МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1998

УДК 539.3

© 1998 г. И.А. СОЛДАТЕНКОВ

РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОМПОЗИЦИИ ПОЛОСА-ПОЛУПЛОСКОСТЬ ПРИ НАЛИЧИИ ИЗНАШИВАНИЯ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ОБЛАСТЬЮ КОНТАКТА

Контактные задачи при наличии изнашивания с изменяющейся областью контакта рассматривались ранее в [1–4]. Их решения строились либо для упрощенной модели Винклера деформируемого тела [1, 2], либо для их решения использовались численные методы [3, 4]. Ниже рассматривается изнашивание жесткого контртела о тонкую полосу Винклеровского типа, связанную с упругой полуплоскостью. Получены аналитические выражения для соответствующего решения и условия их справедливости.

В дальнейшем, штрих у символа функции означает ее производную по первому аргументу, тогда как точка – производную по второму аргументу.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим взаимодействие абсолютно жесткого, выпуклого и симметричного контртела *1* с упругой композицией полосы *2* и полуплоскости *3* (фигура). При действии на него постоянной удельной нормальной нагрузки P контртело скользит по границе полосы в перпендикулярном полуплоскости направлении и изнашивается со скоростью, пропорциональной контактному давлению p:

$$\frac{\partial w(x,\ t)}{\partial t}=\alpha p(x,\ t) \tag{1.1}$$

где w – линейный износ контртела, α – константа износостойкости. Изменяющийся по мере изнашивания размер a области контакта будем считать намного превосходящим ширину h полосы.

Задача состоит в определении эволюции контактного давления в процессе изнашивания. Дадим более точную формулировку этой задачи, для чего конкретизируем некоторые ее условия.

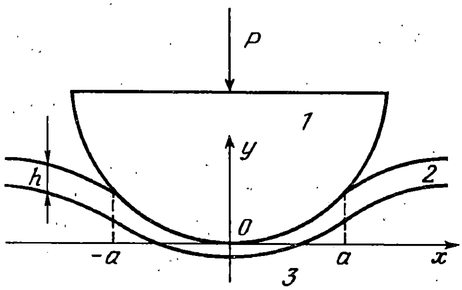
Свяжем с контртелом систему координат Oxy, как это показано на фигуре. Форму контртела до начала изнашивания будем описывать уравнением $y = g(x)$, в котором функция $g(x)$ – четная и

$$g(x)\in C^1(-\infty,\ \infty),\quad g(x)\geqslant 0 \tag{1.2}$$

Примем значение $t = 0$ за начало процесса изнашивания и обозначим $a_0 = a(0)$. Введем в рассмотрение скорость V изменения размера области контакта и наложим следующие ограничения на характер зависимости a от времени

$$a(t)\in C^1[0,\infty),\ V(t)\equiv da(t)/dt>0 \tag{1.3}$$

Неравенство (1.3) означает, что функция $a(t)$ является монотонно возрастающей и, поэтому, существует обратная к ней функция $t(a)$ также монотонно возрастающая. Другими словами, условие (1.3) обеспечивает существование взаимнооднозначного



соответствия между t и a, а это позволяет использовать величину a в качестве временного параметра вместо t, так что

$$t(a) = \int_{a_0}^{a} \frac{db}{V(b)}, \quad V(a) = V(t(a)) \tag{1.4}$$

При переходе от t к a равенство (1.1) приобретает следующий вид

$$\frac{\partial w(x,a)}{\partial a} = \frac{\alpha}{V(a)} p(x, a) \tag{1.5}$$

Для функции $w(x, a)$ имеют место условия

$$w(x, a_0) = 0, \ |x| \leqslant a_0; \ w(\pm a, a) = 0, \ a \geqslant a_0 \tag{1.6}$$

первое из которых отвечает отсутствию износа контртела при $t = 0$, а второе – отсутствию износа за пределами области контакта. Интегрируя (1.5) по a при условиях (1.6), получим

$$w(x, a) = \alpha \int_{\psi(x)}^{a} p(x, b) \frac{db}{V(b)}, \quad \psi(x) = \begin{cases} a_0, & |x| \leqslant a_0 \\ |x|, & |x| > a_0 \end{cases} \tag{1.7}$$

Отметим, что выражение (1.7) для $w(x, a)$ удовлетворяет равенствам (1.5) и (1.6).

Перейдем теперь к описанию контактного взаимодействия контртела с композицией полосы и полуплоскости, которые считаются жестко связанными друг с другом. Ввиду предполагаемой малости ширины h полосы по сравнению с размером a области контакта, ее упругая податливость вдоль оси y может быть описана моделью основания Винклера [5]. В этом случае общее упругое перемещение вдоль оси y верхней границы композиции полоса-полуплоскость слагается из упругого перемещения границы полуплоскости под действием контактного давления p и осадки полосы пропорциональной p. Соответствующее условие контакта тел будет иметь вид [4]:

$$Ap(x, a) + w(x, a) = g(a) - g(x) + r(x, a) \tag{1.8}$$

$$r(x, a) = (\hat{G}p)(x, a) \equiv \theta_2 \int_{-a}^{a} p(\xi, a) \ln\left|\frac{\xi - x}{\xi - a}\right| d\xi$$

$$A = \frac{(1 - 2\nu_1)(1 + \nu_1)h}{(1 - \nu_1)E_1}, \quad \theta_2 = \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi E_2}$$

Здесь $a \geqslant a_0$, $x \in [-a, a]$; E_i, ν_i – модуль Юнга и коэффициент Пуассона полосы ($i = 1$) и полуплоскости ($i = 2$), $\hat{G}$ – оператор.

