

УДК 539.3

© 1998 г. Т.И. БЕЛЯНКОВА, В.В. КАЛИНЧУК

ДИНАМИКА МАССИВНОГО ТЕЛА, ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО НА ПОВЕРХНОСТИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО СЛОЯ

Развивается метод исследования динамики массивного штампа, осциллирующего на поверхности преднапряженного слоя, нижняя грань которого жестко закреплена. Исследования проводятся в рамках линеаризованной теории наложения малой деформации на конечную [1–3]. Материал среды предполагается сжимаемым, первоначально изотропным, имеющим упругий потенциал, начальное состояние – однородным, колебания штампа – установившимися (зависимость от времени принята в виде $\exp(-i\omega t)$).

Построены решения краевых задач, описывающие волновое поле в среде при различных видах начального напряженного состояния, приведены интегральные уравнения и системы интегральных уравнений задач о вибрации произвольного в плане и полосового штампа. Изучены особенности влияния различных видов преднапряжения на критические частоты и частоты собственных колебаний слоя. В рамках плоской задачи о вертикальных (без трения) колебаниях штампа исследовано влияние преднапряжений на реакцию среды и его динамику. В низкочастотном диапазоне (до первой собственной частоты колебаний слоя) выявлено значительное влияние вида начального напряженного состояния и величины начальной деформации слоя на амплитуду колебаний массивного штампа.

Ранее [4] исследовалось влияние частного вида начального напряженного состояния на взаимодействие осциллирующего штампа с преднапряженным слоем. Изучались особенности волнового поля в зоне контакта и на свободной поверхности слоя, масса штампа не учитывалась. Постановка задачи о поступательных колебаниях массивного тела на поверхности преднапряженной среды приведена в [5]. В работе исследовалось взаимодействие массивного штампа с преднапряженным полупространством в лагранжевой системе координат, связанной с естественным состоянием среды. В настоящей статье приняты обозначения работы [5] с тем отличием, что при описании преднапряженного состояния используется система координат Эйлера [1–3], связанная с начально-деформированным состоянием среды.

1. Движение массивного, занимающего в плане область Ω , жесткого штампа на поверхности преднапряженного слоя (временной множитель опущен) в общем случае описывается уравнениями [5–7]:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \mathbf{w}^c + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{S}, \quad -\omega^2 m \mathbf{w}^c = \mathbf{F} - \mathbf{R}, \quad \omega^2 J_l \varphi_l = M_l \quad (l = 1, 2, 3) \\ \mathbf{M} = \mathbf{N} - \iint_{\Omega} (\mathbf{S} \times \mathbf{q}(x_1, x_2)) dx_1 dx_2, \quad \mathbf{R} = \iint_{\Omega} \mathbf{q}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где \mathbf{w} – амплитуда колебаний, \mathbf{w}^c – вектор перемещения центра масс, $\mathbf{S} = \{x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0\}$, x_1^0, x_2^0, x_3^0 – координаты центра масс штампа; $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ – вектор углов поворота штампа; m – масса, J_1, J_2, J_3 – моменты инерции штампа; \mathbf{F} – главный вектор, \mathbf{N} – главный момент внешних сил, приложенных к штампу; \mathbf{R} – реакция основания; $\mathbf{q}(x_1, x_2)$ – напряжения в области контакта, в которой выполняется условие $\mathbf{w} = \mathbf{u}(x_1, x_2, h)$, $x_1, x_2 \in \Omega$, $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$ – вектор перемещения произ-

вольной точки среды, x_1, x_2, x_3 – эйлерова система координат, связанная с начально-деформированным состоянием тела, занимающего область $|x_1|, |x_2| \leq \infty, 0 \leq x_3 \leq h$ (h – толщина слоя).

Краевая задача о колебаниях преднапряженного слоя под действием осциллирующей на его поверхности нагрузки $\mathbf{q}(x_1, x_2)$ описывается линейризованными уравнениями движения с граничными условиями [1, 2]:

$$\nabla \cdot \Theta = -\rho \omega^2 \mathbf{u} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{n} \cdot \Theta = \begin{cases} \mathbf{q}(x_1, x_2), & x_3 = h, \quad x_1, x_2 \in \Omega \\ 0, & x_3 = h, \quad x_1, x_2 \notin \Omega \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad x_3 = 0$$

Детальное описание уравнения (1.2), в том числе представление тензора Θ в общем случае можно найти в [1, 2, 5, 8].

Пусть начально-деформированное состояние (далее НДС) определяется постоянным тензором Λ [1, 2, 5, 8] с компонентами $\lambda_{ij} = \delta_{ij} \nu_i$ ($i, j = 1, 2, 3$), $\nu_i = 1 + \delta_i$, где δ_i – относительные удлинения волокон, направленных в НДС вдоль осей x_i , δ_{ij} – символ Кронекера. В рамках этих предположений компоненты тензора Θ имеют вид

$$\Theta_{lk} = \chi_{lksp} \partial u_s / \partial x_p$$

$$\chi_{lksp} = (\delta_{ls} \delta_{pk} + \delta_{sk} \delta_{lp} \nu_l^2) s_{lk}^{(1)} + \delta_{lk} \delta_{sp} s_{ls}^{(2)} \quad (1.4)$$

$$s_{lk}^{(1)} = 2J^{-1} [\psi_0 + \psi_2 \nu_l^2 \nu_k^2], \quad s_{lk}^{(2)} = 4J^{-1} \sum_{M=0}^2 \sum_{N=0}^2 V_{MN} \nu_l^M \nu_k^N \quad (1.5)$$

Здесь коэффициенты ψ_k, V_{km} ($k, m = 0, 1, 2$) определяются формой упругого потенциала. Их конкретный вид можно найти в [2, 5]:

2. Следуя [5], решение краевой задачи (1.2), (1.3) запишем в виде (α_1, α_2 – параметры преобразования Фурье по переменным x_1, x_2):

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega} \mathbf{k}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3, \omega) \mathbf{q}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{k}(s, t, x_3, \omega) = \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \omega) \exp(i(\alpha_1 s + \alpha_2 t)) d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (2.2)$$

Контуры Γ_1 и Γ_2 выбираются в соответствии с принципом предельного поглощения [9–11] и поведением элементов матрицы – функции $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \omega)$ на вещественной оси, свойства которых определяются характером НДС и параметрами среды.

