

УДК 539.3

© 1998 г. Н.В. ГЛУШКОВА

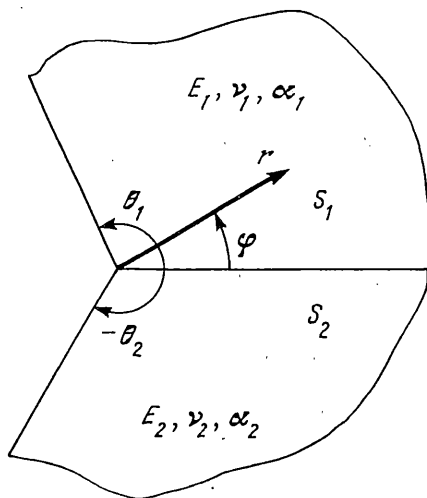
АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕРМОУПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ В УГЛОВЫХ ТОЧКАХ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Рассматриваются упругие напряжения, возникающие в биматериалах при действии тепловых нагрузок. В плоском случае методом преобразования Меллина строится асимптотическое разложение для полей напряжений и перемещений в окрестности угловых точек соединений, позволяющее не только исследовать характер особенности, но и выделять сингулярные составляющие решения в явном виде для повышения эффективности численных методов. Приводятся численные результаты, показывающие зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от соотношения упругих модулей и раствора углов соединений.

Начиная с работы Вильямса [1], впервые получившего зависимость показателя особенности напряжений в вершине упругого двугранного угла от его раствора, законы плоской (двумерной) концентрации напряжений $\tau = \{\tau_{r\varphi}, \sigma_{\varphi}, \sigma_r\}$ в угловых точках

$$\tau(r, \varphi) \sim \sum_n \tau_n(\varphi) r^{-\omega_n} = \sum_n K_n f_n(\varphi) (r/L)^{-\omega_n}, \quad r \rightarrow 0 \quad (1)$$

к настоящему времени изучены достаточно хорошо. Для разномодульных материалов (фиг. 1) аналитически выведены функции углового распределения $f_n(\varphi)$ и получены численные значения показателей сингулярности ω_n : $0 < \text{Re } \omega_n < 1$, зависящих от раствора углов θ_1, θ_2 и сочетания упругих свойств соединяемых материалов (параметров Дандерса) [2]. Однако актуальной остается проблема получения зависящих от конкретных условий нагружения коэффициентов интенсивности K_n , особенно в случае дополнительного воздействия на соединение физических полей (электромагнитных, тепловых, ультразвуковых и т.п.). В частности, во многих практических приложениях соединение разномодульных материалов производится под воздействием высоких температур или же они подвергаются таким воздействиям в процессе работы. Один из наиболее важных примеров здесь — металлокерамика, используемая в медицине, в двигателях внутреннего сгорания, в микроэлектронных компонентах и узлах термоядерных установок. Ввиду различия коэффициентов теплового расширения, изменение температуры (например, остывание) приводит к возникновению упругих напря-



Фиг. 1

жений в зоне соединения, которые концентрируясь у границ области контакта (угловых точек в двумерном случае) могут стать причиной разрушения.

Активные теоретические и экспериментальные исследования поведения биматериалов под действием тепловых нагрузок ведутся в настоящее время под руководством профессора Мунца [3–5]. В частности, было получено явное представление коэффициента интенсивности K_0 , соответствующего нулевому показателю $\omega_0 = 0$ (регулярный член) [3], а для определения коэффициентов K_n сингулярных членов ($0 < \operatorname{Re}\omega_n < 1$) развита эффективная численно-аналитическая методика, основанная на сшивании разложения (1) с конечно-элементным численным решением задачи для образца конечных размеров [4].

В настоящей статье предлагается аналитический метод получения всех K_n в случае бесконечного составного клина. Данное явное представление решения при $r \rightarrow 0$ важно не только как предельный случай, когда ограниченностью реальных образцов можно пренебречь, но и как основа для построения специальных сингулярных элементов, введение которых в соответствующие МКЭ пакеты позволит существенно повысить сходимость и точность при определении температурных напряжений в составных телах с угловыми точками.