Фигурирующая в (1.8) функция $w(x, a)$ определяется через $p(x, a)$ выражением (1.7) и поэтому (1.8) можно рассматривать как интегральное уравнение для $p(x, a)$. Кроме уравнения (1.8) функция $p(x, a)$ должна удовлетворять условию равновесия контртела

$$\int_{-a}^{a} p(x, a) dx = P \tag{1.9}$$

и, в силу симметрии задачи относительно оси y, быть четной по x:

$$p(x, a) = p(-x, a) \tag{1.10}$$

Начальный размер a_0 области контакта, а также исходное распределение $p_0(x)$ контактного давления находятся из равенств (1.8), (1.9) при $a = a_0$ и $w(x, a_0) = 0$.

Заметим, что из условий (1.6), (1.10) и уравнения (1.8) следует равенство нулю контактного давления на концах области контакта

$$p(\pm\, a, a) = 0 \tag{1.11}$$

В дальнейшем процесс изнашивания будем рассматривать на промежутке $a \in [a_0, a_*]$, причем выбор величины a_* пока ничем ограничивать не будем, кроме неравенства $a_0 < a_*$. Учитывая это, введем в рассмотрение множество Π_* определения функции $p(x, a)$, которое, очевидно, имеет вид:

$$\Pi_* = \{x,\ \ a : a \in [a_0,\ \ a_*],\ \ \ x \in [-a,\ \ a]\} \tag{1.12}$$

и потребуем, чтобы

$$p(x, a) \in C(\Pi_*) \tag{1.13}$$

Соотношения (1.7)–(1.10), (1.13) дают математическое описание рассматриваемой контактной задачи, состоящей в нахождении функции $p(x, a)$, заданной на множестве Π_* вида (1.12) и удовлетворяющей этим соотношениям. Кроме того, необходимо определить функцию $V(a)$, фигурирующую в (1.7) и позволяющую с помощью (1.4) перейти от a к реальному времени t. Относительно функции $V(a)$ будем предполагать, что (см. (1.3)):

$$V(a) \in C[a_0, a_*],\ V(a) > 0 \tag{1.14}$$

Прежде, чем приступить к решению поставленной задачи, преобразуем уравнение (1.8). А именно, заменим в левой части (1.8) функцию $p(x, a)$ на комбинацию $\alpha^{-1}V(a)\ \partial w(x, a)/\partial a$ согласно равенству (1.5) и, используя метод вариации постоянной, разрешим полученное дифференциальное уравнение относительно $w(x, a)$. В результате, обозначая $m = \alpha\varkappa$, $\varkappa = A^{-1}$, получим соотношение

$$w(x,\ \ a) = me^{-mt(a)} \int\limits_{\psi(x)}^{a} (g(b) - g(x) + r(x,\ \ b))e^{mt(b)} \frac{db}{V(b)}$$

дифференцируя которое по a и опять используя равенство (1.5), придем к искомому уравнению

$$p(x,\ \ a) = z(x,\ \ a) + \varkappa(\hat{H}r)(x,\ \ a) \tag{1.15}$$

$$(\hat{H}r)(x,\ \ a) = r(x,\ \ a) - me^{-mt(a)} \int\limits_{\psi(x)}^{a} r(x,\ \ b)e^{mt(b)} \frac{db}{V(b)} \tag{1.16}$$

$$z(x,\ \ a) = \varkappa(\hat{H}d)(x,\ \ a),\qquad d(x,\ \ a) = g(a) - g(x)$$

Отметим, что функция $r(x, a)$ в (1.15) определяется через $p(x, a)$: $r(x, a) = (\hat{G}p)(x, a)$, функция $d(x, a)$ известна, а оператор $\hat{H}$ в отличие от $\hat{G}$ зависит от функции $V(a)$, подлежащей определению.

Можно показать, что при заданной функции $V(a)$ любое решение $p(x, a)$ уравнения (1.15) удовлетворяет уравнению (1.8). На основании этого, в дальнейшем вместо (1.8) будет использоваться уравнение (1.15).

2. Решение уравнения для контактного давления. Возьмем произвольную функцию $V(a)$, удовлетворяющую соотношениям (1.14), определим с ее помощью оператор $\hat{H}$ и рассмотрим уравнение (1.15), которое запишем в следующем виде

$$p(x,\ \ a) = z(x,\ \ a) + (\hat{N}p)(x,\ \ a),\qquad \hat{N} = \varkappa\hat{H}\hat{G} \tag{2.1}$$

Получим выражение для контактного давления $p(x, a)$ через $V(a)$. В дальнейшем это выражение позволит найти и саму функцию $V(a)$. Принимая во внимание то, что

$p(x, a)$ ищется в пространстве $C(\Pi_*)$, введем в рассмотрение для произвольной функции $f(x, a)$ из $C(\Pi_*)$ норму:

$$\|f\| = \max_{x,a\in\Pi_*} |f(x,\ a)| \tag{2.2}$$

при этом отметим, что пространство $C(\Pi_*)$ является полным [6].

