**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1998**

УДК 539.3:534.1

© 1998 г. **Н.А. АЛФУТОВ**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОГО САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО СТЕРЖНЯ (ЗАДАЧА В.И. ФЕОДОСЬЕВА)

В [1] была сформулирована, но не решена до конца задача устойчивости прямого упругого стержня, начальные осевые сжимающие напряжения в котором создаются только силами самогравитации. Эта задача впервые была решена в [2]; однако допущенные там погрешности привели к пугающему результату: стержень из реальных материалов под действием сил самогравитации должен терять устойчивость при длине порядка нескольких десятков метров. В [3] был получен совершенно иной результат: критическая длина стержня из реальных материалов составляет тысячи километров. Качественно этот результат был подтвержден в [4], однако количественно результаты двух последних работ существенно рознятся. Наконец, в [5] получена критическая длина самогравитирующего стержня близкая к результату, полученному в [3]. Цель настоящей публикации – внести полную ясность в эту нестандартную и интересную методически задачу.

1. Для того, чтобы сделать предельно понятной основную принципиальную неточность, допущенную в [2] и повторенную в [4], и оценить порядок погрешности, вносимой этой неточностью, сначала подробно рассмотрим решение известной простой задачи устойчивости упругого стержня, сжатого грузом P с помощью перекинутой через блок нити (фиг. 1).

Если изменение полной потенциальной энергии ΔW этой системы при изгибе стержня выразить через начальную осевую силу в стержне N_0, т.е. если воспользоваться энергетическим критерием устойчивости $\delta(\Delta W) = 0$ в форме Брайана [6], то следует записать (фиг. 1, *а*):

$$\Delta W = \frac{1}{2}\int_0^l EJ(v'')^2\,dx + \int_0^l N_0\varepsilon\,dx + \Delta V_1 \tag{1.1}$$

где EJ –изгибная жесткость стержня, v – поперечное перемещение, $\varepsilon = \frac{1}{2}(v')^2$ – удлинение оси стержня, ΔV_1 – изменение потенциала груза P; здесь продольное перемещение $u \equiv 0$, а $(...)' = d(...)/dx$.

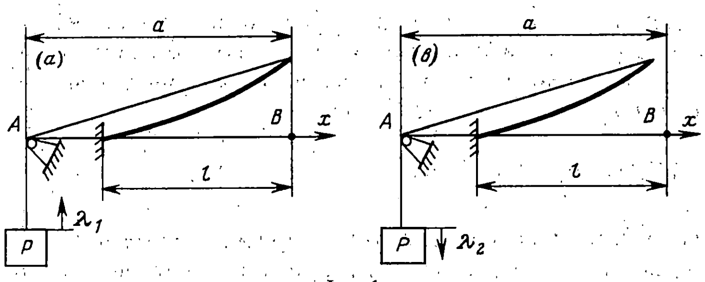
Для подсчета ΔV_1 находим с точностью до квадратов поперечных перемещений v увеличение длины нити над блоком

$$\Delta_{AB} = \sqrt{a^2 + v^2(l)} - a = v^2(l)/(2a)$$

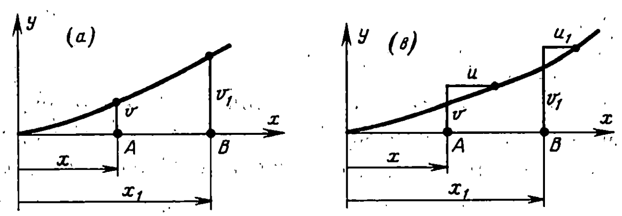
Следовательно, груз сместится вверх на величину $\lambda_1 = \Delta_{AB}$ и $\Delta V_1 = +P\lambda_1$.