Рассматривается соединение двух изотропных материалов с упругими свойствами E_j, ν_j, α_j ($j = 1, 2$); E_j – модуль Юнга, ν_j – коэффициент Пуассона, α_j – коэффициент теплового линейного расширения (фиг. 1). Изменение поля температуры $T(r, \varphi)$ приводит к появлению поля перемещений \mathbf{u} , удовлетворяющего обобщенным уравнениям Дюгамеля–Ляме [6]:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \gamma \nabla T = 0 \quad (2)$$

где λ, μ – константы Ляме, $\gamma = E\alpha/(1 - 2\nu)$.

В условиях плоской деформации уравнения (2) принимают в полярных координатах (r, φ) вид

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \right) - \gamma \frac{\partial T}{\partial r} &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \right) - \gamma \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

а компоненты тензора напряжений связаны с перемещениями $\mathbf{u} = \{u_r, u_\varphi\}$ через обобщенный закон Гука

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \\ \sigma_\varphi &= \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \gamma T \\ \sigma_r &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) - \gamma T \end{aligned} \quad (4)$$

Изложенная ниже схема построения решения применима при различных встречающихся на практике типах граничных условий (свободные или жестко фиксированные грани, наличие бесконечно тонкой прослойки на линии соединения, упругое клиновидное включение и др.). В дальнейшем для определенности предполагается, что внешние грани образца свободны от напряжений $\boldsymbol{\sigma} = \{\tau_{r\varphi}, \sigma_\varphi\}$:

$$\boldsymbol{\sigma}_1|_{\varphi=\theta_1} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_2|_{\varphi=-\theta_2} = 0 \quad (5)$$

и поле напряжений и перемещений непрерывно на линии соединения (жесткое сцепление):

$$(\sigma_1 - \sigma_2)|_{\varphi=0} = 0 \quad (6)$$

$$(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)|_{\varphi=0} = 0 \quad (7)$$

Здесь и далее векторы считаются вектор-столбцами, а индексами 1 или 2 отмечены величины, относящиеся к первому или второму сектору S_j ($S_1: 0 \leq \varphi \leq \theta_1$; $S_2: -\theta_2 \leq \varphi \leq 0$) соответственно.

Для однозначной разрешимости задачи к граничным условиям (5)–(7) должны быть добавлены условия в нуле и на бесконечности. Считаем, что при локализованной тепловой нагрузке $\mathbf{u}(r, \varphi) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ и потенциальная энергия упругой деформации конечна. Последнее в условиях плоской деформации эквивалентно требованию $\operatorname{Re} \omega_n < 1$.

Геометрия области и структура уравнений позволяют эффективно использовать для решения краевой задачи (3)–(7) интегральное преобразование Меллина

$$M_s[u] \equiv \int_0^{\infty} u(r)r^{s-1}dr = U(s) \quad (8)$$

$$M_s^{-1}[U] \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} U(s)r^{-s}ds = u(r) \quad (9)$$

В силу свойств преобразования [7]:

$$\begin{aligned} M_s[f/r^k] &= F(s-k), & M_s[\partial f/\partial r] &= (1-s)F(s-1) \\ M_s[\partial^2 f/\partial r^2] &= (2-s)(1-s)F(s-2) \end{aligned} \quad (10)$$

применение M_{s+2} к уравнениям (3), M_{s+1} к соотношениям (4) и граничным условиям (5)–(6) и M_s к условию (7) приводит к граничной трехточечной задаче для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $U(s, \varphi) = M_s[\mathbf{u}]$:

$$d\mathbf{Y}_j/d\varphi = \mathbf{A}_j(s)\mathbf{Y}_j + \gamma_j \mathbf{b}_j(s), \quad \varphi \in S_j \quad (j=1,2) \quad (11)$$

$$\mathbf{S}_1 \mathbf{Y}_1|_{\varphi=\theta_1} = \mathbf{g}_1 \hat{T}(s+1, \theta_1), \quad \mathbf{S}_2 \mathbf{Y}_2|_{\varphi=-\theta_2} = \mathbf{g}_2 \hat{T}(s+1, -\theta_2) \quad (12)$$

