,x}, & -c \leq z \leq c \\ u^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,x}, & -c - h_2 \leq z \leq -c \end{aligned} \quad (1)$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя. Запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате. Компоненты тензора деформаций в слоях можно получить, используя известные соотношения Коши.

Внутренние усилия и моменты вводятся следующими соотношениями:

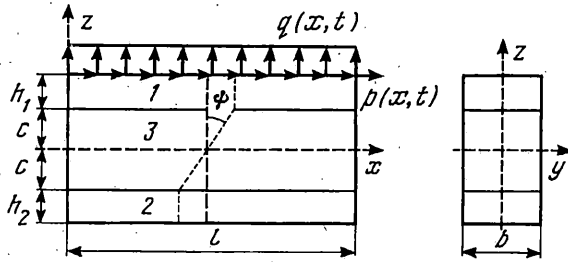
$$N^{(k)} = b \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz, \quad M^{(k)} = b \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz, \quad Q^{(3)} = b \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz \quad (2)$$

где $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений, b – ширина поперечного сечения. Интегралы берутся по высоте k -го слоя.

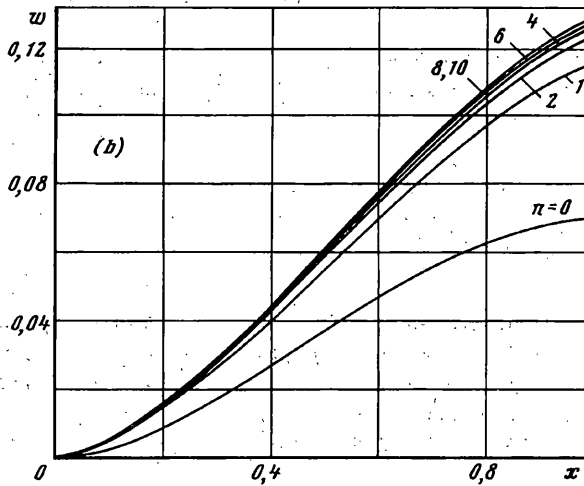
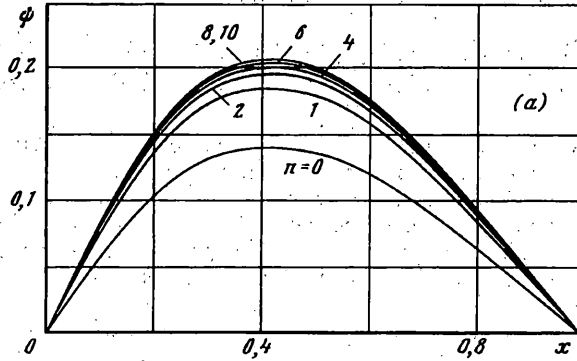
Уравнения равновесия получим, используя принцип возможных перемещений

$$\delta A_e + \delta A_i = 0 \quad (3)$$

где δA_e – работа внешних сил, δA_i – работа внутренних сил упругости. При определении работы внешних сил считаем, что к наружным поверхностям несущих слоев приложены произвольные распределенные нагрузки, а к торцам стержня – усилия и моменты N_p, M_p, Q .



Фиг. 1



Фиг. 2

Работа внешней поверхностной нагрузки представима в виде

$$\delta A_e = \iint_S (p \delta u + q \delta w) dS = b \int_0^l (p \delta u + q \delta w) dx \quad (4)$$

Работа сил упругости, в соответствии с (1), (2), будет

$$\delta A_i = \iint_S \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_x^{(k)} \delta \epsilon_x^{(k)} + \sigma_{xz}^{(3)} \delta \epsilon_{xz}^{(3)} \delta_{k3}) dz dS = \iint_S (N \delta u_{,x} - M \delta w_{,xx} + Q \delta \psi + H \delta \psi_{,x}) dS \quad (5)$$

$$N = \sum_{k=1}^3 N^{(k)}, \quad M = \sum_{k=1}^3 M^{(k)}, \quad Q = Q^{(3)}, \quad H = c(N^{(1)} - N^{(2)}) + M^{(3)}$$