В случае, когда НДС задается условием (σ_{ii}^0 – компоненты тензора начальных напряжений) $\sigma_{11}^0 \neq \sigma_{22}^0 \neq \sigma_{33}^0$ (однородное напряженное состояние произвольного вида) элементы матрицы – функции $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \omega)$ имеют вид

$$K_{ip} = \sum_{k=1}^3 f_{ik} [\Delta_{kp} \operatorname{sh} \sigma_k x_3 + \Delta_{k+3,p} \operatorname{ch} \sigma_k x_3] \quad (i=1, 2, p=1, 2, 3)$$

$$K_{3p} = \sum_{k=1}^3 [\Delta_{kp} \operatorname{ch} \sigma_k x_3 + \Delta_{k+3,p} \operatorname{sh} \sigma_k x_3] \quad (p=1, 2, 3) \quad (2.3)$$

$$\Delta_{kp} = \Delta_{kp}^0 / \Delta^0 \quad (k=1, 2, \dots, 6, p=1, 2, 3) \quad (2.4)$$

Здесь $\Delta^0 = \det \| T_{ij} \|$ ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) с элементами вида (нижние индексы, если не оговаривается, принимают значения 1, 2, 3);

$$\begin{aligned} T_{ik} &= l_{ik} \operatorname{ch} \sigma_k h, & T_{i,k+3} &= l_{ik} \operatorname{sh} \sigma_k h \quad (i=1,2) \\ T_{3k} &= l_{3k} \operatorname{sh} \sigma_k h, & T_{3,k+3} &= l_{3k} \operatorname{ch} \sigma_k h \\ T_{4k} &= T_{5k} = T_{6,k+3} = 0, & T_{6k} &= 1 \\ T_{i+3,k+3} &= f_{ik} \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

где Δ_{kp}^0 ($k = 1, \dots, 6$) – алгебраические дополнения элементов T_{kp} :

$$\begin{aligned} l_{nk} &= \chi_{3nn3} \sigma_k f_{nk} - i \alpha_n \chi_{n3n3}, & S_{nk} &= B_{3,3-n} H_{nk} + \alpha_n^2 B_{12} B_{n3} \quad (n=1,2) \\ l_{3k} &= \chi_{3333} \sigma_k - i \alpha_1 \chi_{3311} f_{1k} - i \alpha_2 \chi_{3322} f_{2k} \\ S_{3k} &= B_{12} H_{3k} - \sigma_k^2 B_{13} B_{23}, & S_{4k} &= H_{1k} H_{2k} - \alpha_1^2 \alpha_2^2 B_{12}^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} H_{nk} &= \chi_{3nn3} \sigma_k^2 - P_n, & B_{ij} &= \chi_{ijij} + \chi_{ijji} \\ P_n &= \chi_{1nn1} \alpha_1^2 + \chi_{2nn2} \alpha_2^2 - \rho \omega^2 \\ f_{nk} &= -i \alpha_n S_{3k} (\sigma_k S_{nk})^{-1} \quad (n=1,2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Напряжения σ_k определяются из характеристического уравнения

$$H_{3k} S_{4k} + \alpha_1^2 \sigma_k^2 B_{13} S_{2k} + \alpha_2^2 \sigma_k^2 B_{32} S_{1k} = 0 \quad (2.8)$$

В случае, когда НДС задается условием $\sigma_{11}^0 \neq \sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0$ (НДС-1), из формул (1.4), (1.5) следует симметрия коэффициентов χ_{ijkl} по индексам, принимающим значения 2 и 3.

Решение краевой задачи имеет вид (2.1)–(2.6) с коэффициентами

$$\begin{aligned} f_{1k} &= H_{4k} (i \alpha_1 \sigma_k B_{12})^{-1}, & f_{2k} &= \alpha_2 (i \sigma_k)^{-1} \quad (k=1,2) \\ f_{13} &= 0, & f_{23} &= \sigma_3 (i \alpha_2)^{-1}, & H_{4k} &= \chi_{3333} \sigma_k^2 - P_2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

σ_k определяются из уравнений

$$H_{1k} H_{4k} + \alpha_1^2 B_{12}^2 (\sigma_k^2 - \alpha_2^2) = 0 \quad (k=1,2), \quad \chi_{3223} \sigma_3^2 - P_3 = 0 \quad (2.10)$$

В случае, когда НДС задается условием $\sigma_{22}^0 \neq \sigma_{11}^0 = \sigma_{33}^0$ (НДС-2), из формул (1.4), (1.5) следует симметрия коэффициентов χ_{ijkl} по индексам, принимающим значения 1 и 3.

Решение краевой задачи имеет вид (2.1)–(2.6) с коэффициентами

$$\begin{aligned} f_{1k} &= \alpha_1 (i \sigma_k)^{-1}, & f_{2k} &= H_{5k} (i \alpha_2 \sigma_k B_{12})^{-1} \quad (k=1,2) \\ f_{13} &= \sigma_3 (i \alpha_1)^{-1}, & f_{23} &= 0, & H_{5k} &= \chi_{3333} \sigma_k^2 - P_1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

σ_k определяются из уравнений

$$H_{2k} H_{5k} + \alpha_2^2 B_{12}^2 (\sigma_k^2 - \alpha_1^2) = 0 \quad (k=1,2), \quad \chi_{3113} \sigma_3^2 - P_3 = 0 \quad (2.12)$$

В случае, когда НДС задается условием $\sigma_{33}^0 \neq \sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0$ (НДС-3) из формул (1.4), (1.5) следует симметрия коэффициентов χ_{ijkl} по индексам, принимающим значения