$$(\mathbf{S}_1 \mathbf{Y}_1 - \mathbf{S}_2 \mathbf{Y}_2)|_{\varphi=0} = (\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2) \hat{T}(s+1, 0) \quad (13)$$

$$(\mathbf{Y}_1^{(m)} - \mathbf{Y}_2^{(m)})|_{\varphi=0} = 0 \quad (m=1,3) \quad (14)$$

$$\mathbf{A}_j(s) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

$$a_{21} = -\beta_j(s+1)(s-1), \quad a_{42} = (s-1) - (s+1)/\beta_j$$

$$a_{24} = \beta_j(s+1) - (s-1), \quad a_{43} = -(s+1)(s-1)/\beta_j$$

$$\beta_j = (\lambda_j + 2\mu_j)/\mu_j = 2(1-\nu_j)/(1-2\nu_j)$$

$$\mathbf{b}_j(s, \varphi) = \{0, -(s+1)/\mu_j, 0, 0\} \hat{T}(s+1, \varphi), \quad \hat{T} = M_{s+1}[T]$$

$$\mathbf{S}_j(s) = \mu_j \begin{vmatrix} \delta_j & 0 & 0 & \beta_j \\ 0 & 1 & -(s+1) & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{g}_j = \{\gamma_j, 0\}$$

$$\delta_j = \beta_j - s\lambda_j/\mu_j$$

Здесь $\mathbf{Y} = \{U_r, U'_r, U_\varphi, U'_\varphi\}$ – вектор неизвестных (штрихом обозначены производные по φ).

В силу линейности решения задачи (11)–(14) представимо в виде суммы частного и общего решений:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_p + \mathbf{Y}_0 \quad (15)$$

Для простоты изложения ограничимся случаем, когда изменение поля температур не зависит от угловой координаты $T = T(r)$, $\hat{T} = \hat{T}(s+1)$. Тогда в качестве частного решения можно взять не зависящий от φ вектор

$$\mathbf{Y}_{p,j} = \{y_j, 0, 0, 0\}, \quad y_j = -\frac{\gamma_j \hat{T}}{(\lambda_j + 2\mu_j)(s-1)} \quad (16)$$

Общее решение как обычно выражается через собственные значения σ_l и собственные векторы $\mathbf{m}_{j,l}$ матрицы системы \mathbf{A}_j :

$$\mathbf{Y}_{0,j} = \sum_{l=1}^4 t_{j,l} \mathbf{m}_{j,l} e^{\sigma_l \varphi} = \mathbf{M}_j(s) \mathbf{E}(s, \varphi) \mathbf{t}_j \quad (17)$$

$$\sigma_1 = i(s+1), \quad \sigma_2 = -i(s+1), \quad \sigma_3 = i(s-1), \quad \sigma_4 = -i(s-1) \quad (18)$$

Здесь $\mathbf{t}_j = \{t_{j,1}, \dots, t_{j,4}\}$ – вектор неизвестных констант; столбцами матрицы \mathbf{M}_j являются собственные векторы $\mathbf{m}_{j,l}$:

$$\mathbf{M}_j = (\mathbf{m}_{j,1}, \mathbf{m}_{j,2}, \mathbf{m}_{j,3}, \mathbf{m}_{j,4}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & i & -i \\ i(1+s) & -i(1+s) & -(s-1) & -(s-1) \\ c_j & -c_j & 1 & 1 \\ ic_j(s+1) & ic_j(s+1) & i(s-1) & -i(s-1) \end{vmatrix} \quad (19)$$

$$c_j = i \frac{\beta_j(s-1) - (s+1)}{s-1 - \beta_j(s+1)}$$

а матрица \mathbf{E} – диагональная

$$\mathbf{E}(s, \varphi) = \text{diag}(e^{\sigma_1 \varphi}, e^{\sigma_2 \varphi}, e^{\sigma_3 \varphi}, e^{\sigma_4 \varphi}) \quad (20)$$