Изменение полной потенциальной энергии ΔW можно подсчитывать и иначе, минуя определение N_0, если воспользоваться записью энергетического критерия устойчивости в форме С.П. Тимошенко [6]. Для этого следует ввести продольное перемещение $u(x)$. Учитывая, что теперь $\varepsilon = u' + (v')^2/2$, из условия нерастяжимости оси стержня $\varepsilon = 0$ находим

$$u(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x (v')^2\,dx$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В этом случае длина нити над блоком уменьшится на величину (фиг.1, *b*):

$$\Delta_{AB} = a - \sqrt{[a+u(l)]^2 + v^2(l)} = \frac{1}{2}\int_0^l (v')^2 dx - \frac{1}{2}\frac{v^2(l)}{a}$$

груз сместится вниз на $\lambda_2 = \Delta_{AB}$ и его потенциал уменьшится на величину $\Delta V_2 = P\lambda_2$. Следовательно теперь

$$\Delta W = \frac{1}{2}\int_0^l EJ(v'')^2 dx - P\lambda_2 \tag{1.2}$$

В рассматриваемой элементарной задаче $N_0 = -P$ и выражения (1.1) и (1.2) приводят к одному и тому же функционалу

$$\Delta W = \frac{1}{2}\int_0^l \left[EJ(v'')^2 - P(v')^2\right]dx + \frac{1}{2}P\frac{v^2(l)}{a}$$

Условие стационарности $\delta(\Delta W) = 0$ дает однородное дифференциальное уравнение и однородные граничные условия

$$v^{IV} + \alpha^2 v'' = 0 \quad (\alpha = P / EJ)$$

$$v(0) = 0,\ v'(0) = 0,\ v''(l) = 0,\ v'''(l) + \alpha^2 v'(l) - \alpha^2 v(l)/a$$

Требование существования нетривиального решения в этой задаче приводит к трансцендентному уравнению $\mathrm{tg}\,\alpha l = \alpha l\,(1 - a/l)$, решая которое, находим критическую силу

$$P_* = C\frac{\pi^2 EJ}{l^2} \tag{1.3}$$

где коэффициент C зависит от отношения a/l. При $l/a = 0$, т.е. когда $\Delta V_1 = 0$, имеем $C = 1/4$; это случай нагружения обычного консольного стержня "мертвой" силой. При $a/l = 1$ очевидно $C = 1$, а если $a/l = 0$, то $C = 2{,}026$.

2. Вернемся к задаче устойчивости самогравитирующего стержня. Основная техническая трудность решения этой задачи состоит в определении начальной осевой силы N_0, вызванной взаимным притяжением частей стержня. А принципиальная особенность задачи заключается в том, что силы взаимодействия между частями стержня не являются "мертвыми" ибо при изгибе стержня они меняют свое направление.

Воспользовавшись записью энергетического критерия устойчивости в форме Брайана, по аналогии с выражением (1.1) имеем

$$\Delta W = \frac{1}{2}\int_0^l EJ(v'')^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l N_0 (v')^2 dx + \underline{\Delta V_1} \tag{2.1}$$

где ΔV_1 – изменение потенциала сил гравитации при изгибе стержня.

Сила взаимодействия двух элементарных масс стержня, расположенных в точках A и B равна (фиг. 2):

$$Q = G\frac{m(x)dxm(x_1)dx_1}{(x_1 - x)^2}$$

где G – гравитационная постоянная, $m(x)$ – погонная масса стержня, $(x_1 - x)$ – расстояние между точками A и B до изгиба стержня. Для однородного стержня постоянного поперечного сечения $m(x) = \rho F$, где ρ – плотность материала, F – площадь поперечного сечения.

При изгибе стержня расстояние между точками A и B возрастет (фиг. 2, a) на величину

$$\Delta_{AB} = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (v_1 - v)^2} - (x_1 - x) = \frac{1}{2}\frac{(v_1 - v)^2}{(x_1 - x)}$$

При этом потенциал сил гравитации тоже возрастет на величину

$$\Delta V_1 = \int_0^l \left(\int_x^l Q\Delta_{AB} dx_1\right) dx$$

Окончательно имеем

$$\Delta W = \frac{1}{2}\int_0^l \left[EJ(v'')^2 + N_0(v')^2\right] dx +$$

$$\underline{+\frac{1}{2}G(\rho F)^2 \int_0^l \left[\int_x^l \frac{(v_1 - v)^2}{(x_1 - x)^3} dx_1\right] dx} \tag{2.2}$$

Условие стационарности $\delta(\Delta W) = 0$ дает решение задачи.

