МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1998

УДК 539.3

© 1998 г. В.В. ЕФИМОВ, А.Ф. КРИВОЙ, Г.Я. ПОПОВ

ЗАДАЧИ О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ КРУГОВОГО ДЕФЕКТА В СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Рассмотрены пространственные задачи о концентрации напряжений для круговых дефектов типа круговой трещины или монетообразного включения в плоскости смены упругих свойств материалов. Обобщенным методом интегральных преобразований строится разрывное решение уравнений косочно-однородной упругости, имеющее заданные скачки всех напряжений и смещений при переходе через плоскость смены упругих свойств материалов. Построенное разрывное решение, также как и в случае однородного пространства [1], позволило рассмотренные задачи в общем случае свести к системе из шести двухмерных интегродифференциальных уравнений. Получено точное решение указанных систем. Рассмотрены важные частные случаи. Частный случай рассмотренных задач, при наличии осевой симметрии и на основе иного подхода исследован в [2].

1. Построение разрывного решения однородных уравнений упругости с дефектом в виде плоскости. В основе предлагаемых методов решения рассматриваемых задач лежит понятие разрывного решения [1] пространственной теории упругости. Под последним понимается решение, которое удовлетворяет уравнениям изотропной теории упругости всюду, кроме точек дефекта, на которых смещения, и нормальные напряжения (к дефекту) и касательных напряжений претерпевают заданные скачки.

Пусть дефектом является вся плоскость $x = 0$. Зададим скачки смещений u, v, w = $= 2G(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0)$, где G – модуль сдвига, и напряжений σ_x, τ_{xz}, τ_{yz}, в виде

$$\langle u(y,z)\rangle = u(-0,y,z) - u(+0,y,z), \ldots \langle \tau_{yz}(y,z)\rangle = \tau_{yz}(-0,y,z) - \tau_{yz}(+0,y,z) \tag{1.1}$$

В [1] для построения разрывного решения однородных уравнений Ламе при заданных скачках (1.1) использовано представление Папковича – Нейбера общего решения этих уравнений. Здесь с целью упрощения выкладок и формул будем исходить из представления Треффца [3]:

$$u = \psi_1 + x\frac{\partial\psi_0}{\partial x}, \quad v = \psi_2 + x\frac{\partial\psi_0}{\partial y}, \quad w = \psi_3 + x\frac{\partial\psi_0}{\partial z} \tag{1.2}$$

Здесь функции $\psi_j(x, y, z)$ $(j = \overline{0,3})$, удовлетворяют в R^3, за исключением точек дефекта, уравнениям

$$\nabla\psi_j = 0 \quad (j = \overline{0,3}), \quad (x,y,z) \in R, \quad x \neq 0 \tag{1.3}$$

и в этой же области справедливо соотношение

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial x} = -\frac{1}{x}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\psi_3}{\partial z}\right), \quad \chi = 3 - 4\mu \tag{1.4}$$

где μ – коэффициент Пуассона.

При построении разрывного решения будем считать, что объемные силы отсутствуют. Для упрощения построений вместо функций, содержащихся в (1.2)–(1.4) будем оперировать их трансформантами Фурье по переменным y и z. Тогда уравнения (1.3), например, примут вид ($j=\overline{0,3}$)

$$\psi''_{j\lambda\beta}(x)-(\lambda^2+\beta^2)\psi'_{j\lambda\beta}(x)=0,\quad \psi_{j\lambda\beta}(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_j e^{i(\lambda z+\beta y)}dzdy \tag{1.5}$$

Чтобы решение уравнений Ламе было разрывным при $x=0$, необходима также разрывность и для уравнений (1.3) и (1.5). Введем скачки гармонических функций и их нормальных (к плоскости $X=0$): производных

$$\left\langle\Psi_{j\lambda\beta}\right\rangle=\Psi_{j\lambda\beta}(-0)-\Psi_{j\lambda\beta}(+0),\quad \left\langle\Psi'_{j\lambda\beta}\right\rangle=\Psi'_{j\lambda\beta}(-0)-\Psi'_{j\lambda\beta}(+0) \tag{1.6}$$