Неизвестные \mathbf{t}_j определяются из линейной алгебраической системы, возникающей при подстановке решения (15)–(17) в граничные условия (12)–(14):

$$\mathbf{B} \mathbf{t} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{t} = \{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\} \quad (21)$$

Матрица системы \mathbf{B} та же, что и в рассмотренном ранее случае механических нагрузок¹

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} A_1 & A_1 & C_1 & -C_1 & -\bar{\mu}A_2 & -\bar{\mu}A_2 & -\bar{\mu}C_2 & \bar{\mu}C_2 \\ B_1 & -B_1 & D_1 & D_1 & -\bar{\mu}B_2 & \bar{\mu}B_2 & -\bar{\mu}D_2 & -\bar{\mu}D_2 \\ 1 & 1 & i & -i & -1 & -1 & -i & i \\ c_1 & -c_1 & 1 & 1 & -c_2 & c_2 & -1 & -1 \\ A_1 e_1 & A_1 / e_1 & C_1 e_2 & -C_1 / e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 e_1 & -B_1 / e_1 & D_1 e_2 & D_1 / e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_2 / e_3 & A_2 e_3 & C_2 / e_4 & -C_2 e_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_2 / e_3 & -B_2 e_3 & D_2 / e_4 & D_2 e_4 \end{vmatrix}$$

¹ Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Об особенности решения в угловых точках составных упругих волноводов. Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 1990. 19 с. – Деп. в ВИНТИ 19.02.91, N 824-B91.

$$A_j = \delta_j + i\beta_j c_j(1+s), \quad B_j = (i - c_j)(1+s), \quad C_j = 2is, \quad D_j = -2s$$

$$e_1 = e^{i(s+1)\theta_1}, \quad e_2 = e^{i(s-1)\theta_1}, \quad e_3 = e^{i(s+1)\theta_2}, \quad e_4 = e^{i(s-1)\theta_2}, \quad \bar{\mu} = \mu_2 / \mu_1$$

а правая часть выражается через заданную температурную нагрузку \hat{T} :

$$\mathbf{p} = (\mathbf{f} + \mathbf{g})\hat{T}$$

$$\mathbf{f}\hat{T} = - \begin{vmatrix} (\mathbf{S}_1 \mathbf{Y}_{p,1} - \mathbf{S}_2 \mathbf{Y}_{p,2})|_{\varphi=0} \\ (Y_{p,1}^{(1)} - Y_{p,2}^{(1)})|_{\varphi=0} \\ (Y_{p,1}^{(3)} - Y_{p,2}^{(3)})|_{\varphi=0} \\ \mathbf{S}_1 \mathbf{Y}_{p,1}|_{\varphi=\theta_1} \\ \mathbf{S}_2 \mathbf{Y}_{p,2}|_{\varphi=-\theta_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_1 b_1 - \bar{\mu} \delta_2 b_2 \\ 0 \\ b_1 - b_2 \\ 0 \\ \delta_1 b_1 \\ 0 \\ \delta_2 b_2 \\ 0 \end{vmatrix} \frac{\hat{T}(s+1)}{s-1}$$

$$\mathbf{g} = \left\{ \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\mu_1}, 0, 0, 0, \frac{\gamma_1}{\mu_1}, 0, \frac{\gamma_2}{\mu_2}, 0 \right\}, \quad b_j = \frac{\gamma_j}{\beta_j \mu_j}$$

Из (21) следует

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{B}^{-1}(s)\mathbf{p}(s) = \hat{\mathbf{B}}(s)\mathbf{p}(s) / \Delta(s) \quad (22)$$

где $\Delta(s) = \det \mathbf{B}(s)$, $\hat{\mathbf{B}}$ – присоединенная матрица.