1 и 2, элементы матрицы – функции $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \omega)$ имеют вид

$$K_{ip} = \sum_{k=1}^3 P_{ik} \Delta_{pk} \quad (i=1,2), \quad K_{3p} = \sum_{k=1}^2 P_{3k} \Delta_{pk} \quad (2.13)$$

$$P_{n1} = f_{n1} \operatorname{sh} \sigma_1 x_3 - f_{n2} \operatorname{sh} \sigma_2 x_3, \quad P_{n2} = f_{n1} \operatorname{ch} \sigma_1 x_3 + d f_{n2} \operatorname{ch} \sigma_2 x_3$$

$$P_{n3} = -i(-1)^n \alpha_{3-n} \operatorname{sh} \sigma_3 x_3 \quad (n=1,2) \quad (2.14)$$

$$P_{31} = \operatorname{ch} \sigma_1 x_3 - \operatorname{ch} \sigma_2 x_3, \quad P_{32} = \operatorname{sh} \sigma_1 x_3 + d \operatorname{sh} \sigma_2 x_3$$

$$f_{nk} = -i \alpha_n f_k^0 (u^2 \sigma_k)^{-1} \quad (k=1,2), \quad u^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$$

$$f_k^0 = B_{13}^{-1} H_{3k}^0, \quad d = -f_1^0 \sigma_2 (f_2^0 \sigma_1)^{-1} \quad (2.15)$$

$$H_{ik}^0 = \chi_{3ii3} \sigma_k^2 - P_i^0, \quad P_i^0 = \chi_{1iii} u^2 - \rho \omega^2$$

$$\Delta_{kp} = \Delta_{kp}^0 / \Delta^0, \quad \Delta^0 = \det \| T_{ij} \| \quad (2.16)$$

$$T_{nk} = -i \alpha_n T_k, \quad T_{n3} = -i(-1)^n \alpha_{3-n} T_3 \quad (n=1,2), \quad T_{33} = 0$$

$$T_{31} = l_{31} \operatorname{sh} \sigma_1 h - l_{32} \operatorname{sh} \sigma_2 h, \quad T_{32} = l_{31} \operatorname{ch} \sigma_1 h + d l_{32} \operatorname{ch} \sigma_2 h$$

$$T_1 = l_{11} \operatorname{ch} \sigma_1 h - l_{12} \operatorname{ch} \sigma_2 h, \quad T_2 = l_{11} \operatorname{sh} \sigma_1 h + d l_{12} \operatorname{sh} \sigma_2 h$$

$$T_3 = l_{13} \operatorname{ch} \sigma_3 h, \quad l_{1k} = (\chi_{3113} f_k^0 + \chi_{1313} u^2) u^{-2}$$

$$l_{3k} = \chi_{3333} \sigma_k^2 - \chi_{3311} f_k^0 \quad (k=1,2), \quad l_{13} = \chi_{3113} \sigma_3$$

где Δ_{kp}^0 – алгебраические дополнения элементов T_{kp} , а σ_k определяются из уравнений

$$H_{1k}^0 H_{3k}^0 + u^2 \sigma_k^2 B_{13}^2 = 0 \quad (k=1,2), \quad \chi_{3223} \sigma_3^2 - P_2^0 = 0 \quad (2.17)$$

3. В случае задачи о колебаниях штампа на поверхности слоя выражение (2.1) при $x_3 = h$ представляет собой систему интегральных уравнений относительно неизвестной функции распределения напряжений $\mathbf{q}(x_1, x_2)$. При этом $\mathbf{u}(x_1, x_2, h) = \mathbf{f}(x_1, x_2)$ – заданная амплитуда перемещений подошвы штампа.

Функции $K_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, h, \omega)$ являются аналитическими в комплексной плоскости и имеют на вещественной оси конечное, зависящее от частоты, количество нулей и полюсов. Их расположение диктует выбор контуров Γ_1 и Γ_2 в представлении (2.2) по правилам, указанным в [9–11], обеспечивающим его единственность. Анализ влияния НДС на свойства $K_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, h, \omega)$ показал, что в достаточно широких пределах изменения НДС сохраняется строгое чередование вещественных нулей и полюсов функции $K_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, h, \omega)$, за исключением особых областей [9–11], где имеются двукратные полюсы.

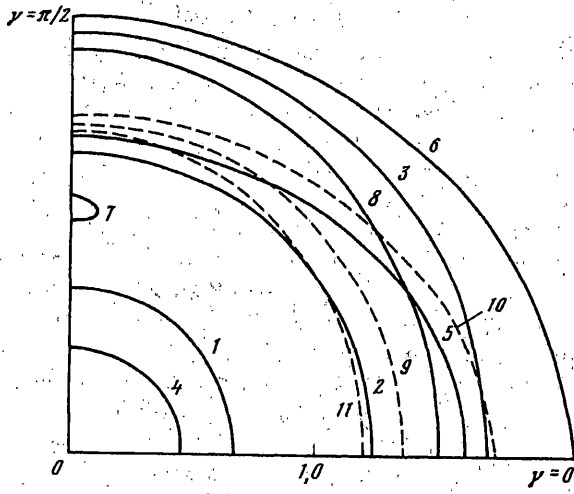
При $|u| \rightarrow \infty$ элементы $K_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, h, \omega)$ имеют представление в виде

$$K_{ij}(\alpha_1, \alpha_2) \approx |u|^{-1} C_{ij}(\gamma) [1 + O(u^{-2})]$$

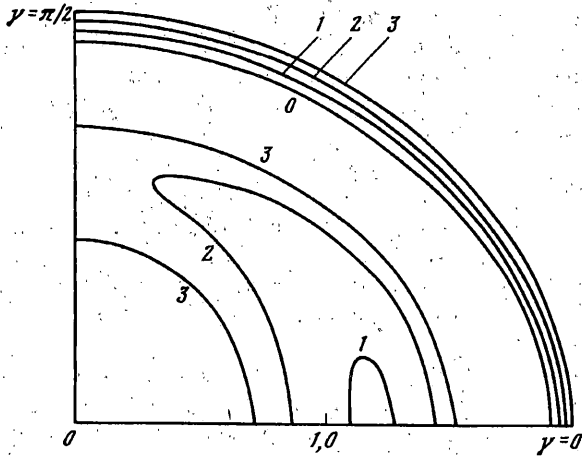
$$\alpha_1 = u \cos \gamma, \quad \alpha_2 = u \sin \gamma, \quad u^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$$

где коэффициенты $C_{ij}(\gamma)$ зависят как от механических параметров среды, так и от начальных напряжений.