Фигурирующие в (2.1) операторы $\hat{G}$ и $\hat{H}$ обладают рядом свойств, справедливость которых проверяется достаточно просто. А именно, если выполняются соотношения (1.14) и $f(x, a) \in C(\Pi_*)$, то

$$(\hat{G}f)(x, a) \in C(\Pi_*),\ (\hat{H}f)(x, a) \in C(\Pi_*) \tag{2.3}$$

$$\left\|\hat{G}f\right\| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon / \varkappa\|f\|,\ \left\|\hat{H}f\right\| \leqslant 2\|f\|,\ \varepsilon = 2\varkappa\theta_2 a_* \ln 25$$

Другими словами, операторы $\hat{G}$ и $\hat{H}$ отображают пространство $C(\Pi_*)$ в себя и являются ограниченными [7]. С учетом определения оператора $\hat{N}$, из (2.3) легко получается

Утверждение 1. Если имеет место (1.14) и $f(x, a) \in C(\Pi_*)$, то

$(\hat{N}f)(x, a) \in C(\Pi_*)$, $\|\hat{N}f\| \leqslant \varepsilon\|f\|$

Неравенство из утверждения 1 означает, что, при условии

$$\varepsilon \equiv 2\varkappa\theta_2 a_* \ln 25 < 1 \tag{2.4}$$

оператор $\hat{N}$ является сжимающим (по метрике $\rho(f_1, f_2) = \|f_2 - f_1\|$) в полном пространстве $C(\Pi_*)$ и, поэтому, для решения уравнения (2.1) относительно $p(x, a)$ правомерным является использование метода последовательных приближений [7]. В результате можно получить следующее выражение для $p(x, a)$:

$$p(x,\ a) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x,\ a) \in C(\Pi_*),\quad \varphi_k(x,\ a) = (\hat{N}^k z)(x,\ a) \tag{2.5}$$

при этом равенства (1.10) и (1.11), как нетрудно проверить, выполняются.

Установим свойства дифференцируемости по x и a полученного выражения (2.5). Для этого обозначим через $C^1(\Pi_*)$ пространство функций $f(x, a)$ непрерывных на Π_* вместе со своими производными $f'(x, a), \dot{f}(x, a)$. Кроме того, введем в рассмотрение оператор $\hat{G}_0$:

$$(\hat{G}_0 f)(x,\ a) = \theta_2 \int_{-a}^{a} f(\xi,\ a) \ln\left|\frac{\xi - x}{a}\right| d\xi \tag{2.6}$$

для которого справедливы соотношения

$$(\hat{G}_0 f)(x,\ a) \in C(\Pi_*),\qquad \left\|\hat{G}_0 f\right\| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon / \varkappa\|f\| \tag{2.7}$$

при $f(x, a) \in C(\Pi_*)$.

Имеют место следующие утверждения. Их доказательства могут быть получены исходя из определений (1.8), (1.16), (2.6) операторов $\hat{G}, \hat{H}, \hat{G}_0$.

Утверждение 2. Если $f_1(x,\ a) \in C^1(\Pi_*)$, $f_1(\pm a,\ a) = 0$, $f_2(x,\ a) = (\hat{G}f_1)(x,\ a)$, то $f_2(x,a) \in C^1(\Pi_*)$ и $f_2'(x,\ a) = (\hat{G}_0 f_1')(x,\ a)$, $\dot{f}_2(x,\ a) = (\hat{G}\dot{f}_1)(x,\ a) - (\hat{G}_0 f_1')(a,\ a)$

Утверждение 3. Если $f_1(x,\ a) \in C^1(\Pi_*)$, $f_1(\pm a,\ a) = 0$, $f_2(x,\ a) = \varkappa(\hat{H}f_1)(x,\ a)$, то при условии (1.14): $f_2(x,\ a) \in C^1(\Pi_*)$ и $f_2'(x,\ a) = \varkappa(\hat{H}f_1')(x,\ a)$, $\dot{f}_2(x,a) = \varkappa\dot{f}_1(x,\ a) - \dfrac{m}{V(a)} f_1(x,\ a)$

Основываясь на этих утверждениях и используя метод математической индукции, можно доказать, что при условиях (1.2) и (1.14) функции $\varphi_k(x, a)$ из выражения (2.5) обладают следующими свойствами

$$\varphi_k(x, a) \in C^1(\Pi_*) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.8}$$

$$\|\varphi_k\| \leqslant 2\varkappa g_* \varepsilon^k, \quad \|\varphi_k'\| \leqslant 2\varkappa g_*' \varepsilon^k, \quad \|\dot{\varphi}_k\| \leqslant (1+k) D \varepsilon^k$$

$$g_* \equiv \|g\| = g(a_*), \quad g_*' = \|g'\|, \quad D = 2\varkappa(m\|V^{-1}\|g_* + g_*') \tag{2.9}$$

Соотношения (2.8) позволяют доказать теорему, устанавливающую свойства дифференцируемости функции $p(x, a)$ вида (2.5).

Теорема 1. Если имеет место неравенство (2.4), то $p(x, a) \in C^1(\Pi_*)$, причем

$$p'(x, a) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k'(x, a), \quad \dot{p}(x, a) = \sum_{k=0}^{\infty} \dot{\varphi}_k(x, a) \tag{2.10}$$

Доказательство. В силу (2.8) слагаемые рядов (2.10) мажорируются произведениями $2\varkappa g'_* \varepsilon^k$ и $(1 + k)D\varepsilon^k$, соответственно, суммы которых по k от 0 до ∞ сходятся при $\varepsilon < 1$. По признаку Вейерштрасса это означает, что ряды (2.10) сходятся равномерно на Π_* [6]. Кроме того, согласно (2.8) функции $\varphi_k(x, a)$ и их производные по x и a непрерывны на Π_*. Таким образом, условия [6], обеспечивающие возможность почленного дифференцирования функционального ряда (2.5) и непрерывность получаемого в результате ряда оказываются выполненными. Теорема доказана.