Итак, в форме преобразования Меллина решение имеет вид

$$\mathbf{U}_j(s, \varphi) = \mathbf{M}_j^{(1,3)}(s)\mathbf{E}(s, \varphi)\mathbf{t}_j(s) + \mathbf{U}_{p,j}(s)$$

$$\mathbf{T}_j(s+1, \varphi) = \mathbf{N}_j(s)\mathbf{M}_j(s)\mathbf{E}(s, \varphi)\mathbf{t}_j(s) + \mathbf{T}_{p,j}(s) - \gamma_j \hat{T}(s+1)\mathbf{a} \quad (23)$$

где $\mathbf{M}_j^{(1,3)}(s)$ – матрица 2×4 (1 и 3 строки матрицы \mathbf{M}_j):

$$\mathbf{N}_j(s) = \begin{vmatrix} 0 & \mu_j & -\mu_j(s+1) & 0 \\ \mu_j \delta_j & 0 & 0 & \mu_j \beta_j \\ (\lambda_j + 2\mu_j)(-s) + \lambda_j & 0 & 0 & \lambda_j \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{p,j} = \{y_j, 0\}$$

$$\mathbf{T}_{p,j} = \mathbf{N}_j \mathbf{Y}_{p,j} = \begin{vmatrix} 0 \\ \lambda_j + 2\mu_j - s\lambda_j \\ \lambda_j - (\lambda_j + 2\mu_j)s \end{vmatrix} y_j, \quad \mathbf{a} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Искомые поля напряжений и перемещений определяются с помощью обратного преобразования

$$\boldsymbol{\tau}_j(r, \varphi) = M_{s+1}^{-1}[\mathbf{T}_j] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbf{T}_j(s+1, \varphi) r^{-(s+1)} ds$$

$$\mathbf{u}_j(r, \varphi) = M_s^{-1}[\mathbf{U}_j] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbf{U}_j(s, \varphi) r^{-s} ds \quad (24)$$

В силу экспоненциального убывания множителя $r^{-s} = \exp(-s \ln r)$ при $r \rightarrow 0$ в левой

полуплоскости комплексной плоскости s вертикальный контур интегрирования в (24) можно замкнуть влево, заменив интегралы суммой вычетов в полюсах s_n , расположенных левее контура. В результате для компонент тензора напряжений приходим к представлению (1), в котором для однократных s_n :

$$\tau_{j,n}(\varphi) = \text{res } T_j(s+1)|_{s=s_n}, \quad \omega_n = s_n + 1 \quad (25)$$

Аналогично для поля перемещений имеем

$$\mathbf{u}_j(r, \varphi) \sim \sum_n \mathbf{u}_{j,n}(\varphi) r^{-s_n}, \quad r \rightarrow 0 \quad (26)$$

$$\mathbf{u}_{j,n} = \text{res } U_j(s, \varphi)|_{s=s_n} \quad (27)$$

В соответствии со структурой решения (22), (23) полюсами s_n , дающими вклад в (1), являются нули определителя $\Delta(s)$ и знаменателя правой части $\mathbf{p}(s)$, лежащие в левой полуплоскости $\text{Re } s < 0$ (в (26) допустимым является также и вклад однократного полюса $s = 0$, дающего регулярный член для перемещений). Полюса s_n могут быть как вещественными, так и комплексными. В последнем случае они встречаются только как пары комплексно-сопряженных полюсов: $s_n = \alpha_n + i\beta_n$, $s_{n+1} = \alpha_n - i\beta_n$, вычеты в которых также являются комплексно-сопряженными величинами: $\tau_n = |\tau_n| e^{i\beta}$, $\tau_{n+1} = |\tau_n| e^{-i\beta}$, так, что суммарный вклад каждой пары дает вещественную осциллирующую составляющую:

$$\tau_n r^{-\omega_n} + \tau_{n+1} r^{-\omega_{n+1}} = 2 |\tau_n| r^{-(\alpha+1)} \cos(\beta \ln r - b)$$

Следует отметить, что хотя T_j в (24) зависит от $s + 1$, в представление этой вектор-функции, как и в U_j входят $t_j(s)$ и $\hat{T}(s+1)$ (см. (23)), т.е. наборы полюсов для $T_j(s+1, \varphi)$ и $U_j(s, \varphi)$ совпадают и необходимые для построения разложений (1), (26) вычеты (25), (27) выражаются через

$$\text{res } \mathbf{t}(s)|_{s=s_n} = \hat{\mathbf{B}}(s_n) \mathbf{p}(s_n) / \Delta'(s_n) \quad \text{для } s_n : \Delta(s_n) \equiv 0 \quad (28)$$

и $\text{res } \hat{T}(s+1)$ для нулей знаменателя $\hat{T}(s+1)$.