Подставив (4), (5) в (3) и проведя некоторые преобразования, получим следующие уравнения равновесия:

$$bp - N_{,x} = 0, \quad Q - H_{,x} = 0, \quad bq - M_{,xx} = 0 \quad (6)$$

и силовые граничные условия:

$$N = N_p, \quad M = M_p, \quad M_{,x} = Q, \quad H = 0 \quad \text{при } x = 0, l$$

$$N_p = \int_{-c-h_2}^{c+h_1} \sigma_p dz, \quad M_p = \int_{-c-h_2}^{c+h_1} \sigma_p z dz$$

где $\sigma_p = \sigma_0$ при $x = 0$, $\sigma_p = \sigma_l$ при $x = l$, σ_0, σ_l – заданные напряжения на торцах стержня.

В слоях стержня используются следующие наследственные нелинейные физические уравнения состояния:

$$s_{ij}^{(k)} = 2G^{(k)}(T^{(k)}) \left[f_1^{(k)}(\epsilon_u^{(k)}, T^{(k)}) \epsilon_{ij}^{(k)} - \int_0^t \Gamma_k(t-\tau) f_2^{(k)}(\epsilon_u^{(k)}, T^{(k)}) \epsilon_{ij}^{(k)}(\tau) d\tau \right]$$

$$\sigma^{(k)} = 3K^{(k)}(T^{(k)}) (\epsilon^{(k)} - \alpha_{0k} \Delta T^{(k)}) \quad (k = 1, 2, 3) \quad (7)$$

Здесь $s_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений; $\epsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций; $f_1^{(k)}(\epsilon_u^{(k)}, T^{(k)})$ ($k = 1, 2$) – функция пластичности А.А. Ильюшина [1], которую при $\epsilon_u^{(k)} \leq \epsilon_s^{(k)}(T^{(k)})$ следует положить равной единице ($\epsilon_s^{(k)}$ – предел пластичности); $f_2^{(k)}(\epsilon_u^{(k)}, T^{(k)})$ ($k = 1, 2$) – универсальная функция нелинейной ползучести металлов, также $f_2^{(k)} \equiv 1$ при $\epsilon_u^{(k)} \leq \epsilon_{u0}^{(k)}$, $\epsilon_{u0}^{(k)}$ – предельная интенсивность деформаций, до которой ползучесть физически линейна; $f_1^{(3)}(\epsilon_u^{(3)}, T^{(3)}) \equiv f_2^{(3)}(\epsilon_u^{(3)}, T^{(3)}) \equiv f^{(3)}(\epsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность полимерного заполнителя, причем $f^{(3)} \equiv 1$ при $\epsilon_u^{(3)} \leq \epsilon_s^{(3)}$; $G^{(k)}(T^{(k)})$, $K^{(k)}(T^{(k)})$ – модули сдвиговой и объемной деформации; $G^{(3)}(T^{(3)}) \equiv G_0^{(3)}(T^{(3)}) / \varphi(T^{(3)})$, $\varphi(T^{(3)})$ – функция, учитывающая влияние температуры на физическую нелинейность полимера; $\Gamma_k(t)$ – ядра релаксации материалов; α_{0k} – осредненный коэффициент линейного температурного расширения; $T^{(k)}$ – неоднородное и нестационарное температурное поле в стержне; $\Delta T^{(k)} = T^{(k)} - T_0^{(k)}$, $T_0^{(k)}$ – начальная температура k -го слоя.