Применяя преобразование Фурье по x к уравнению (1.5) по обобщенной схеме, получим его разрывное решение в виде

$$\Psi_{j\lambda\beta}(x)=\left\langle\Psi'_{j\lambda\beta}\right\rangle\Phi_{\lambda\beta}(x)+\left\langle\Psi_{j\lambda\beta}\right\rangle\Phi'_{j\lambda\beta}(x) \tag{1.7}$$

$$\Phi_{\lambda\beta}(x)=0,5(\lambda^2+\beta^2)e^{-\sqrt{\lambda^2+\beta^2}\,|x|},\quad \Phi'_{\lambda\beta}(x)=-0,5\,\mathrm{sgn}(x)e^{-\sqrt{\lambda^2+\beta^2}\,|x|}$$

Для получения трансформант искомого разрывного решения по формулам

$$U_{\lambda\beta}=\Psi_{1\lambda\beta}+x\Psi'_{0\lambda\beta},\quad V_{\lambda\beta}=\Psi_{2\lambda\beta}-i\beta x\Psi_{0\lambda\beta},\quad W_{\lambda\beta}=\Psi_{3\lambda\beta}-i\lambda x\Psi_{0\lambda\beta} \tag{1.8}$$

с заданными скачками (1.1), следует трансформанты скачков (1.6) гармонических функций выразить через трансформанты заданных скачков $\langle U_{\lambda\beta}\rangle$, $\langle V_{\lambda\beta}\rangle$, $\langle W_{\lambda\beta}\rangle$, $\langle\sigma_{X\lambda\beta}\rangle$, $\langle\tau_{Y\lambda\beta}\rangle$, $\langle\tau_{Z\lambda\beta}\rangle$. Непосредственно из формул (1.8) следует, что

$$\left\langle\Psi_{1\lambda\beta}\right\rangle=\left\langle U_{\lambda\beta}\right\rangle,\quad \left\langle\Psi_{2\lambda\beta}\right\rangle=\left\langle V_{\lambda\beta}\right\rangle,\quad \left\langle\Psi_{3\lambda\beta}\right\rangle=\left\langle W_{\lambda\beta}\right\rangle \tag{1.9}$$

Трансформируя (1.4), получим

$$\left\langle\Psi'_{0\lambda\beta}\right\rangle=-\chi^{-1}\left(\left\langle\Psi'_{1\lambda\beta}\right\rangle-i\beta\left\langle V_{\lambda\beta}\right\rangle-i\lambda\left\langle W_{\lambda\beta}\right\rangle\right) \tag{1.10}$$

Откуда с учетом (1.9), найдем

$$\left\langle\Psi'_{0\lambda\beta}\right\rangle=-\chi^{-1}\left(\left\langle\Psi'_{1\lambda\beta}\right\rangle-i\beta\left\langle U_{\lambda\beta}\right\rangle-i\lambda\left\langle W_{\lambda\beta}\right\rangle\right) \tag{1.11}$$

Для определения скачка самой функции $\Psi_{0\lambda\beta}$, продифференцируем соотношение (1.10) по x и воспользуемся соотношением $\Psi'_{j\lambda\beta}-(\lambda^2+\beta^2)\Psi_{j\lambda\beta}=0$. В результате получим

$$\left\langle\Psi_{0\lambda\beta}\right\rangle=\left(i\beta\left\langle\Psi'_{2\lambda\beta}\right\rangle+i\lambda\left\langle\Psi'_{3\lambda\beta}\right\rangle\right)(\chi(\lambda^2+\beta^2))^{-1}-\left\langle U_{\lambda\beta}\right\rangle \tag{1.12}$$

Для выражения скачков производных гармонических функций $\Psi_{j\lambda\beta}$ ($j=\overline{1,3}$), следует привлечь формулы для напряжений, выраженных согласно (1.2) через гармонические функции. Эти формулы в трансформантах имеют вид

$$\sigma_{X\lambda\beta}=\Psi'_{1\lambda\beta}+(1-2\mu)\Psi'_{0\lambda\beta}+x\Psi''_{0\lambda\beta},\quad 2\tau_{X\lambda\beta}=\Psi'_{2\lambda\beta}-i\beta(\Psi_{1\lambda\beta}+$$

$$+\Psi_{0\lambda\beta}+2x\Psi'_{0\lambda\beta}),\quad 2\tau_{Z\lambda\beta}=\Psi'_{3\lambda\beta}-i\lambda(\Psi_{1\lambda\beta}+\Psi_{0\lambda\beta}+2x\Psi'_{0\lambda\beta})$$