3. Определение скорости возрастания размера области контакта.

3.1. Полученное в предыдущем разделе выражение (2.5) для $p(x, a)$ содержит единственную неизвестную зависимость от a скорости V возрастания размера области контакта. Найдем эту функцию, при этом для удобства изложения введем обозначение: $B(a) = V^{-1}(a)$ и отметим, что функция $B(a)$, в силу (1.14), обладает следущими свойствами:

$$B(a) \equiv \frac{1}{V(a)} \in C[a_0, a_*], \quad B(a) > 0 \tag{3.1}$$

Для определения $B(a)$ воспользуемся условием равновесия (1.9). Дифференцируя его по a и принимая во внимание условие (1.11) и то, что $P = \text{const}$, получим соотношение

$$\int_{-a}^{a} \dot{p}(x, a)dx = 0 \tag{3.2}$$

Фигурирующая в (3.2) производная $\dot{p}(x, a)$ может быть выражена через функции $p(x, a)$, $B(a)$, $g'(a)$, $\dot{r}(x, a)$ с помощью равенства (1.8), если последнее продифференцировать по a и учесть (1.5). В результате такого преобразования соотношению (3.2) можно придать следующий вид

$$B(a) = \frac{1}{\alpha P}[2ag'(a) + \int_{-a}^{a} \dot{r}(x, a)dx] \equiv (\hat{R}B)(a) \tag{3.3}$$

Правая часть (3.3) содержит известную зависимость $g'(a)$ и функцию $r(x, a) = (\hat{G}p)(x, a)$, причем $p(x, a)$ определяется, согласно (2.5), функцией $B(a)$. Таким образом, правая часть (3.3) зависит от единственной неизвестной функции $B(a)$, что позволяет рассматривать (3.3) как уравнение для $B(a)$ и ввести в рассмотрение оператор $\hat{R}$, определяемый (3.3).

3.2. Основываясь на (3.3), дадим для $B(a)$ оценку снизу, что позволит получить условие выполнения неравенства из (3.1). Для этого наложим дополнительное ограничение на функцию $g(x)$, а именно, будем считать, что ее производная $g'(x)$ является возрастающий функцией при $x \geqslant 0$. Кроме того, для произвольного $a_1 \in [a_0, a_*]$ введем в рассмотрение норму

$$\|f\|_1 = \max_{x,a \in \Pi_1} |f(x, a)|, \quad \Pi_1 = \{x, \ a : a \in [a_0, \ a_1], \quad x \in [-a, \ a]\}$$

В частности, при $a_1 = a_*$ имеем $\Pi_1 = \Pi_*$ и $\|f\|_1 = \|f\|$.

В силу произвольности выбора величины a_* в неравенствах (2.3) и (2.8), последние, очевидно, будут справедливы и для нормы $\|f\|_1$, при этом параметр ε в них следует заменить на $\varepsilon_1 = \varepsilon a_1/a_* \leqslant \varepsilon$, а величины g_*, g'_* соответственно на $g_1 = \|g\|_1 = g(a_1)$, $g'_1 = \|g'\|_1$. Неравенства (2.3) и (2.8) в таком виде позволяют с помощью утверждения 2 и выражения (2.5) получить следующую оценку для функции $\dot{r}(x, a)$ из (3.3):

$$\|\dot{r}\|_1 \leqslant \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} g_1'(1+U_1)\left(1-\frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}U_1\right)^{-1} \tag{3.4}$$

$$U_1 = \varkappa_1 a_1 g P^{-1}, \quad a_1 \in [a_0, \ a_*]$$

Положим теперь $a = a_1$ в уравнении (3.3) и заменим в нем $\dot{r}(x, a)$ на $-\|\dot{r}\|_1$. В результате, с учетом (3.4), придем к неравенству

$$B(a_1) \geqslant \frac{1}{\alpha P}[2a_1 g'(a_1) - 2a_1\|\dot{r}\|_1] \tag{3.5}$$

в котором величина $g'(a_1)$ совпадает с g'_1 в силу предполагаемого возрастания по $x \geqslant 0$ функции $g'(x)$. Учитывая это обстоятельство и подставляя (3.4) в (3.5), получим искомую оценку для $B(a)$ при $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$B(a_1) \geqslant \frac{2a_1 g_1'}{\alpha P}\left(1-\frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}(1+2U_1)\right)\left(1-\frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}U_1\right)^{-1}$$

из которой сразу вытекает условие, обеспечивающее выполнение неравенства $B(a) > 0$ из (3.1) при $a \in [a_0, a_*]$:

$$\frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}(1+2U_*) < 1, \quad U_* = \varkappa a_* g_* P^{-1} \tag{3.6}$$

Если учесть, что функция $f(\varepsilon) = \varepsilon(1-\varepsilon)^{-2}$ монотонно возрастает по $\varepsilon \in (0, 1)$, то условие (3.6) можно представить в следующем виде

$$\varepsilon \in (0, \ \varepsilon_+), \quad \varepsilon_+ = 2(1+U_*) - \sqrt{4(1+U_*)^2 - 1} \tag{3.7}$$

причем $\varepsilon_+ \in (0, 1)$.