Рассмотрим методику решения поставленной краевой задачи. Входящие в уравнения равновесия и граничные условия внутренние силовые факторы выразим через три линейно независимые функции u, ψ, w с помощью соотношений (1), (7). В результате получим систему нелинейных интегродифференциальных уравнений, о точном решении которой говорить не приходится. Для ее решения используем модификацию известного метода "упругих" решений А.А. Ильюшина [2]. Функции нелинейности представим в виде

$$f_1^{(k)}(\epsilon_u^{(k)}, T^{(k)}) = 1 - \omega_l^{(k)}(\epsilon_u^{(k)}, T^{(k)}), \quad f^{(3)}(\epsilon_u^{(3)}) = 1 - \omega^{(3)}(\epsilon_u^{(3)})$$

В соотношениях (7) выделим в тензоре напряжений упругие (с индексом 0) и дополнительные (с индексом ω) слагаемые:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)0} - \sigma_{ij}^{(k)\omega}$$

$$\sigma_{ij}^{(k)0} = 2G^{(k)}(T^{(k)}) \epsilon_{ij}^{(k)} + 3K^{(k)}(T^{(k)}) \epsilon^{(k)} \delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij}^{(k)\omega} = 2G^{(k)}(T^{(k)}) \left[\omega_l^{(k)} \epsilon_{ij}^{(k)} + \int_0^t \Gamma_k(t-\tau) (1 - \omega_2^{(k)}) \epsilon_{ij}^{(k)}(\tau) d\tau \right] + 3K^{(k)}(T^{(k)}) \alpha_{0k} \Delta T^{(k)}$$

где δ_{ij} – символы Кронекера ($\delta_{ij} = 1$, если $i = j$; $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$).

Проведя подобную операцию с внутренними усилиями, получим

$$N^{(k)} = N^{(k)0} - N^{(k)\omega}, \quad M^{(k)} = M^{(k)0} - M^{(k)\omega}, \quad Q^{(3)} = Q^{(3)0} - Q^{(3)\omega} \quad (8)$$

Здесь линейные (с индексом 0) и нелинейные (с индексом ω) составляющие в (8) определяются по формулам (2), если в них заменить $\sigma_{ij}^{(k)}$ на $\sigma_{ij}^{(k)0}$ или на $\sigma_{ij}^{(k)\omega}$ соответственно. Подставив (8) в (6), приводим систему уравнений равновесия к виду

$$N_{,x}^0 = bp + N_{,x}^\omega, \quad H_{,x}^0 - Q^0 = H_{,x}^\omega - Q^\omega, \quad M_{,xx}^0 = bq + N_{,xx}^\omega \quad (9)$$

$$N^0 = \sum_{k=1}^3 N^{(k)0}, \quad M^0 = \sum_{k=1}^3 M^{(k)0}, \quad Q^0 = Q^{(3)0}, \quad H^0 = c(N^{(1)0} - N^{(2)0}) + M^{(3)0}$$

$$N^\omega = \sum_{k=1}^3 N^{(k)\omega}, \quad M^\omega = \sum_{k=1}^3 M^{(k)\omega}, \quad Q^\omega = Q^{(3)\omega}, \quad H^\omega = c(N^{(1)\omega} - N^{(2)\omega}) + M^{(3)\omega}$$

$$N^\omega = b \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \left\{ \frac{4}{3} G^{(k)} \left[\omega_1^{(k)} \epsilon_x^{(k)} + \int_0^t \Gamma_k f_2^{(k)} \epsilon_x^{(k)} dt \right] + 3K^{(k)} \alpha_{0k} \Delta T^{(k)} \right\} dz$$

$$M^\omega = b \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \left\{ \frac{4}{3} G^{(k)} \left[\omega_1^{(k)} \epsilon_x^{(k)} + \int_0^t \Gamma_k f_2^{(k)} \epsilon_x^{(k)} dt \right] + 3K^{(k)} \alpha_{0k} \Delta T^{(k)} \right\} z dz$$

$$Q^\omega = 2b \int_{-c}^c G^{(3)} \left[\omega^{(3)} \psi + \int_0^t \Gamma_3 (1 - \omega^{(3)}) \psi dt \right] dz$$