Откуда находим

$$\langle\sigma_{X\lambda\beta}\rangle=\langle\Psi'_{1\lambda\beta}\rangle+(1-2\mu)\langle\Psi'_{0\lambda\beta}\rangle,\quad 2\langle\tau_{Y\lambda\beta}\rangle=\langle\Psi'_{2\lambda\beta}\rangle-i\beta\left(\langle U_{\lambda\beta}\rangle+\langle\Psi_{0\lambda\beta}\rangle\right)$$

$$2\langle\tau_{Z\lambda\beta}\rangle=\langle\Psi'_{3\lambda\beta}\rangle-i\lambda\left(\langle U_{\lambda\beta}\rangle+\langle\Psi_{0\lambda\beta}\rangle\right) \tag{1.13}$$

Объединив уравнение (1.10) с первым уравнением (1.13) и решая эту систему относительно $\langle\Psi'_{1\lambda\beta}\rangle$; $\langle\Psi'_{0\lambda\beta}\rangle$, найдем

$$\langle\Psi'_{0\lambda\beta}\rangle=0,5\left(i\beta\langle V_{\lambda\beta}\rangle+i\lambda\langle W_{\lambda\beta}\rangle-\langle\sigma_{X\lambda\beta}\rangle\right)(1-\mu)^{-1} \tag{1.14}$$

$$\langle\Psi'_{1\lambda\beta}\rangle=0,5\left(\chi\langle\sigma_{X\lambda\beta}\rangle-(1-2\mu)\left(i\beta\langle V_{\lambda\beta}\rangle+i\lambda\langle W_{\lambda\beta}\rangle\right)\right)(1-\mu)^{-1} \tag{1.15}$$

Умножив второе уравнение (1.13) на $i\beta$, а третье на $i\lambda$ и сложив результаты, найдем комбинацию $i\beta\langle\Psi'_{2\lambda\beta}\rangle+i\lambda\langle\Psi'_{3\lambda\beta}\rangle$. Подставив ее в (1.12), получим

$$\langle\Psi_{0\lambda\beta}\rangle=\frac{i\beta\langle\tau_{Y\lambda\beta}\rangle+i\lambda\langle\tau_{Z\lambda\beta}\rangle}{2(\lambda^2+\beta^2)(1-\mu)}-\frac{\langle U_{\lambda\beta}\rangle}{(1-\mu)}$$

Подставив это выражение во второе и третье уравнение (1.13) найдем

$$\langle\Psi'_{2\lambda\beta}\rangle=2\langle\tau_{Y\lambda\beta}\rangle+\frac{i\beta}{2(1-\mu)}\left[(1-2\mu)\langle U_{\lambda\beta}\rangle-\frac{i\beta\langle\tau_{Y\lambda\beta}\rangle+i\lambda\langle\tau_{Z\lambda\beta}\rangle}{\lambda^2+\beta^2}\right]$$

$$\langle\Psi'_{3\lambda\beta}\rangle=2\langle\tau_{Z\lambda\beta}\rangle+\frac{i\lambda}{2(1-\mu)}\left[(1-2\mu)\langle U_{\lambda\beta}\rangle-\frac{i\beta\langle\tau_{Y\lambda\beta}\rangle+i\lambda\langle\tau_{Z\lambda\beta}\rangle}{\lambda^2+\beta^2}\right]$$

Итак, все скачки гармонических функций и их производных выражены через заданные скачки (их трансформанты). Подставив их выражения в формулу (1.7), найдем трансформанты гармонических функций. Переходя к оригиналам, подставим найденные гармонические функции в формулы (1.2), в результате найдем искомое разрывное решение с заданными скачками (1.1).

2. Задача о напряженном состоянии кусочно-однородного упругого пространства. Используя построенное выше разрывное решение, рассмотрим следующую задачу. Пусть упругое пространство ($-\infty < x, y, z < +\infty$) состоит из двух полупространств $x < 0$ (упругие параметры μ_-, G_-) и $x > 0$ (упругие параметры μ_+, G_+). Будем считать, что при переходе через плоскость $x = 0$, раздела материалов, смещения u, v, w, и напряжения σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} сохраняют непрерывность. Предполагается, что к каждому из полупространств приложена нагрузка в виде системы объемных сил, или имеется загружение на бесконечности.