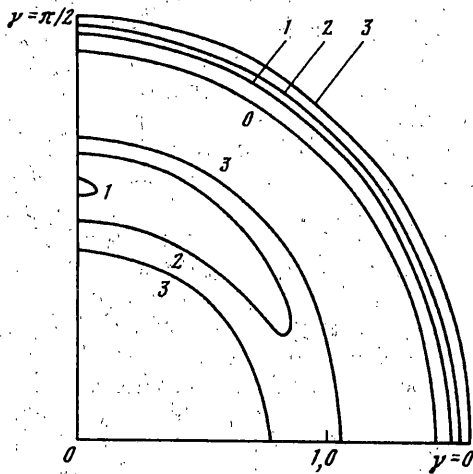
Исследованию интегральных уравнений анизотропной теории упругости, ядра которых имеют подобные свойства, в том числе изучению вопросов их разрешимости и единственности, посвящены работы [9–11]. В частном случае $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0$ влияние



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

начальной деформации на полюсы функции $K_{ij}(\alpha_i, 0, h, \omega)$ (случай плоской задачи) и связанные с ними фазовые скорости поверхностных волн исследовалось в [4, 12]. В других случаях влияние НДС носит более сложный характер: поверхности нулей и полюсов, имеющие в естественном состоянии вид тел вращения, в деформированном состоянии приобретают сложный вид, свойственный анизотропным средам [11, 13]. На фиг. 1 приведен характерный вид кривых, изображающих сечения поверхностей вещественных полюсов (сплошные линии) и нулей (штриховые линии) плоскостью $\kappa_2 = 2,85$ (κ_2 – безразмерная частота, определение которой будет дано ниже) в естественном состоянии (линии 1–3, 9), при растяжении (линии 4–6, 10) и при сжатии (линии 7, 8, 11) вдоль оси x_1 . В силу симметрии кривых относительно осей α_1 и α_2 на рисунке даны их изображения, расположенные в первой четверти. Значение $\kappa_2 = 2,85$ характерно тем, что в естественном состоянии слоя наряду с полюсом, соответствующим "регулярной" моде [9–11] (кривая 3), существуют два полюса, соответствующие "нерегулярной" моде [9–11], которые на рисунке представляются кривой 2, соответствующей "прямой волне" с положительной фазовой скоростью, и кривой 1, соответствующей "обратной волне" [9–11] с отрицательной фазовой скоростью. В регулярном случае (кривые полюсов 3, 6, 8 и нулей 9–11) растяжение приводит к увеличению, сжатие – к уменьшению значений нулей и полюсов, причем степень изменения значений зависит от направления распространения волны. Максимальное влияние НДС проявляется на направлении действия начальных напряжений (на фиг. $\gamma = 0$), минимальное – на перпендикулярном направлении ($\gamma = \pi/2$). При этом независимо от вида НДС, величины начальных напряжений и направления распространения волны сохраняется чередование нулей и полюсов.

Сложнее ситуация в нерегулярном случае (кривые 1, 2 – естественное состояние, кривые 4, 5 – растяжение, кривая 7 – сжатие). При растяжении значение полюса, соответствующего "прямой волне", увеличивается (как в регулярном случае), значение полюса соответствующего "обратной волне" уменьшается. При определенной величине растяжения этот полюс обращается в ноль. С увеличением деформации он становится комплексным, "обратная волна" исчезает и нерегулярная мода становится регулярной.

При сжатии ситуация противоположная: значение полюса, соответствующего "прямой волне", уменьшается, значение полюса, соответствующего "обратной волне", увеличивается. Наибольшее изменение происходит при $\gamma = 0$; наименьшее – при $\gamma = \pi/2$. С определенного момента сжатие приводит к тому, что "прямой" и "обратный" полюсы сливаются, образуя двукратный, и затем становятся комплексными. Образуется "переходная зона" – диапазон частот, при которых "нерегулярная мода" на направлениях, примыкающих к $\gamma = 0$, исчезает. Дальнейшее увеличение деформации приводит сначала к увеличению раствора угла, внутри которого эта мода отсутствует, а затем к ее исчезновению на всех направлениях. На фиг. 1 видно, что сжатие, при данной деформации, привело к исчезновению "нерегулярной моды" во всех направлениях за исключением малой окрестности $\gamma = \pi/2$ (кривая 7).

Более детальное представление о влиянии начальной деформации на дисперсионные поверхности можно получить из фиг. 2 и 3, на которых изображены кривые сечений дисперсионных поверхностей плоскостями $\kappa_2 = 2,80; 2,81; 2,82$ и $2,83$ (кривые 0, 1, 2 и 3 на фиг. 2) при растяжении вдоль оси x_1 и плоскостями $\kappa_2 = 2,84; 2,85; 2,854$ и $2,86$ (кривые 0, 1, 2 и 3 на фиг. 3) при сжатии вдоль оси x_1 . Видно, что дисперсионные поверхности деформируются как за счет растяжения или сжатия (в зависимости от знака начальных напряжений) в плоскости $\kappa_2 = \text{const}$, так и за счет сдвига точек, их образующих, в сторону низких или высоких частот. Деформация происходит неравномерно: сильнее по оси, соосной направлению действия напряжений, слабее – в перпендикулярном направлении. В результате на дисперсионной поверхности образуется локальный минимум на оси α_1 (растяжение) или на оси α_2 (сжатие). Это обуславливает зарождение второй моды в окрестности оси α_1 на более низких частотах при

растяжении и в окрестности оси α_2 на более высоких частотах при сжатии. Отметим, что "переходная зона" – диапазон частот, при которых нерегулярная мода существует не на всех направлениях, при растяжении намного шире, чем при сжатии.