Систему уравнений для определения искомых функций u , ψ , w получим из уравнений равновесия с помощью соотношений (1), (2):

$$a_1 u_{,xx} + a_6 \psi_{,xx} - a_7 w_{,xxx} = p + p_\omega$$

$$a_6 u_{,xx} + a_2 \psi_{,xx} - a_3 w_{,xxx} - a_5 \psi = h_\omega$$

$$a_7 u_{,xxx} + a_3 \psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxx} = q + q_\omega$$

$$a_1 = (K^{(1)} + \frac{4}{3} G^{(1)}) h_1 + (K^{(2)} + \frac{4}{3} G^{(2)}) h_2 + 2c(K^{(3)} + \frac{4}{3} G^{(3)})$$

$$a_2 = c^2 [(K^{(1)} + \frac{4}{3} G^{(1)}) h_1 + (K^{(2)} + \frac{4}{3} G^{(2)}) h_2 + \frac{2}{3} c(K^{(3)} + \frac{4}{3} G^{(3)})]$$

$$a_3 = c[(K^{(1)} + \frac{4}{3} G^{(1)}) h_1 (c + \frac{1}{2} h_1) + (K^{(2)} + \frac{4}{3} G^{(2)}) h_2 (c + \frac{1}{2} h_2) + \frac{2}{3} c^2 (K^{(3)} + \frac{4}{3} G^{(3)})],$$

$$a_4 = (K^{(1)} + \frac{4}{3} G^{(1)}) h_1 (c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2) +$$

$$+ (K^{(2)} + \frac{4}{3} G^{(2)}) h_2 (c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2) + \frac{2}{3} c^3 (K^{(3)} + \frac{4}{3} G^{(3)})$$

$$a_5 = 2G^{(3)} c, \quad a_6 = c[(K^{(1)} + \frac{4}{3} G^{(1)}) h_1 - (K^{(2)} + \frac{4}{3} G^{(2)}) h_2]$$

$$a_7 = (K^{(1)} + \frac{4}{3} G^{(1)}) h_1 (c + \frac{1}{2} h_1) - (K^{(2)} + \frac{4}{3} G^{(2)}) h_2 (c + \frac{1}{2} h_2)$$

$$p_\omega = \frac{1}{b} N_{,x}^\omega, \quad h_\omega = \frac{1}{b} (H_{,x}^\omega - Q^\omega), \quad q_\omega = \frac{1}{b} M_{,xx}^\omega$$

Предположим, что в (9) содержится малый параметр, например, $(\omega_1^{(k)}, \omega^{(3)}) < 1$. Тогда возможен метод итераций, при котором для любого n -го приближения получаем задачу

$$a_1 u_{,xx}^{(n)} + a_6 \Psi_{,xx}^{(n)} - a_7 w_{,xxx}^{(n)} = p + p_{\omega}^{(n-1)}$$

$$a_6 u_{,xx}^{(n)} + a_2 \Psi_{,xx}^{(n)} - a_3 w_{,xxx}^{(n)} - a_5 \Psi^{(n)} = h_{\omega}^{(n-1)} \quad (10)$$

$$a_7 u_{,xxx}^{(n)} + a_3 \Psi_{,xxx}^{(n)} - a_4 w_{,xxxx}^{(n)} = q + q_{\omega}^{(n-1)}$$

Величины $p_{\omega}^{(n-1)}$, $h_{\omega}^{(n-1)}$, $q_{\omega}^{(n-1)}$, соответствующие нелинейным составляющим, на первом шаге ($n = 1$) принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения и носят название дополнительных "внешних" нагрузок. Они служат поправками на физическую нелинейность и реономность материалов слоев.

Предполагаем, что температура неоднородна только по толщине стержня $T^{(k)} = T^{(k)}(z, t)$. Коэффициенты a_1, \dots, a_7 вычисляются по осредненному температурному полю

$$G^{(k)}(T^{(k)}) \equiv G^{(k)}(T_0^{(k)}), \quad K^{(k)}(T^{(k)}) \equiv K^{(k)}(T_0^{(k)}), \quad T_0^{(k)}(t) = \frac{1}{h_k} \int_{h_k} T^{(k)}(z, t) dz$$

Применение метода последовательных приближений позволяет сводить на каждом шаге приближения рассматриваемую задачу к линейной однородной нестационарной задаче термоупругости с дополнительными "внешними" нагрузками.