Вид определителя $\Delta(s)$, дающего основной набор полюсов s_n , не зависит от типа нагрузки, поэтому его корни те же, что и в хорошо изученных ранее задачах для составного клина [2]. Их численные значения устойчиво определяются методом парабол (методом Мюллера), а кратность и количество полюсов в рассматриваемой области комплексной плоскости s контролируются по принципу аргумента.

Формулы для $\Delta'(s_n)$ могут быть выписаны явно, однако они слишком громоздки для практического использования. Для получения значений $\Delta'(s_n)$, необходимых для (28) с любой требуемой (но допустимой длиной мантиссы используемого компьютера) точностью достаточно воспользоваться конечно-разностной аппроксимацией производной, например, в простейшем случае

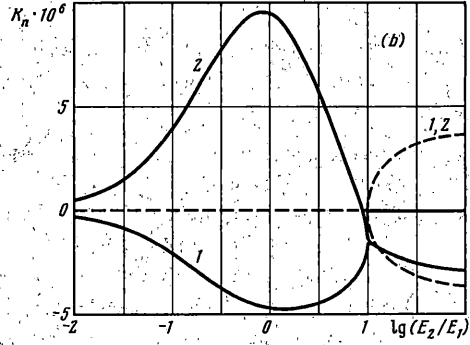
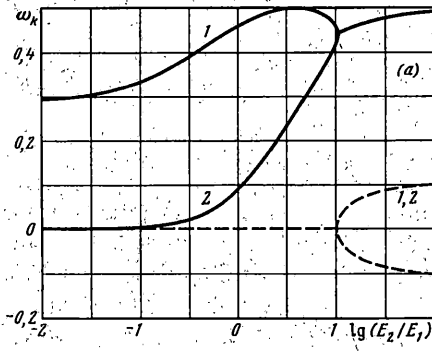
$$\Delta'(s_n) = \frac{\Delta(s+h) - \Delta(s-h)}{2h} + O(h), \quad h \ll 1 \quad (29)$$

Что касается полюсов $\mathbf{p}(s)$, они очевидно совпадают с полюсами $\hat{T}(s+1)$, то есть зависят от конкретного вида теплового поля $T(r, \varphi)$. Так для рассмотренного в [3] равномерного изменения температуры в ограниченной области

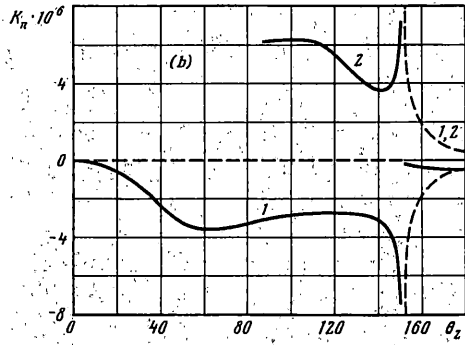
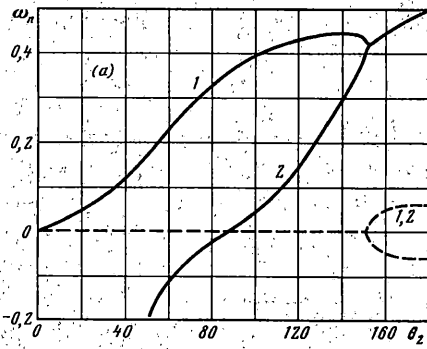
$$T(r) = T_0 \quad (r < R_0), \quad T(r) = 0 \quad (r > R_0) \quad (30)$$