4. Исследование интегральной характеристики – реактивной силы, действующей на штамп со стороны среды, является эффективным методом для оценки НДС [5].

В качестве примера рассмотрим задачу о вертикальных колебаниях полосового штампа, занимающего область $|x_1| \leq a$, $|x_2| < \infty$ на поверхности преднапряженного слоя. Предположим, что трение в области контакта отсутствует. Задача сводится к решению интегрального уравнения вида:

$$f'_3(x'_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a'}^{a'} k_{33}(x'_i - \xi'_i) q'_3(\xi'_i) d\xi'_i, \quad |x'_i| \leq a' \quad (4.1)$$

$$k_{33}(t') = \int_{\Gamma} K_{33}(\alpha') e^{i\alpha' t'} d\alpha' \quad (4.2)$$

$$x'_i = x_i / h, \quad \xi'_i = \xi_i / h, \quad t' = t / h, \quad a' = a / h$$

$$f'_i = f_i / h, \quad \alpha' = \alpha h, \quad q'_i = q_i / \mu, \quad \rho' = \rho / \rho_0$$

$$\chi'_{ijkl} = \chi_{ijkl} / \mu, \quad \kappa_2 = (\rho_0 / \mu)^{1/2} \omega h$$

Функция $K_{33}(\alpha') = K_{33}(\alpha'_1, 0, 1, \kappa_2)$ описывается формулами (2.3)–(2.6) с соответствующими коэффициентами, либо формулами (2.13)–(2.16) в зависимости от вида напряженного состояния, ρ_0 и μ – плотность и модуль сдвига материала слоя в естественном состоянии. Далее штрихи опускаем.

Решение этого уравнения в случае $f_3(x_1) = \exp i\eta x_1$ имеет вид [9–11]:

$$q_\eta(x_1) = -R(\eta) e^{i\eta x_1} + q_\eta^+(a + x_1) + q_\eta^-(a - x_1) + O(e^{-2aB}) \quad (4.3)$$

$$R(\eta) = K(\eta)^{-1}, \quad q_\eta^\pm(t) = A^\pm e^{-Bt} (\pi t)^{-1/2} + R(\eta) \Phi(1, \pm\eta, t) e^{\pm i\eta(t-a)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^N [B_k^\pm e^{iz_k t} \Phi(1, z_k, t) + b_k^\pm e^{-iz_k t} (1 - \Phi(1, -z_k, t))] \quad (4.4)$$

$$\Phi(\alpha, z, t) = \operatorname{erf} \sqrt{\alpha(B + iz)t}$$

Более подробный вид функций $q_\eta^\pm(t)$, а также формулы для коэффициентов A^\pm , B_k^\pm и b_k^\pm можно найти в [9, 11].

Применяя к (4.3), (4.4) формулы операционного исчисления, получим амплитудное значение реакции среды

$$P_\eta = \int_{-a}^a q_\eta(x) dx = P_0 + P_1^+ + P_1^- + P_2^+ + P_2^- \quad (4.5)$$

$$P_0 = -2\eta^{-1} \sin a\eta R(\eta), \quad P_1^\pm = S_{0\eta}^\pm \Phi(2a, 0, 1) + S_\eta^\pm \Phi(2a, \pm\eta, 1)$$

$$P_2^\pm = \sum_{k=1}^N [S_{1k}^\pm \Phi(2a, z_k, 1) + S_{2k}^\pm \Phi(2a, -z_k, 1) + S_{0k}^\pm] \quad (4.6)$$

$$S_{0\eta}^\pm = B^{-1/2} A^\pm + S_\eta^\mp + \sum_{k=1}^N \zeta_k [B_k^\pm \xi(z_k) + b_k^\pm \xi(-z_k)]$$

$$S_\eta^\pm = \mp i\eta^{-1} R(\eta) e^{\pm i\eta a}, \quad S_{0k}^\pm = -\zeta_k b_k^\pm (1 - e^{-2iaz_k}), \quad S_{1k}^\pm = -\zeta_k B_k^\pm e^{2iaz_k}$$

$$S_{2k}^\pm = -\zeta_k b_k^\pm e^{-2iaz_k}, \quad \xi(z) = (1 + izB^{-1})^{1/2}, \quad \zeta_k = iz_k^{-1}$$

Формулы (4.5), (4.6) позволяют построить реакцию среды в случае произвольной функции $f_3(x_1)$ (форма основания штампа) [9, 14]:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\eta} F_3(\eta) d\eta, \quad f_3(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_3(\eta) e^{i\eta x} d\eta \quad (4.7)$$

Выражения (4.5)–(4.7) построены безотносительно к виду начального напряженного состояния, а также к свойствам материала среды, что позволяет проводить исследование влияния начальной деформации на динамику массивного штампа для любых материалов и различных видов напряженного состояния при произвольной форме основания штампа.

5. В случае штампа с плоским основанием в (4.5), (4.6) необходимо положить $\eta = 0$. Используя соотношения $S_{ik}^+ = S_{ik}^- = S_{ik}$, $B_k^+ = B_k^- = B_k$, $b_k^+ = b_k^- = b_k$, получим амплитудное значение реактивной силы, действующей на штамп со стороны среды

$$P = -2aR(0) + S_{00}\Phi(2a, 0, 1) + S_0 e^{-2aB} + 2 \sum_{k=1}^N [S_{1k}\Phi(2a, z_k, 1) + S_{2k}\Phi(2a, -z_k, 1) + S_{0k}] \quad (5.1)$$

Здесь $S_0 = 2(2a/B\pi)^{1/2}$

$$S_{00} = AB^{-1/2} + 4a - B^{-1} + 2 \sum_{k=1}^N \zeta_k [B_k \xi(z_k) + b_k \xi(-z_k)]$$

$$A = 2R(0)B^{-1/2} + 2\sqrt{B} \sum_{k=1}^N \left\{ -(z_k K_+(0) K'_+(-z_k) \xi(z_k))^{-1} - \right.$$

$$\left. - b_k \left[(B \xi(-z_k))^{-1} + K_+(z_k) \sum_{p=1}^N ((z_k + z_p) K'_+(-z_p) \xi(z_p))^{-1} \right] \right\}$$