Решение поставленной задачи будем строить в виде

$$u=\theta(x)(u^+ +\hat{u}^+)+\theta(-x)(u^- +\hat{u}^-),\ldots\quad \tau_{xz}=\theta(x)(\tau^+_{xz}+\hat{\tau}^+_{xz})+\theta(-x)(\tau^-_{xz}+\hat{\tau}^-_{xz}) \tag{2.1}$$

Здесь $\theta(x)$ – функция Хевисайда, $u^\pm$, $v^\pm$, ..., $\tau^\pm_{xz}$ – разрывные решения, построенные выше, в которых упругие параметры следует заменить соответственно на μ_-, G_- и μ_+, G_+. Функции $\hat{u}^-_{\lambda\beta},\ldots,\hat{\tau}^-_{xz}$ представляют собой решения для упругого пространства с параметрами μ_-, G_- при действии той же нагрузки, что приложена к полупространству

$x<0$ в поставленной задаче. Аналогично $\hat{u}^{+}_{\lambda\beta},...,\hat{\tau}^{+}_{xz}$, решение задачи для пространства с параметрами μ_{+}, G_{+} при загружении его нагрузкой, приложенной к полупространству $x>0$. Переходя к двукратным трансформантам, формулы (2.1) запишем в виде

$$u_{\lambda\beta}(x)=\theta(x)(u^{+}_{\lambda\beta}+\hat{u}^{+}_{\lambda\beta})+\theta(-x)(u^{-}_{\lambda\beta}+\hat{u}^{-}_{\lambda\beta}),\dots\quad \tau_{z\lambda\beta}=\theta(x)(\tau^{+}_{z\lambda\beta}+\hat{\tau}^{+}_{z\lambda\beta})+\theta(-x)(\tau^{-}_{z\lambda\beta}+\hat{\tau}^{-}_{z\lambda\beta})$$

В качестве основных неизвестных примем предельные значения трансформант разрывных решений

$$2G_{\pm}\left\|X^{\pm}_{k\lambda\beta}\right\|_{k=\overline{1,3}}=\left\|u^{\pm}_{\lambda\beta}(\pm 0),\ v^{\pm}_{\lambda\beta}(\pm 0),\ w^{\pm}_{\lambda\beta}(\pm 0)\right\|, \tag{2.2}$$

$$\left\|Y^{\pm}_{k\lambda\beta}\right\|_{k=\overline{1,3}}=\left\|\sigma^{\pm}_{x\lambda\beta}(\pm 0),\ \tau^{\pm}_{y\lambda\beta}(\pm 0),\ \tau^{\pm}_{z\lambda\beta}(\pm 0)\right\|$$

Если считать, что $u^{+}_{\lambda\beta}(x)\equiv 0$, при $x<0$ и $u^{-}_{\lambda\beta}(x)\equiv 0$, при $x>0$, то имеют место равенства для скачков разрывных решений

$$\left\langle u^{+}_{\lambda\beta}\right\rangle=u^{+}_{\lambda\beta}(-0)-u^{+}_{\lambda\beta}(+0)=-u^{+}_{\lambda\beta}(+0)=-2G_{+}X^{+}_{1\lambda\beta}$$

$$\left\langle u^{-}_{\lambda\beta}\right\rangle=u^{-}_{\lambda\beta}(-0)-u^{-}_{\lambda\beta}(+0)=u^{-}_{\lambda\beta}(-0)=2G_{-}X^{-}_{1\lambda\beta} \tag{2.3}$$

и аналогично для других скачков

$$\left\langle v^{\pm}_{\lambda\beta}\right\rangle=\mp 2G_{\pm}X^{\pm}_{2\lambda\beta},\quad \left\langle w^{\pm}_{\lambda\beta}\right\rangle=\mp 2G_{\pm}X^{\pm}_{3\lambda\beta}$$

$$\left\langle \sigma^{\pm}_{x\lambda\beta}\right\rangle=\mp Y^{\pm}_{1\lambda\beta},\quad \left\langle \tau^{\pm}_{y\lambda\beta}\right\rangle=\mp Y^{\pm}_{2\lambda\beta},\quad \left\langle \tau^{\pm}_{z\lambda\beta}\right\rangle=\mp Y^{\pm}_{3\lambda\beta} \tag{2.4}$$