После однократного интегрирования третьего из уравнений (10) и исключения из второго уравнения с помощью остальных продольного перемещения $u^{(n)}(x, t)$ и прогиба $w^{(n)}(x, t)$, получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение для нахождения функции $\Psi^{(n)}(x, t)$:

$$\Psi_{,xx}^{(n)} - \beta^2 \Psi^{(n)} = f^{(n)}(x, t) \quad (11)$$

$$f^{(n)}(x, t) = \gamma_1 h_{\omega}^{(n-1)} - \gamma_2 (p + p_{\omega}^{(n-1)}) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \gamma_1 \int (q + q_{\omega}^{(n-1)}) dx + C_1^{(n)}$$

$$\beta^2 = \frac{a_1 a_5 \alpha_2}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}, \quad \gamma_1 = \frac{a_1 \alpha_2}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}, \quad \gamma_2 = \frac{a_6 \alpha_2 - a_7 \alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}$$

$$a_1 = a_1 a_3 - a_6 a_7, \quad \alpha_2 = a_1 a_4 - a_7^2, \quad \alpha_3 = a_1 a_3 - a_6^2$$

где $C_1^{(n)}$ – константа интегрирования.

Решение уравнения (11) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $\Psi_0^{(n)}$ и частного решения неоднородного уравнения $\Psi_p^{(n)}$:

$$\Psi^{(n)}(x, t) = \Psi_0^{(n)} + \Psi_p^{(n)}, \quad \Psi_0^{(n)} = C_2^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) + C_3^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) \quad (12)$$

$$\Psi_p^{(n)} = (\operatorname{sh}(\beta x) \int f^{(n)}(x, t) \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int f^{(n)}(x, t) \operatorname{sh}(\beta x) dx) / \beta$$

Прогиб и продольное перемещение найдем из остальных уравнений системы (10):

$$u^{(n)}(x, t) = \gamma_3 \Psi^{(n)} + \gamma_4 L_2^{-1} (p + p_{\omega}^{(n-1)}) - \frac{a_7}{\alpha_2} L_3^{-1} (q + q_{\omega}^{(n-1)}) - \frac{a_7}{\alpha_2} C_1^{(n)} \frac{x^2}{2} +$$

$$+ \left(\frac{a_7}{a_1} C_4^{(n)} + C_7^{(n)} \right) x + \frac{a_7}{a_1} C_5^{(n)} + C_8^{(n)}$$

$$w^{(n)}(x, t) = \frac{1}{\alpha_2} \left[\alpha_1 \int \psi^{(n)} dx + a_7 L_3^{-1}(p + p_\omega^{(n-1)}) - a_1 L_4^{-1}(q + q_\omega^{(n-1)}) - a_1 C_1^{(n)} \frac{x^3}{6} \right] + \quad (13)$$

$$+ C_4^{(n)} \frac{x^2}{2} + C_5^{(n)} x + C_6^{(n)}$$

$$\gamma_3 = \frac{a_7 \alpha_1 - a_6 \alpha_2}{a_1 \alpha_2}, \quad \gamma_4 = \frac{a_7^2 + \alpha_2}{a_1 \alpha_2}$$

$$L_2^{-1}(f) \equiv \iint f dx dx, \quad L_3^{-1}(f) \equiv \iiint f dx dx dx, \quad L_4^{-1}(f) \equiv \iiint \iint f dx dx dx dx$$

Константы интегрирования $C_1^{(n)}, \dots, C_8^{(n)}$ определяются из граничных условий. На торцах предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев. Из соотношений (12), (13) при $n = 1$ следует точное решение задачи теории упругости для несимметричного по толщине трехслойного стержня.