Численный анализ, проведенный для ряда материалов (материал среды предполагался сжимаемым, первоначально изотропным, имеющим упругий потенциал Мурнагана [1, 2]), показал, что поведение реакции среды P в НДС имеет тот же качественный характер, что и в случае отсутствия начальных напряжений [6, 9]: она является вещественной в диапазоне изменения частоты $[0, \kappa_2^*]$, где κ_2^* – "частота запираания" слоя [6, 9] – первый корень уравнения

$$\cos \sigma_2 |_{\alpha=0} = 0 \quad (5.2)$$

что обусловлено отсутствием излучения из зоны контакта: слой ведет себя как пружина с жесткостью P . На более высоких частотах реакция среды является комплексной, при этом $\text{Re } P$ определяет реактивное сопротивление слоя – его жесткость воздействию штампа как пружины, $\text{Im } P$ определяет активное сопротивление слоя – излучение из зоны контакта. Поведение функций $\text{Re } P$ и $\text{Im } P$ существенным образом зависит от поведения полюсов и нулей функции $K_{33}(\alpha)$. На частотах выше κ_2^* $\text{Im } P \leq 0$, причем в ноль она обращается на "собственных частотах" [6, 9] колебаний слоя $\kappa_{2,k}^+$, которые определяются из уравнения

$$\cos \sigma_1 |_{\alpha=0} = 0 \quad (5.3)$$

$\text{Re } P$ является осциллирующей функцией частоты, что обусловлено периодическим изменением знака $\text{Re } P$ в точках $\kappa_{2,k}^+$ и $\kappa_{2,k}^-$. Последние находятся в окрестности частот, определяемых из уравнения

$$\sin \sigma_1 |_{\alpha=0} = 0 \quad (5.4)$$

Обозначим κ_k^0 значения σ_k при $\alpha = 0$ (κ_2^0 соответствует безразмерной частоте κ_2) в естественном состоянии среды, $\kappa_k^{(i)}$ – значения σ_k при $\alpha = 0$, соответствующие НДС-1, НДС-2, НДС-3, ($i = 1, 2, 3$ – соответственно). Из (2.10), (2.12), (2.17) следует

$$\begin{aligned} \kappa_1^{(1)} &= \kappa_2 \sqrt{\rho / \chi_{3333}}, & \kappa_2^{(1)} &= \kappa_2 \sqrt{\rho / \chi_{2112}}, & \kappa_3^{(1)} &= \kappa_2 \sqrt{\rho / \chi_{3113}} \\ \kappa_1^{(2)} &= \kappa_2 \sqrt{\rho / \chi_{1111}}, & \kappa_2^{(2)} &= \kappa_2 \sqrt{\rho / \chi_{3113}}, & \kappa_3^{(2)} &= \kappa_2 \sqrt{\rho / \chi_{1331}} \\ \kappa_1^{(3)} &= \kappa_2 \sqrt{\rho / \chi_{3333}}, & \kappa_2^{(3)} &= \kappa_3^{(3)} = \kappa_2 \sqrt{\rho / \chi_{3113}} \end{aligned}$$

В отсутствие начальных напряжений $\kappa_k^{(i)} = \kappa_k^0$. С учетом (5.2)–(5.4) заключаем, что значения κ_2^* , $\kappa_{2,k}^+$ и $\kappa_{2,k}^-$, которые характеризуют реакцию среды, зависят не только от величины, но и от вида напряженного состояния. Максимальное влияние на критическую частоту слоя κ_2^* оказывает НДС-1, при котором она возрастает. При НДС-3 κ_2^* также возрастает, но в меньшей степени. НДС-2 приводит к уменьшению κ_2^* по сравнению с естественным состоянием. Максимальное влияние на $\kappa_{2,0}^+$ оказывает НДС-3, при котором она значительно увеличивается. При НДС-1 и НДС-2 эта частота уменьшается.

Далее представлены результаты численного анализа, при проведении которого использовались параметры стали 09Г2С [2, 3] и следующие виды начального напряженного состояния (если специально не оговаривается): НДС-1 с $\nu_1 = 1,001$; НДС-2 с $\nu_2 = 1,001$; НДС-3 с $\nu_3 = 1,001$.

Предположим, что удлинения, сдвиги и повороты в НДС малы. Это предположение оправдано [2, 3] для широкого класса материалов, обладающих достаточной жесткостью. Ограничиваясь линейным приближением, запишем реакцию среды P (5.1) в виде

$$P = P_0 + P_1 \sigma_0 + O(\sigma_0^2), \quad P_0 = P|_{\sigma_0=0}, \quad P_1 = \partial P / \partial \sigma_0 |_{\sigma_0=0} \quad (5.5)$$

где $\sigma_0 \ll 1$ ($\sigma_0 = \sigma_{ii}^0$ – напряжение, действующее по оси x_i , которое реализует соответствующее преднапряженное состояние).