Следует подчеркнуть, что в данной задаче определение N_0 связано с чрезвычайно громоздкими выкладками: одномерная модель стержня не позволяет подсчитать N_0 и для этого приходится использовать трехмерную модель [1]. Окончательное выражение для N_0 также оказывается весьма и весьма сложным [4, 5]. Поэтому для определения критических параметров стержня естественно воспользоваться приближенным путем решения, задаваясь функцией поперечного прогиба $v(x)$, как это и делалось в [2, 4]. Однако в этих работах никак не учитывалось изменение потенциала гравитационных сил ΔV_1, т.е. в правых частях выражений (2.1) и (2.2) отсутствовали подчеркнутые слагаемые. Вносимую этой ошибкой погрешность можно грубо оценить, используя результат предыдущей элементарной задачи.

Для критической длины самогравитирующего стержня l_*, т.е. для того значения длины, при превышении которого начальная прямолинейная форма равновесия стержня перестает быть устойчивой в [4] была получена формула той же структуры, что и в [3]:

$$l_*^2 = k\frac{E}{G\rho^2}\frac{J}{F^2} \tag{2.3}$$

но при $7{,}8 < k < 10$.

Предыдущую элементарную задачу при $a < l$ можно рассматривать как грубый аналог задачи об устойчивости самогравитирующего стержня. Поскольку значение коэффициента C в формуле (1.3) при $1 > a/l > 0$ превышает в четыре – восемь раз его значение при $l/a = 0$ (т.е. когда стержень нагружен "мертвой" силой и $\Delta V_1 = 0$), то полученное в работе [4] значение коэффициента k занижено тоже примерно в четыре – восемь раз по сравнению с точным.

По работе [4] сделаем еще два небольших замечания. Во-первых, в приближенном решении функция поперечного изгиба $v(x)$ задавалась "в кинематически допустимом виде" для шарнирно опертого по торцам стержня [2, 4]. Но в задаче устойчивости самогравитирующего стержня граничные условия такие: $v''(0) = v''(l) = 0$, $v'''(0) = v'''(l)$; другими словами, никаких кинематических ограничений здесь просто нет.

Во-вторых, при подсчете конкретных значений l_* авторы указывают значение площади поперечного сечения стержня $F = 1$ мм^2. На самом же деле l_* стержня из конкретного материала, как это следует из структуры формулы (2.3), определяется только отношением J/F^2 и никак не зависит от размеров поперечного сечения. Таким образом, для заданной формы поперечного сечения критическая длина стержня l_* остается той же самой при любых значениях F.

3. В.И. Феодосьев в книге [5] (вышедшей в свет только через пять лет после его смерти) вернулся к своей задаче и довел ее до конца. Кратко отметим основные особенности его решения.

В отличие от [2–4] решение велось не энергетическим методом, а с помощью линеаризованного уравнения устойчивости. Рассматривая равновесие элемента искривленного стержня и учитывая при этом изменение направления сил взаимодействия отдельных частей стержня, автор получил интегро-дифференциальное уравнение

$$EJv^{IV} + (N_0 v')' - G\rho^2 F^2 \int_0^l \left(\frac{v_1 - v}{x_1 - x} - v' \right) \frac{dx_1}{(x_1 - x)^2} = 0 \qquad (3.1)$$

с граничными условиями $v''(0) = v''(l) = 0, v'''(0) = v'''(l) = 0$.

В записи этого уравнения была допущена неточность: вместо $(N_0 v')'$ было $N_0 v''$. Как показывают грубые оценки, на окончательный результат эта неточность повлияла незначительно.