3.3. Приступим теперь к решению уравнения (3.3), которое является нелинейным относительно неизвестной функции $B(a)$. Принимая во внимание (3.1), решение $B(a)$ будем искать в пространстве $C[a_0, a_*]$. Воспользуемся для этого следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть оператор $\hat{R}$ отображает пространство $C[a_0, a_*]$ в себя. Тогда, для произвольной функции $B_0(a) \in C[a_0, a_*]$, построенная по правилу

$$B_{k+1}(a) = (\hat{R}B_k)(a) \tag{3.8}$$

последовательность $\{B_k(a)\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ является фундаментальной, если выполнены следующие условия:

(a) существует функция $q(X, Y)$, возрастающая по X и Y такая, что

$$\left\|\hat{R}B_{k+1} - \hat{R}B_k\right\| \leqslant q(\|B_k\|, \|B_{k+1} - B_k\|)\|B_{k+1} - B_k\| \ (k = 0,1,2,\ldots) \tag{3.9}$$

(*б*) уравнение

$$q(\|B_0\| + \|B_1 - B_0\|(1-\lambda)^{-1},\ \|B_1 - B_0\|) = \lambda \tag{3.10}$$

имеет решение $\lambda \in [0, 1)$.

Доказательство. Введем обозначение: $\delta_k = \| B_{k+1} - B_k \|$ и покажем, что при условиях а) и б) справедлива система неравенств

$$\delta_k \leqslant \lambda\delta_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda^k\delta_0 < \delta_0,\ \ \lambda \in [0, 1)\ \ (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.11}$$

Воспользуемся для этого методом математической индукции.

Возьмем $k = 1$ и запишем, используя условия (*а*) и (*б*):

$$\delta_1 \equiv \|B_2 - B_1\| = \|\hat{R}B_1 - \hat{R}B_0\| \leqslant q(\|B_0\|, \delta_0)\delta_0 \leqslant$$

$$\leqslant q(\|B_0\| + \delta_0(1-\lambda)^{-1}, \delta_0)\delta_0 = \lambda\delta_0$$

откуда получаем

$$\delta_1 \leqslant \lambda\delta_0 < \delta_0,\ \ \lambda \in [0, 1)$$

т.е. неравенства (3.11) при $k = 1$.

Возьмем теперь некоторое $i > 1$ и предположим, что при $k = i$ неравенства (3.11) выполняются. Установим, что из этого предположения следует справедливость неравенств (3.11) при $k = i + 1$, а, следовательно, по принципу математической индукции и при любом $k \geqslant 1$. Используя условие а), запишем соотношения

$$\delta_{i+1} \equiv \|B_{i+2} - B_{i+1}\| = \|\hat{R}B_{i+1} - \hat{R}B_i\| \leqslant q(\|B_i\|, \delta_i)\delta_i \tag{3.12}$$

для величины $\| B_i \|$, в которых, если учесть неравенства (3.11) при $k = i$, можно получить

$$\|B_i\| = \|B_i - B_{i-1} + B_{i-1} - B_{i+2} + \ldots - B_0 + B_0\| \leqslant$$

$$\leqslant \delta_{i-1} + \delta_{i-2} + \ldots + \delta_0 + \|B_0\| \leqslant \|B_0\| + \delta_0(1 + \lambda + \ldots + \lambda^{i-1}) \leqslant \|B_0\| + \delta_0(1-\lambda)^{-1} \tag{3.13}$$

Кроме того, из (3.11) при $k = i$ имеем

$$\delta_i \leqslant \delta_0 \tag{3.14}$$

Заменим правыми частями неравенств (3.13) и (3.14) аргументы $\| B_i \|$ и δ_i функции $q(X, Y)$ в (3.12), учтем, что $q(X, Y)$ возрастает по X и Y, а также примем во внимание равенство (3.10). Тогда цепочку соотношений (3.12) можно продолжить следующим образом

$$\delta_{i+1} \leqslant q(\|B_i\|, \delta_i)\delta_i \leqslant q(\|B_0\| + \delta_0(1-\lambda)^{-1}, \delta_0)\delta_i = \lambda\delta_i,\ \ \lambda \in [0,1)$$

и в результате получить неравенство $\delta_{i+1} \leqslant \lambda\delta_i$, которое совместно с неравенствами (3.11) при $k = i$ обеспечивает справедливость (3.11) при $k = i + 1$.

Основываясь на неравенствах (3.11), для произвольных целых $M > 0$, i, k таких, что $M < i < k$, можно записать соотношения

$$\|B_k - B_i\| = \|B_k - B_{k-1} + B_{k-1} - B_{k-2} + \ldots + B_{i+1} - B_i\| \leqslant$$

$$\leqslant \delta_{k-1} + \delta_{k-2} + \ldots + \delta_i \leqslant \delta_0\lambda^i(1 + \lambda + \ldots + \lambda^{k-i-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \delta_0\lambda^M(1-\lambda)^{-1} \to 0 \ \text{ при } \ M \to \infty$$

которые означают, что последовательность $\{B_k(a)\}$ является фундаментальной [7]. Теорема доказана.

Замечание 1. Если $q(X, Y) = \text{const} \in [0, 1)$, то решение $\lambda \in [0, 1)$ уравнения (3.10) существует всегда: $\lambda = q$. В этом случае условия Теоремы 2 сводятся к классическим условиям, обеспечивающим свойство фундаментальности последовательности (3.8) [7].

Построим последовательность (3.8), используя оператор $\hat{R}$ вида (3.3) и полагая $B_0(a) \equiv 0$. Проверим для этой последовательности выполнение условий теоремы 2.

Прежде всего, исходя из определения оператора $\hat{R}$ и равенств (2.10) несложно установить, что $\hat{R}$ отображает $C[a_0, a_*]$ в себя.