имеем

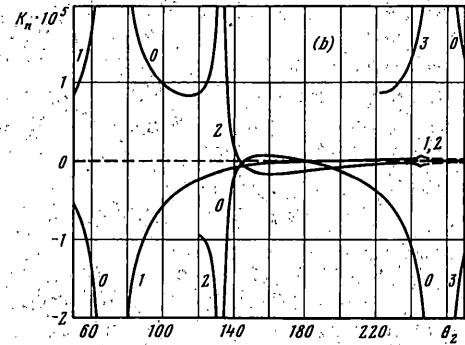
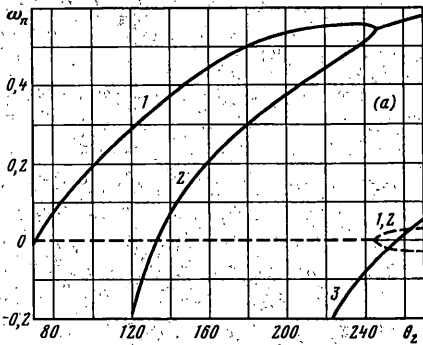
$$\hat{T}(s+1) = T_0 R_0^{s+1} / (s+1) \quad (31)$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Полюсу $s_0 = -1$ соответствует так называемый регулярный член разложения (1), дающий конечные значения напряжений, не зависящие от r ($\omega_0 = s_0 + 1 = 0$). Трудности его вычисления связаны с тем, что $s_0 = -1$ является также и нулем $\Delta(s)$, устранимым, однако, нулями числителя $\hat{B}(s)$. В результате

$$\text{res } t_j(s)|_{s=s_0} = \frac{\hat{B}'(s_0)}{\Delta'(s_0)} \text{res } \mathbf{p}|_{s=s_0}, \quad (32)$$

где $\text{res } \mathbf{p}|_{s=s_0}$ получается заменой $\hat{T}(s+1)$ на $\text{res } \hat{T}(s+1)|_{s=s_0} = T_0$ в представлении $\mathbf{P}(s)$. Отметим, что кроме вычета (32) в регулярный член дают вклад и слагаемые (23), соответствующие частному решению.

Для выделения коэффициентов интенсивности K_0, K_n , функции углового распределения $f_n(\varphi)$ в (1), следуя [3–5], нормируются условием $\sigma_{\varphi,n}(\varphi)|_{\varphi=0} L^{\omega_n} = K_n$, т.е. $f_{\varphi,n}(0) = 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). При этом величина K_0 не зависит от единицы длины L , в то время как в K_n входят множители L^{ω_n} .

Явное асимптотическое разложение (1), (25) позволяет проводить анализ термических напряжений в угловых точках биматериалов, не прибегая к прямым численным методам, требующим ввиду сингулярности решения больших вычислительных затрат. В качестве иллюстрации на фиг. 2–4 даны зависимости ω_n и K_n от соотношения упругих модулей E_2/E_1 при фиксированных углах $\theta_1 = 180^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$ (фиг. 2) и от угла θ_2 при фиксированном соотношении $E_2/E_1 = 0,2$ и угле $\theta_1 = 180^\circ$ (фиг. 3) и $\theta_1 = 90^\circ$ (фиг. 4). Номер линии соответствует номеру n разложения; мнимые части комплексных величин даны штрихами. Во всех случаях коэффициенты Пуассона $\nu_1 = 0,26$, $\nu_2 = 0,3$; коэффициенты объемного расширения $\alpha_1 = 18,95 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$, $\alpha_2 = 2,5 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$; $T_0 = 1^\circ\text{K}$, $R_0/L = 1$. Коэффициенты K_n даны в безразмерном виде ($E_1 = 1$). Для сопоставления их с размерными результатами необходимо домножить приведенные величины на $E_1 T_0 (R_0/L)^{\omega_n}$. Заметим, что $(r/L)^{-\omega_n} (R_0/L)^{\omega_n} = (r/R_0)^{-\omega_n}$, и как следствие, размерные коэффициенты K_n при разложении по r/R_0 не зависят от радиуса области приложения тепловой нагрузки R_0 .

В [5] отмечено, что значения K_n ($n \neq 0$), для тел конечных размеров выходят на постоянные значения при $H/L > 1$, где H – характерный размер образца. Сопоставление показало, что эти предельные величины, как и ожидалось, совпадают с коэффициентами K_n для рассматриваемого в настоящей работе бесконечного составного клина. Данный факт позволяет использовать полученное представление (1), (25) для выделения сингулярных составляющих решения в явном виде (например, с помощью соответствующих сингулярных элементов), так что отпадает необходимость мельчить сетку в окрестности угловых точек. Что касается регулярного члена, значения K_0 во всех случаях полностью совпадают с приведенными в [3–5] и других работах этих авторов.