Начальная осевая сила в стержне N_0 вычислялась для трехмерной модели стержня прямоугольного поперечного сечения, причем окончательный результат получен только для квадратного поперечного сечения, как это делалось и в [4]. Далее, используя многоходовые преобразования, разложения в ряды, остроумные подстановки и комбинируя численные этапы решения с аналитическими, автор приближенно сводит интегро-дифференциальное уравнение (3.1) к обыкновенному однородному дифференциальному уравнению. В результате для критической длины стержня была получена формула (2.3), но с коэффициентом $k = 43{,}85$. Поскольку для квадратного поперечного сечения отношение $F^2/J = 12$, окончательный результат автор дает в виде

$$l_* = k \frac{E}{12 G\rho^2} \qquad (3.2)$$

Любопытно отметить, что преодолевая свои труднообозримые выкладки, автор знал простое решение, полученное энергетическим методом [3]. Правда, он отмечает: "В заключение необходимо признать, что бóльшие удобства в поиске критического параметра представляет энергетический метод".

4. Задачу об устойчивости самогравитирующего стержня можно решить и не определяя начальную осевую силу N_0; для этого следует воспользоваться записью энергетического критерия устойчивости в форме С.П. Тимошенко. Изменение полной потенциальной энергии ΔW тогда равно

$$\Delta W = \frac{1}{2}\int\limits_0^l EJ(v'')^2 dx - \int\limits_0^l \left(\int\limits_x^l Q\Delta_{AB} dx_1\right) dx$$

Здесь Q – сила взаимодействия двух элементарных масс стержня как и при решении с помощью энергетического критерия в форме Брайана; Δ_{AB} – уменьшение расстояния между точками A и B при изгибе стержня. Напомним, что при используемой сейчас форме энергетического критерия

$$\varepsilon = 0,\ \ u = \frac{1}{2}\int\limits_0^x (v')^2 dx$$

Тогда из фиг. 2, *в* следует

$$\Delta_{AB} = (x_1 - x) - \left\{\left[(x_1 + u_1) - (x + u)\right]^2 + (v_1 - v)^2\right\}^{1/2}$$

Окончательно, выразив перемещение u через v и ограничившись в разложении квадратами поперечных перемещений v, получим

$$\Delta W = \frac{1}{2}\int\limits_0^l EJ(v'')^2 dx -$$

$$-\frac{1}{2}G\rho^2F^2\int\limits_0^l \left\{\int\limits_x^l \left[\frac{\int_x^{x_1} (v')^2 dx}{(x_1 - x)^2} - \frac{(v_1 - v)^2}{(x_1 - x)^3}\right] dx_1\right\} dx \qquad (4.1)$$

Заметим, что в [3] функционал (4.1) был выражен не через v, а через угол наклона касательной к оси стержня $\theta = v'$; принципиального различия в решение это не вносит.

Критическую длину стержня находим из условия $\delta(\Delta W) = 0$. В частности, взяв простейшую аппроксимирующую функцию $v(x) = cx^2$, где c – свободный параметр, приходим к формуле (2.3), но с коэффициентом $k = 72$. Тщательно выполненное численное решение дает $k = 49{,}7$; этот результат можно считать окончательным [3]. Можно еще отметить, что в [4, 5] авторы, определяя начальную осевую силу в стержне, были вынуждены ограничиваться случаем квадратного поперечного сечения; последний же результат справедлив для стержня с произвольной формой поперечного сечения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Феодосьев В.И.* О некоторых необычных примерах устойчивости равновесия упругих систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 130–136.
2. *Клюшников В.Д.* Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во МГУ, 1986. 224 с.
3. *Алфутов Н.А., Попов Б.Г.* Устойчивость самогравитирующего стержня // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 5. С. 177–180.
4. *Клюшников В.Д., Хвостунков К.А.* К вопросу об устойчивости самогравитирующего стержня // Изв. АН. МТТ. 1996. № 2. С. 179–181.
5. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1996. 366 с.
6. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение. 1991. 334 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.II.1997