Далее, в результате достаточно громоздких, но простых выкладок, основанных на выражениях (2.5), (2.10), (3.3), можно установить, что при условии

$$\varepsilon\omega(s(\|f_1\| + \|f_2 - f_1\|)) < 1, \quad \omega(\xi) = 1 + \xi e^{\xi}, \quad s = m(a_* - a_0) \tag{3.15}$$

для произвольных $f_i(a) \in C[a_0, a_*]$, $i = 1, 2$ оказывается справедливым неравенство

$$\|\hat{R}f_2 - \hat{R}f_1\| \leqslant q(\|f_1\|, \|f_2 - f_1\|)\|f_2 - f_1\| \tag{3.16}$$

Функция $q(X, Y)$ в (3.16) возрастает по X, Y и имеет вид

$$q(X, Y) = \frac{2\varkappa a_*\varepsilon}{mP(1-\varepsilon)^2[1 - \varepsilon\omega(s(X+Y))]^2} \times$$

$$\times\left\{mg_* + se^{sX}[1 + 2s(X+Y)\Lambda(2sY)][mg_*(X+Y) + g_*']\right\}$$

$$\Lambda(\xi) = (e^{\xi} - 1)/\xi \tag{3.17}$$

Отметим, что условие (3.15) исключает равенство нулю знаменателя в выражении (3.17) для $q(X, Y)$ при $\varepsilon \in (0, 1)$.

Возьмем в качестве функций $f_1(a), f_2(a)$ в (3.15) и (3.16) элементы $B_k(a)$, $B_{k+1}(a)$ последовательности (3.8). В результате получим неравенство (3.9) из теоремы 2 с функцией $q(X, Y)$ вида (3.17) и следующее условие справедливости этого неравенства

$$\varepsilon\omega(s(\|B_k\| + \delta_k)) < 1, \quad \delta_k = \|B_{k+1} - B_k\| \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.18}$$

Ниже будет получено более общее условие, обеспечивающее справедливость неравенства (3.18) при любом k.

Перейдем теперь к проверке выполнения условия б) теоремы 2 для $q(X, Y)$ вида (3.17). При этом отметим, что, в силу равенства $B_0(a) \equiv 0$, уравнение (3.10) будет иметь вид

$$q(\| B_1 \|(1 - \lambda)^{-1}, \| B_1 \|) = \lambda \tag{3.19}$$

Сузим область поиска корня $\lambda \in [0, 1)$ уравнения (3.19), наложив следующее ограничение на значения λ:

$$\varepsilon\omega\left(s\left(\frac{2-\lambda}{1-\lambda}\|B_1\|\right)\right) < 1 \tag{3.20}$$

Это условие, в силу определения (3.17) функции $q(X, Y)$, исключает равенство нулю знаменателя в выражении для левой части (3.19) и, следовательно, обеспечивает ее существование при всех значениях λ, ε, удовлетворяющих (3.20).

Неравенство (3.20) содержит неизвестную величину $\| B_1 \|$. Если воспользоваться соотношениями (2.5), (2.8), (2.10) и тем, что $B_1(a) = (\hat{R}B_0)(a)$, $B_0(a) \equiv 0$, то для $\| B_1 \|$ нетрудно получить оценку

$$\|B_1\| \leqslant \beta_1(\varepsilon) \equiv \frac{2a_*g_*'}{\alpha P}\left(1 + \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}\right) \tag{3.21}$$

с помощью которой неравенство (3.20) можно усилить следующим образом:

$$\varepsilon l(\lambda, \varepsilon) < 1, \;\; l(\lambda, \varepsilon) = \omega\left(\frac{2s\beta_1(\varepsilon)}{1-\lambda}\right) \tag{3.22}$$

Очевидно, что при выполнении (3.22) неравенство (3.20) также выполняется.

Несложный анализ показывает, что множество значений λ и ε, удовлетворяющих неравенству (3.22), имеет вид:

$$\Omega = \{\lambda, \varepsilon \colon \varepsilon \in (0, \varepsilon_m), \;\; \lambda \in [0, \lambda_0(\varepsilon))\} \tag{3.23}$$

где ε_m определяется единственным образом из уравнения $\varepsilon_m l(0, \varepsilon_m) = 1$, $\varepsilon_m \in (0, 1)$. Функция $\lambda_0(\varepsilon)$ также единственным образом находится из уравнения $\varepsilon l(\lambda_0(\varepsilon), \varepsilon) = 1$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m)$, является непрерывной и монотонно убывающей по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m)$, причем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_0(\varepsilon) = 1, \quad \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_m} \lambda_0(\varepsilon) = 0$$

При условии (3.22) имеет место следующая оценка для левой части уравнения (3.19):

$$q(\|B_1\|(1-\lambda)^{-1}, \|B_1\|) < h(\lambda, \varepsilon), \quad \lambda, \varepsilon \in \Omega \tag{3.24}$$

$$h(\lambda, \varepsilon) = \frac{2\varkappa a_* \varepsilon}{mP(1-\varepsilon)^2(1-\varepsilon l(\lambda, \varepsilon))^2}\left\{mg_* + s\exp\left(\frac{s\beta_1(\varepsilon)}{1-\lambda}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[1+\frac{4s\beta_1(\varepsilon)}{1-\lambda}\Lambda(2s\beta_1(\varepsilon))\right]\left[\frac{2\beta_1(\varepsilon)}{1-\lambda}mg_* + g'_*\right]\right\} \tag{3.25}$$

Доказываемое ниже утверждение позволяет на основе неравенства (3.24) установить существование решения $\lambda \in [0, 1)$ уравнения (3.19) для функции $q(X, Y)$ вида (3.17).