В случае консольной заделки балки имеем следующие граничные условия. При $x = l: \psi = 0$, при $x = 0: w = w_{,x} = u = \psi = 0$:

$$N = b \int_0^l p dx, \quad M = b \int_0^l \int_0^x q dx dx, \quad Q = M_{,x} = -b \int_0^l q dx$$

Им удовлетворяют константы интегрирования

$$C_1^{(n)} = -L_1^{-1}(q)|_{x=0} - \int_0^l q dx, \quad C_2^{(n)} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\text{ch} \beta}{\text{sh} \beta} \left(\int f^{(n)}(x, t) \text{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=l} - \right. \right.$$

$$\left. - \int f^{(n)}(x, t) \text{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=0} \right) - \int f^{(n)}(x, t) \text{ch}(\beta x) dx \Big|_{x=l} \Big]$$

$$C_3^{(n)} = \frac{1}{\beta} \int f^{(n)}(x, t) \text{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=0}, \quad C_4^{(n)} = \frac{a_1}{\alpha_2} \left(L_2^{-1}(q)|_{x=0} - \int_0^l \int_0^x q dx dx + a_7 C_7^{(n)} \right)$$

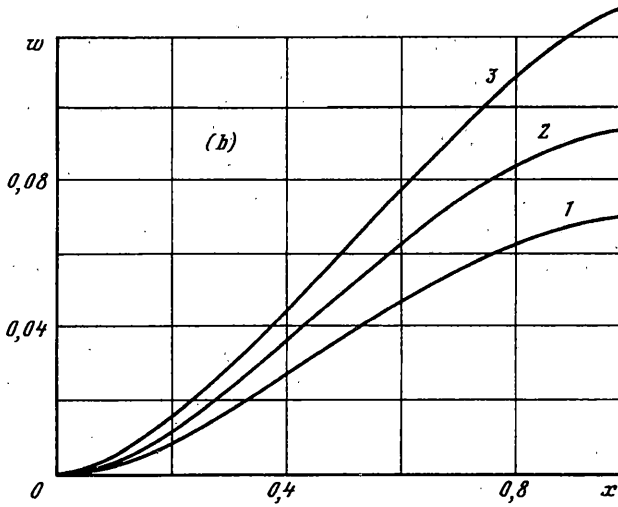
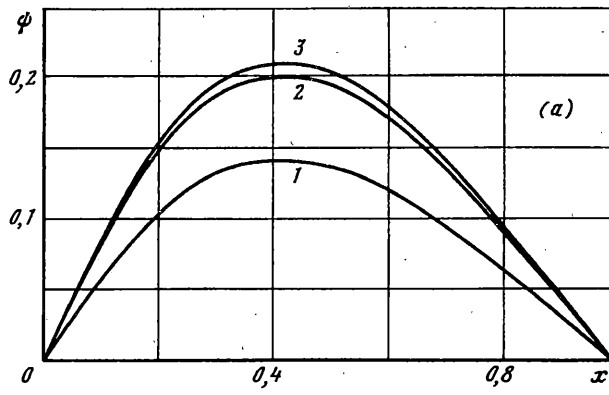
$$C_5^{(n)} = \frac{1}{\alpha_2} (a_1 L_3^{-1}(q + q_\omega^{(n-1)}) - a_7 L_2^{-1}(p + p_\omega^{(n-1)})) \Big|_{x=0} \quad (14)$$

$$C_6^{(n)} = \frac{1}{\alpha_2} \left[a_1 L_4^{-1}(q + q_\omega^{(n-1)}) - a_7 L_3^{-1}(p + p_\omega^{(n-1)}) - \alpha_1 \int \psi dx \right] \Big|_{x=0}$$