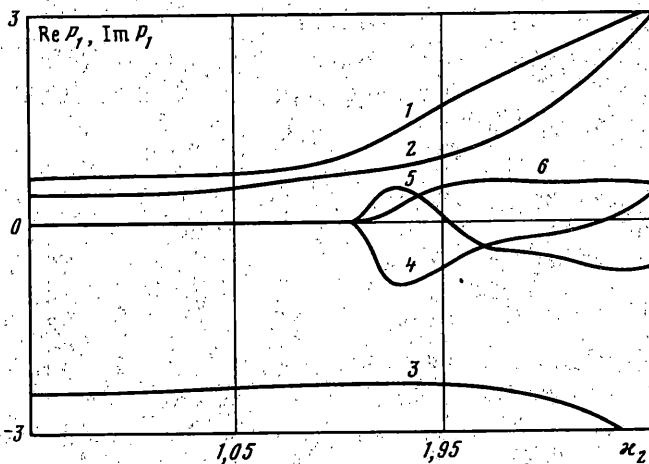
На фиг. 4 приведены графики функций $\text{Re } P_1$, $\text{Im } P_1$ при НДС-1 (кривые 1, 4), НДС-2 (кривые 2, 5) и НДС-3 (кривые 3, 6), причем значения для кривой 3 уменьшены в 10 раз, кривой 5 увеличены в 10 раз. Сравнивая линии 1, 2 и 3 и принимая во внимание механический смысл составляющих реакции среды, заключаем, что НДС-3 приводит к уменьшению жесткости слоя, в то время как НДС-1 и НДС-2 ее увеличивают. При этом влияние НДС-3 на порядок больше. Сравнивая линии 4, 5 и 6 заключаем, что излучение из зоны контакта под влиянием начальной деформации может уменьшаться или увеличиваться в зависимости от рассматриваемого диапазона частот. Ниже будет показано, что влияние начальной деформации на динамику штампа определенным образом зависит от отношения $\text{Im } P_1 / \text{Re } P_1$. В этом смысле выделяется НДС-1, при котором $\text{Im } P_1$ и $\text{Re } P_1$ соизмеримы, в то время как при НДС-2 и НДС-3 $\text{Re } P_1 \gg \text{Im } P_1$.

6. При исследовании вертикальных поступательных колебаний массивного штампа уравнения (1.1) принимают вид (в безразмерных параметрах):

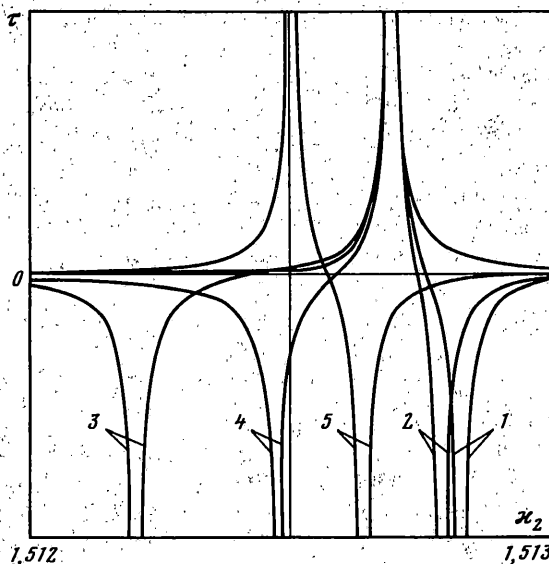
$$-m\kappa_2^2 w = F - R, \quad R = wP \quad (6.1)$$

где P – реакция среды (5.1) на перемещение штампа единичной амплитуды, m – безразмерная масса штампа. Из (6.1) следует

$$w = F(P - m\kappa_2^2)^{-1} \quad (6.2)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

С учетом особенностей поведения реакции среды P , можно выделить диапазоны частот с различными типами колебаний:

(1) низкочастотный диапазон $[0, \kappa_2^*]$, в котором при условии $m > P\kappa_2^{*-2}$ имеет место "изолированный" [9] резонанс;

(2) диапазон $[\kappa_2^*, \kappa_{2,0}^+]$ и диапазоны $[\kappa_{2,k}^-, \kappa_{2,k}^+]$, $k = 1, 2, \dots$, в которых $\text{Re } P > 0$. При условии $m = \kappa_2^{-2} \text{Re } P$ это обуславливает появление ограниченных резонансов III рода [9]. Особый интерес представляет интервал $[\kappa_2^*, \kappa_{2,0}^+]$, в котором резонанс является наиболее выраженным, поскольку $|\text{Im } P| \ll \text{Re } P$;

(3) диапазоны $[\kappa_{2,k}^+, \kappa_{2,k}^-]$, $k = 1, 2, \dots$, в которых реакция среды является комплексной с отрицательной вещественной частью. Возможность появления ограниченных резонансов отсутствует.

Далее остановимся на исследовании резонансных режимов колебаний штампа, при которых влияние начальной деформации на амплитуду его колебаний проявляется наиболее сильно. В качестве характеристики влияния НДС на динамику штампа рассмотрим величину $\tau = |w^*| - |w_0|$, где w_0 и w^* – амплитуды колебаний штампа в естественном и в преднапряженном состояниях.

В интервале частот $[0, \kappa_2^*]$ из выражения (6.2) следует, что влияние начальной деформации характеризуется частотами (в линейном приближении) $\kappa_+ = (P_0/m)^{1/2}$ и $\kappa_- = \kappa_+(1 + \sigma_0 P_1/2P_0)$, на которых функция τ достигает максимального A^+ и минимального A^- значений, а также частотой $\kappa_0 = \kappa_+(1 + \sigma_0 P_1/4P_0)$, на которой $\tau = 0$. Из выражений для κ_- и κ_0 следует, что любое изменение НДС приводит к сдвигу κ_- и κ_0 по отношению к κ_+ , причем сдвиг определяется знаком и величиной P_1 и пропорционален σ_0 .

Особенность влияния начальной деформации на амплитуду колебаний массивного штампа в низкочастотном диапазоне иллюстрируется графиками на фиг. 5, где приведены кривые τ для НДС-1, НДС-2 и НДС-3 (линии 1, 2 и 3), кривая 4 соответствует НДС-3 с $v_3 = 1,0005$, кривая 5 соответствует увеличенной массе тела при НДС-1. Видно, что каждая кривая состоит из двух резонансных пиков, один из которых определяется свойствами среды и массой штампа (кривые 1, 5). Центральная частота второго пика определяется видом (кривые 1, 2, 3) и величиной начальной деформации (кривые 3, 4). Из графиков следует, что в низкочастотном диапазоне (докритические частоты) любое изменение НДС существенным образом влияет на амплитуду колебаний массивного штампа. Максимальное влияние оказывает НДС-3, которое приводит к уменьшению резонансной частоты колебаний.