Утверждение 3. Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m)$ и справедливо неравенство (3.24). Тогда, если уравнение $h(\lambda, \varepsilon) = \lambda$ имеет решение $\lambda_h \in (0, \lambda_0(\varepsilon))$, то уравнение (3.19) (при (3.17)) также имеет решение λ_q, причем $\lambda_q \in (0, \lambda_h)$.

Доказательство. Возьмем некоторое $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m)$ и обозначим $\Phi(\lambda) = q(\| B_1 \| \times (1-\lambda)^{-1}, \| B_1 \|) - \lambda$, полагая $\lambda \in [0, \lambda_0(\varepsilon))$. Функция $\Phi(\lambda)$ обладает следующими свойствами.

Во-первых, имеем $\Phi(0) = q(\| B_1 \|, \| B_1 \|) > 0$, а также с учетом (3.24) $\Phi(\lambda_h) < h(\lambda_h, \varepsilon) - \lambda_h = 0$. Таким образом, для $\Phi(\lambda)$ справедливы неравенства

$$\Phi(0) > 0, \quad \Phi(\lambda_h) < 0 \tag{3.26}$$

Далее, при $\lambda \in [0, \lambda_0(\varepsilon))$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m)$ значения λ, ε лежат в области Ω вида (3.23), что обеспечивает выполнение неравенства (3.22) и, следовательно, неравенства (3.20), при котором выражение для левой части уравнения (3.19) непрерывно зависит от λ. Отсюда получаем

$$\Phi(\lambda) \in C[0, \lambda_0(\varepsilon)) \tag{3.27}$$

При условии, что $\lambda_h \in (0, \lambda_0(\varepsilon))$, из соотношений (3.26) и (3.27) следует существование корня $\lambda_q \in (0, \lambda_h)$ уравнения $\Phi(\lambda) = 0$, а следовательно и уравнения (3.19) [6]. Утверждение доказано.

Используя явное выражение (3.25) для $h(\lambda, \varepsilon)$ и вышеуказанные свойства функции $\lambda_0(\varepsilon)$, определяющей область Ω, нетрудно установить, что при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m)$ уравнение $h(\lambda, \varepsilon) = \lambda$ имеет решение, лежащее в интервале $(0, \lambda_0(\varepsilon))$. Согласно утверждению 3, это обеспечивает существование корня $\lambda \in (0, \lambda_0(\varepsilon)) \in [0, 1)$ уравнения (3.19) и означает выполнение условия б) теоремы 2.

Вернемся теперь к условию (3.18), которое обеспечивает справедливость неравенства (3.9) для рассматриваемой последовательности $\{B_k(a)\}$, $B_0(a) \equiv 0$. Преобразуем это неравенство, для чего оценим сумму $\| B_k \| + \delta_k$. Учитывая справедливость условия (3.18) при $k = 0$ (это непосредственно следует из (3.20) и равенства $B_0(a) \equiv 0$) и соотношения (3.9), (3.10) при $k = 0$, нетрудно получить неравенство (см. доказательство теоремы 2): $\delta_1 \leqslant \lambda\delta_0$. Можно убедиться, используя оценки типа (3.13) из теоремы 2 и условие (3.20), что последнее неравенство обеспечивает справедливость условия (3.18) при $k = 1$. Продолжая вышеизложенные рассуждения последовательно для значений $k = 1, 2, 3, \ldots$, можно получить $\| B_k \| + \delta_k \leqslant \| B_1 \|(2-\lambda)(1-\lambda)^{-1}$, $k = 0, 1, \ldots$, откуда, с помощью неравенства (3.21), имеем искомую оценку: $\| B_k \| + \delta_k \leqslant 2\beta_1(\varepsilon)(1-\lambda)^{-1}$, где λ есть корень уравнения (3.19). Сравнивая выражение в правой части последнего неравенства с аргументом функции $\omega(X)$ в (3.22), приходим к выводу о том, что условие (3.22) обеспечивает выполнение неравенства (3.18) при любом $k \geqslant 0$.

Подведем итог вышесказанному. При каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m)$ уравнение (3.19) имеет корень $\lambda \in (0, \lambda_0(\varepsilon))$, причем, т.к. соответствующая точка λ, ε лежит в области Ω вида (3.23), то условие (3.22) и, следовательно, (3.18), выполняются. Как указывалось выше, это обеспечивает выполнение неравенства (3.9), т.е. условия а) теоремы 2.

Таким образом, для выполнения условий теоремы 2 в отношении рассматриваемой последовательности $\{B_k(a)\}$ вида (3.8) при $B_0(a) \equiv 0$, достаточно, чтобы $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m)$. При этом условии $\{B_k(a)\}$ является фундаментальной и, в силу полноты пространства $C[a_0, a_*]$ и того, что $B_k(a) \in C[a_0, a_*]$, сходится к некоторой функции $B(a) \in C[a_0, a_*]$ [7]. Учитывая определение (3.8) последовательности $\{B_k(a)\}$ и равенство $B_0(a) \equiv 0$, эту предельную функцию можно записать в следующем виде:

$$B(a) = \lim_{k\to\infty} B_k(a), \quad B_k(a) = (\hat{R}^k 0)(a) \tag{3.28}$$

Утверждение 4. Функция $B(a)$ вида (3.28) удовлетворяет уравнению (3.3) при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m)$.