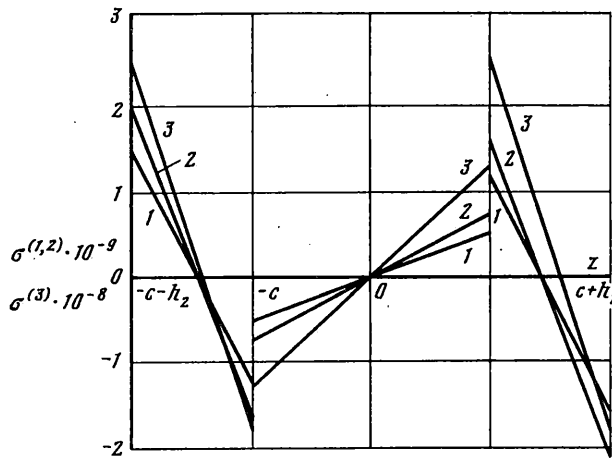
$$C_7^{(n)} = \frac{1}{a_1} \left(\int_0^l p dx - L_1^{-1}(p) \Big|_{x=0} \right), \quad C_8^{(n)} = -\frac{1}{a_1} L_2^{-1}(p + p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{x=0}$$

Таким образом, выражения (13), (14) дают аналитическое решение в итерациях задачи о деформировании трехслойного вязкоупругопластического стержня.

Рассмотрим трехслойный стержень типа металл-полимер-металл. Все перемещения и линейные размеры стержня отнесены к длине l , силовые характеристики – к 1 Па. Тепловой поток интенсивности q_t падает на внешнюю поверхность слоя 1 перпендикулярно к ней. Теплотой, ушедшей на нагревание внешнего металлического слоя, пренебрегаем (в силу тонкости слоя и малости его теплоемкости) и считаем его температуру равной температуре заполнителя в месте склейки: $T^{(1)} = T^{(3)}(c, t)$. Вся теплота, воспринимаемая стержнем за время t , идет на нагревание заполнителя. Температура внутреннего несущего слоя также принимается равной температуре заполнителя в месте склейки: $T^{(2)} = T^{(3)}(-c, t)$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Считаем стержень теплоизолированным по контуру. Температурное поле в заполнителе можно рассчитать по формуле [3]:

$$\Delta T = \frac{q_1 h_3}{\lambda_3} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left(\frac{z+c}{h_3} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left(\frac{\pi n(z+c)}{h_3} \right) e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}$$

$$h_3 = 2c, \quad \tau = at / h_3^2, \quad a = \lambda_3 / (c_3 \rho_3)$$

где λ_3 , c_3 , ρ_3 – соответственно удельная теплопроводность, теплоемкость и плотность материала заполнителя.

Величина нагрузки, интенсивность теплового потока, время их воздействия и относительные толщины слоев подбирались таким образом, чтобы нелинейные, теплофизические и реологические свойства материалов проявились в достаточной степени. Аналитический вид функций нелинейности, ядер релаксации, температурные зависимости и соответствующие константы для сплава Д16Т и фторопласта заимствованы из [2].

На фиг. 2 показана практическая сходимость метода последовательных приближений. За искомое решение принято 10-е приближение, которое отличается от предыдущих двух менее чем на 1% – как для прогибов w , так и для сдвигов $\psi (h_1 = h_2 = c = 0,05, q = 5,2 \cdot 10^6 \text{ Па}, t = 60 \text{ мин}, q_t = 3000 \text{ Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}))$.

На фиг. 3 приведены кривые, рассчитанные по различным физическим уравнениям состояния ($h_1 = h_2 = c = 0,05; q = 5,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$): 1 – упругий стержень; 2 – упругопластический стержень; 3 – вязкоупругопластический стержень, $t = 60 \text{ мин}, q_t = 3000 \text{ Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$. Аналогичные результаты для напряжений в сечении $x = 0$ показаны на фиг. 4.

Из анализа представленных числовых результатов следует, что учет нелинейных свойств материалов слоев приводит к увеличению максимальных перемещений на 80%, а напряжений – на 30%. Это необходимо учитывать в соответствующих точных инженерных расчетах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
2. *Старовойтов Э.И.* Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 114–119.
3. *Старовойтов Э.И.* К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов // Пробл. прочн. 1988. № 4. С. 11–15.

Гомель

Поступила в редакцию
25.V.1997