Трансформанты разрывных гармонических функций $\Psi^{\pm}_{j}(x)$, через которые выражаются разрывные решения $u^{\pm}_{\lambda\beta}$, $v^{\pm}_{\lambda\beta}$, $w^{\pm}_{\lambda\beta}$, согласно (1.2) определяются формулами

$$\Psi^{\pm}_{j\lambda\beta}(x)=\left\langle \Psi'^{\pm}_{j\lambda\beta}\right\rangle\Phi_{\lambda\beta}(x)+\left\langle \Psi^{\pm}_{j\lambda\beta}\right\rangle\Phi'_{\lambda\beta}(x)\quad (j=\overline{0,3}) \tag{2.5}$$

Содержащиеся здесь скачки гармонических функций выражаются через скачки разрывного решения по формулам (1.9) и (1.4)–(1.7). Эти формулы применительно к разбираемому случаю, с учетом (2.3) и (2.4) запишутся в виде

$$\left\langle \Psi^{\pm}_{j\lambda\beta}(x)\right\rangle=\mp 2G_{\pm}X^{\pm}_{j\lambda\beta}(j=\overline{1,3}),\quad \left\langle \Psi'^{\pm}_{1\lambda\beta}(x)\right\rangle=\pm 2\delta^{\pm}_{\mu}\tilde{X}^{\pm}_{\lambda\beta}\mp 2\gamma^{\pm}_{\mu}Y^{\pm}_{1\lambda\beta}$$

$$\left\langle \Psi^{\pm}_{0\lambda\beta}(x)\right\rangle=\pm(G_{\pm}X^{\pm}_{1\lambda\beta}-0,5\tilde{Y}^{\pm}_{\lambda\beta}(\lambda^{2}+\beta^{2})^{-1})(1-\mu_{\pm})^{-1} \tag{2.6}$$

$$\left\langle \Psi'^{\pm}_{0\lambda\beta}(x)\right\rangle=\pm(0,5Y^{\pm}_{1\lambda\beta}-G_{\pm}\tilde{X}^{\pm}_{\lambda\beta})(1-\mu_{\pm})^{-1},\quad \left\langle \Psi'^{\pm}_{2\lambda\beta}(x)\right\rangle=\mp 2Y^{\pm}_{2\lambda\beta}\mp i\beta T^{\pm}_{\lambda\beta}$$

$$\left\langle \Psi'^{\pm}_{3\lambda\beta}(x)\right\rangle=\mp 2Y^{\pm}_{3\lambda\beta}\mp i\lambda T^{\pm}_{\lambda\beta}$$

$$\tilde{X}^{\pm}_{\lambda\beta}=i\beta X^{\pm}_{2\lambda\beta}+i\lambda X^{\pm}_{3\lambda\beta},\quad \tilde{Y}^{\pm}_{\lambda\beta}=i\beta Y^{\pm}_{2\lambda\beta}+i\lambda Y^{\pm}_{3\lambda\beta},\quad \gamma^{\pm}_{\mu}=\chi_{\pm}(4(1-\mu))^{-1} \tag{2.7}$$

$$T^{\pm}_{\lambda\beta}=2\delta^{\pm}_{\mu}X^{\pm}_{1\lambda\beta}+0,5\tilde{Y}^{\pm}_{\lambda\beta}(\lambda^{2}+\beta^{2})^{-1}(1-\mu_{\pm})^{-1},\quad \delta^{\pm}_{\mu}=(1-2\mu_{\pm})G_{\pm}(2(1-\mu_{\pm}))^{-1}$$

Удовлетворим далее граничным условиям для полупространств, а именно, добьемся того, чтобы предельные значения разрывных решений на границах полупространств совпадали с введенными по формулам (2.2). С этой целью, пользуясь формулами (1.8), вычислим указанные предельные значения. В результате получим

$$u^{\pm}_{\lambda\beta}(\pm 0)=\Psi^{\pm}_{1\lambda\beta}(\pm 0),\quad v^{\pm}_{\lambda\beta}(\pm 0)=\Psi^{\pm}_{2\lambda\beta}(\pm 0),\quad w^{\pm}_{\lambda\beta}(\pm 0)=\Psi^{\pm}_{3\lambda\beta}(\pm 0) \tag{2.8}$$