Доказательство. Как указывалось выше, если $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m)$, то найдется корень λ уравнения (3.19) такой, что пара значений λ, ε лежит в Ω и удовлетворяет условию (3.22). Пользуясь оценками типа (3.13) из теоремы 2, основанными на существовании такого корня λ, нетрудно установить справедливость условия (3.15) при $f_1(a) = B(a)$ и $f_2(a) = B_k(a)$ для любого $k \geqslant 0$. При этом условии имеет место неравенство (3.16) и, следовательно, можно записать соотношения $\| B_{k+1} - \hat{R}B \| = \| \hat{R}B_k - \hat{R}B \| \leqslant$ $\leqslant q(\| B \|, \| B_k - B \|)\| B_k - B \|$, правая часть которых, и тем более левая, стремится к 0 при $k \to \infty$, в силу первого равенства (3.28) и свойства возрастания функции $q(X, Y)$ по Y. Таким образом, при $k \to \infty$ имеем $B_{k+1} \to \hat{R}B$. С другой стороны, согласно (3.28) справедливо соотношение $B_{k+1} \to B$ при $k \to \infty$, сравнивая которое с предыдущим, получаем $B = \hat{R}B$. Утверждение доказано.

Выше были получены условие (2.4), обеспечивающее правомерность выражения (2.5) для $p(x, a)$, и условие (3.7) положительности функции $B(a) = V^{-1}(a)$. Совмещая их с условием $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m)$, получим следующее соотношение

$$\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}), \quad \bar{\varepsilon} = \min[\varepsilon_m, \varepsilon_+] < 1 \tag{3.29}$$

при выполнении которого выражения (2.5) и (3.28) дают решение поставленной в п. 1 задачи.

Замечание 2. Фигурирующие в (3.29) величины ε_m и ε_+ определяются равенствами $\varepsilon_m l(0, \varepsilon_m) = 1$ и (3.7). Если ввести параметры

$$n_1 = \frac{4\varkappa(a_* - a_0)a_* g'_*}{P} \in (0, \infty), \quad n_2 = \frac{\varkappa a_* g_*}{P} \in (0, \infty) \tag{3.30}$$

то нетрудно установить, что ε_m зависит только от n_1, а ε_+ – только от n_2:

$$\varepsilon_m = f_1(n_1), \quad \varepsilon_+ = f_2(n_2) \tag{3.31}$$

причем функции $f_1(X), f_2(X)$ являются монотонно убывающими до 0 при $X \to \infty$, $f_1(0) = 1, f_2(0) = 2 - \sqrt{3}$. Зависимости (3.31) позволяют анализировать влияние исходных параметров задачи на величины ε_m, ε_+ и, следовательно, на выполнение условия (3.29).

В частности, из (3.30) и (3.31) следует, что ε_m и ε_+ не зависят от констант износостойкости полосы (α) и упругости полуплоскости (θ_2). Более того, от α не зависит и величина $\varepsilon = 2\varkappa\theta_2 a_* \ln 25$, фигурирующая в (3.29). Таким образом, оказывается, что константа износостойкости α не влияет на выполнение условия (3.29) правомерности выражений (2.5) и (3.28).

Зависимости (3.31) совместно с условиями (3.29) накладывают ограничения на выбор величины a_* верхнего предела временной переменной a. Действительно, как это следует из (3.30) и вышеуказанных свойств функций $f_1(X), f_2(X)$ из (3.31), величина a_* оказывает влияние на ε_m и ε_+, а следовательно, и на значение $\bar{\varepsilon}$ в (3.29). При увеличении a_* происходит сужение промежутка $(0, \bar{\varepsilon})$ в (3.29), поэтому, чем больше берется a_*, тем более жесткие ограничения следует накладывать на исходные параметры задачи.

Замечание 3. Сделанный выше выбор $B_0(a) \equiv 0$ не является необходимым – построение решения уравнения (3.3) на основе теоремы 2 возможно и при другой функции $B_0(a)$, однако условия существования такого решения будут отличаться от рассмотренных выше условий (3.20), (3.22) и др.

Замечание 4. Используемая выше постановка задачи предполагает изнашивание только контртела. Допущение об изнашивании полосы требует, строго говоря, учета влияния износного формоизменения полосы на ее деформирование, что существенно усложняет задачу [4]. Однако, если пренебречь таким влиянием, как это делалось, например в [1, 2], то все полученные выше результаты останутся в силе и для случая изнашивания полосы, а также совместного изнашивания полосы и контртела.

Таким образом, получены выражения (2.5), (3.28) для точного решения контактной задачи для композиции полоса-полуплоскость при наличии изнашивания с изменяющейся областью контакта. Определено условие (3.29), обеспечивающее справедливость этих выражений. Предложено условие (соотношения (3.9) и (3.10)) сходимости последовательных приближений для операторного уравнения, являющееся обобщением классического условия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коваленко Е.В.* К расчету изнашивания сопряжения вал-втулка // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 6. С. 66–72.
2. *Галахов М.А., Усов П.П.* О расчете износа и толщины смазочного слоя в подшипниках скольжения с тонким вкладышем // Трение и износ. 1984. Т. 5. № 2. С. 239–250.
3. *Усов П.П.* Внутренний контакт цилиндрических тел близких радиусов при изнашивании их поверхностей // Трение и износ. 1985. Т. 6. № 3. С. 404–414.
4. *Солдатенков И.А.* Изнашивание покрытий в упругих сопряжениях при изменяющейся площадке контакта // Трение и износ. 1987. Т. 8. № 2. С. 206–213.
5. *Александрова Г.П.* Контактные задачи изгиба плит, лежащих на упругом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 1. С. 97–106.
6. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. М.: Наука, Ч. 1. 1971. 599 с.; Ч. 2. 1973. 447 с.
7. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.VII.1996