Рассмотрим следующий диапазон частот $[\kappa_2^*, \kappa_{2,0}^+]$, в котором $\text{Re } P_0 > 0$, $\text{Im } P_0 < 0$, причем $|\text{Im } P_0| \ll 1$. Введем $p_k = \text{Re } P_k$, $r_k = \text{Im } P_k$, где P_k ($k = 0, 1$) участвуют в представлении (5.5). В этом случае влияние начальной деформации на амплитуду колебаний массивного штампа характеризуется частотами κ_+ и κ_- , на которых τ достигает максимального A^+ и минимального A^- значений, а также частотой κ_0 , на которой $\tau = 0$. Последняя находится из уравнения

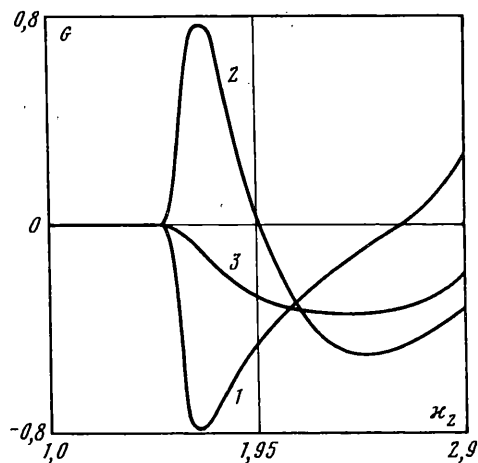
$$2(p_0 - m\kappa_0^2) + 2r_0 G + \sigma_0 p_1(1 + G^2) = 0 \quad (6.3)$$

где $G = r_1/p_1$ – функция частоты. Из (5.5) следует, что функция G определяется видом НДС и не зависит от величины начальной деформации. На фиг. 6 представлены кривые G для НДС-1, НДС-2 и НДС-3 (кривые 1, 2 и 3 соответственно). Причем значения кривых 2 и 3 увеличены в 10 раз. Из графиков следует, что в НДС-1 существуют области частот, в которых G принимает достаточно большие значения, т.е. влияние начальной деформации на излучение из зоны контакта и на жесткость слоя соизмеримы. При других НДС преобладает влияние начальной деформации на жесткость слоя. Такое различие в поведении функции G обуславливает специфику движения штампа при различных НДС. В частности, в НДС-1 частота κ_0 не зависит от величины начальных напряжений, т.е. их изменение не влияет на амплитуду колебаний штампа. Это объясняется тем, что решение уравнения (6.3) в этом случае (с точностью до σ_0^2) представимо в виде

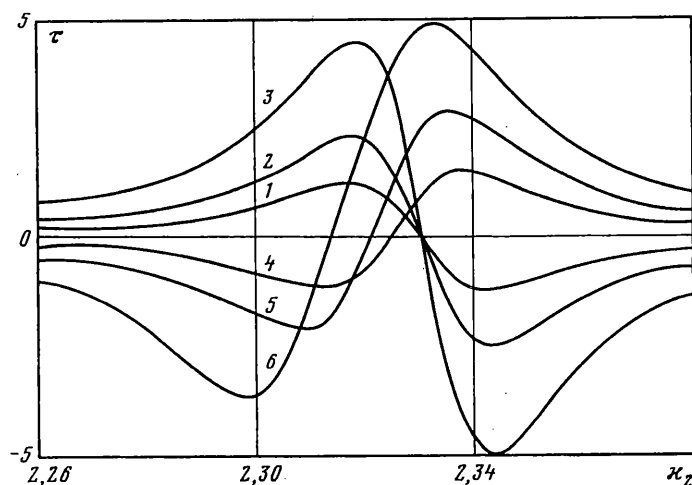
$$\kappa_0 = ([p_0 + r_0 G] / m)^{1/2}$$

В НДС-3 частота κ_0 зависит от величины начальных напряжений, поскольку в этом случае решение уравнения (6.3) (с точностью до σ_0^2) имеет вид

$$\kappa_0 = ([p_0 + \sigma_0 p_1 / 2 + r_0 G] / m)^{1/2}$$



Фиг. 6



Фиг. 7

На фиг. 7 представлены графики τ , рассчитанные для НДС-1 (кривые 1, 2, 3) и для НДС-3 (кривые 4, 5, 6) при $\nu_i = 1,001$ (кривые 1 и 4), при $\nu_i = 1,002$ (кривые 2 и 5) и при $\nu_i = 1,004$ (кривые 3 и 6) соответственно. Из графиков следует, что в рассматриваемом диапазоне частот изменение НДС также приводит к значительному изменению динамики массивного штампа, но, в отличие от рассмотренного выше случая докритических частот, при НДС-1 существует частота κ_0 , на которой амплитуда колебаний штампа не зависит от величины начальной деформации. При НДС-3 такая частота отсутствует.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-00580).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
3. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1986. Т. 1. 373 с.; Т. 2. 535 с.
4. *Калинчук В.В., Полякова И.Б.* О возбуждении волн в слое с начальными напряжениями // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 2. С. 320–326.
5. *Белянкова Т.И., Калинчук В.В.* Динамика массивного тела, взаимодействующего с предварительно напряженным полупространством // Изв. РАН МТГ. 1994. № 6. С. 83–94.
6. *Ворович Е.И., Пряхина О.Д., Тукодова О.М.* Динамические свойства упругой полуограниченной среды при наличии двух массивных штампов // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 1. С. 109–116.
7. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
8. *Белянкова Т.И., Калинчук В.В.* О взаимодействии осциллирующего штампа с предварительно напряженным полупространством // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 123–134.
9. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
10. *Бабешко В.А.* К теории пространственных контактных задач для анизотропных сред // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 2. С. 324–328.
11. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
12. *Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г.* Волны в слое с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1976. 103 с.
13. *Ватутьян А.О.* Контактная задача со сцеплением для анизотропного слоя // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 727–734.
14. *Крейн М.Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13. Вып. 5. С. 3–120.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
15.V.1996