Для рассмотренной составной 3/4 плоскости во всем диапазоне изменения E_2/E_1 имеется два сингулярных показателя ω_n (фиг. 2, *a*), значения которых при $E_2 \ll E_1$ выходят из точек $\omega_1 = 0,294$, $\omega_2 = 0$, соответствующих случаю четверть-плоскости с одной фиксированной гранью ($\nu_2 = 0,3$), и, сливаясь при $E_2/E_1 = 10$ в комплексно-сопряженную пару, приходят при $E_2/E_1 = 100$ к $\omega_{1,2} = 0,5 \pm i0,101$, как для жесткого штампа, сцепленного с упругой полуплоскостью. Значения K_n при $E_2 \geq 10E_1$ соответственно также становятся комплексно-сопряженными (фиг. 2, *b*).

Во втором случае (фиг. 3) второй полюс, входя в полосу сингулярности при $\theta_2 \geq 86^\circ$, сливается с первым при $\theta_2 = 152^\circ$, порождая как и в предыдущем случае комплексно-сопряженную пару. Предельным значением при $\theta_2 = 180^\circ$ здесь является показатель $\omega_{1,2} = 0,5 \pm i0,059$ для вершины трещины на линии соединения материалов. Значения K_0 как в первом, так и во втором случае практически нулевые.

Появление двукратного полюса в момент слияния полюсов приводит обычно к неограниченному росту соответствующих K_n . На фиг. 2, *b* такого роста при $E_2 = 10E_1$ не наблюдается (по-видимому, здесь двукратность полюса устраняется нулем), но на фиг. 3, *b* ($\theta_2 = 152^\circ$) он проявляется отчетливо (см. также фиг. 4, *b*, $\theta_2 = 246^\circ$). Аналогичный рост коэффициентов интенсивности имеет место и при выходе показателей в полосу регулярности (при пересечении границы $\omega = 0$). В этом случае двукратным становится полюс $s_0 = -1$, поэтому рост соответствующего K_n сопровождается таким же, но с противоположным знаком увеличением K_0 , так что в пределе при $\omega_n = 0$ выполняется $K_n/K_0 = -1$ [3–5]. Тем самым суммарное поле напряжений вне угловой точки остается ограниченным и при $|K_n|, |K_0| \rightarrow \infty$. Такое же устранение

имеет место и при слиянии вещественных полюсов в комплексно-сопряженную пару. В третьем случае (фиг. 4) величина K_0 уже соизмерима с другими коэффициентами и их рост происходит здесь как при каждом появлении нового сингулярного члена, так и при слиянии полюсов.

Данная работа возникла в результате сотрудничества с профессором Д. Мунцем и доктором И. Янг (Технический университет и Исследовательский центр Карлсруэ, Германия) и профессором Е.В. Глушковым, за что автор приносит им благодарность.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N 97-01-00429).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // *J. Appl. Mech.* 1952. V. 19. No. 4. P. 526–528.
2. *Bogy D.B.* Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1969. V. 35. No. 3. P. 460–466.
3. *Munz D., Fett T., Yang Y.Y.* The regular stress term in bonded dissimilar materials after a change in temperature // *Eng. Fract. Mech.* 1993. V. 44. No. 2. P. 185–194.
4. *Munz D., Yang Y.Y.* Stresses near the edge of bonded dissimilar materials described by two stress intensity factors // *Intern. J. Fracture.* 1993. V. 60. No. 2. P. 169–177.
5. *Munz D., Yang Y.Y.* Stresses in ceramic-metal joints under mechanical and thermal loading // *Mis-Matching of Welds. ESIS 17* (Eds. K.-H. Schwable and M. Koçak). London: Mech. Eng. Publ. 1994. P. 35–58.
6. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
7. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974. 542 с.

Краснодар

Поступила в редакцию
22.IV.1997