Далее, используя формулы (2.5), найдем с учетом (1.7) и (2.6) предельные значения гармонических функций. В результате получим следующие шесть уравнений относительно искомых величин (2.2):

$$G_{\pm}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}\,X^{\pm}_{1\lambda\beta}=\pm\delta^{\pm}_{\mu}\tilde{X}^{\pm}_{\lambda\beta}\mp 2\gamma^{\pm}_{\mu}Y^{\pm}_{1\lambda\beta},\quad G_{\pm}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}\,X^{\pm}_{2\lambda\beta}= \tag{2.9}$$

$$=-Y^{\pm}_{2\lambda\beta}-i\beta\Omega^{\pm}_{\lambda\beta},\quad G_{\pm}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}\,X^{\pm}_{3\lambda\beta}=-Y^{\pm}_{3\lambda\beta}-i\lambda\Omega^{\pm}_{\lambda\beta}$$

$$\Omega^{\pm}_{\lambda\beta}=\delta^{\pm}_{\mu}X^{\pm}_{1\lambda\beta}+\tilde{Y}^{\pm}_{\lambda\beta}(4(1-\mu_{\pm})(\lambda^2+\beta^2))^{-1} \tag{2.10}$$

Чтобы довести полученную систему уравнений, содержащую 12 неизвестных до замкнутой, следует привлечь условия непрерывности поля напряжений и смещений при переходе через плоскость раздела материалов

$$(2G_-)^{-1}u^{-}_{\lambda\beta}(-0)+\hat{u}^{-}_{\lambda\beta}(-0)=(2G_+)^{-1}u^{+}_{\lambda\beta}(+0)+\hat{u}^{+}_{\lambda\beta}(+0),\ldots$$

$$\tau^{-}_{z\lambda\beta}(-0)+\hat{\tau}^{-}_{z\lambda\beta}(-0)=\tau^{+}_{z\lambda\beta}(+0)+\hat{\tau}^{+}_{z\lambda\beta}(+0) \tag{2.11}$$

Если ввести обозначения

$$A_{1\lambda\beta}=\hat{u}^{+}_{\lambda\beta}(+0)-\hat{u}^{-}_{\lambda\beta}(-0),\quad A_{2\lambda\beta}=\hat{v}^{+}_{\lambda\beta}(+0)-\hat{v}^{-}_{\lambda\beta}(-0),\quad \tilde{A}_{\lambda\beta}=i\beta A_{2\lambda\beta}+i\lambda A_{3\lambda\beta}$$

$$A_{3\lambda\beta}=\hat{w}^{+}_{\lambda\beta}(+0)-\hat{w}^{-}_{\lambda\beta}(-0),\quad B_{1\lambda\beta}=\hat{\sigma}^{+}_{x\lambda\beta}(+0)-\hat{\sigma}^{-}_{x\lambda\beta}(-0),\quad \tilde{B}_{\lambda\beta}=i\beta B_{2\lambda\beta}+i\lambda B_{3\lambda\beta} \tag{2.12}$$

$$B_{2\lambda\beta}=\hat{\tau}^{+}_{y\lambda\beta}(+0)-\hat{\tau}^{-}_{y\lambda\beta}(-0),\quad B_{3\lambda\beta}=\hat{\tau}^{+}_{z\lambda\beta}(+0)-\hat{\tau}^{-}_{z\lambda\beta}(-0)$$

и учесть (1.14), то условия непрерывности (сопряжения) можно записать в виде

$$X^{-}_{j\lambda\beta}=X^{-}_{j\lambda\beta}+A_{j\lambda\beta},\quad Y^{-}_{j\lambda\beta}=Y^{+}_{j\lambda\beta}+B_{j\lambda\beta}\quad (j=\overline{1,3}) \tag{2.13}$$

Откуда следует, в частности, что

$$\tilde{X}^{-}_{\lambda\beta}=\tilde{X}^{+}_{\lambda\beta}+\tilde{A}^{-}_{\lambda\beta},\quad \tilde{Y}_{\lambda\beta}=\tilde{Y}^{+}_{\lambda\beta}+\tilde{B}_{\lambda\beta} \tag{2.14}$$

Для решения системы уравнений (2.9) и (2.13), умножим второе и пятое уравнение на $i\beta$, а второе шестое на $i\lambda$ и сложим их. В результате вместо (2.9) получим, с учетом (2.7) уравнения относительно неизвестных $X^{\pm}_{1\lambda\beta}$, $Y^{\pm}_{1\lambda\beta}$, $\tilde{X}_{\lambda\beta}$, $\tilde{Y}_{\lambda\beta}$:

$$G_{+}X^{+}_{1\lambda\beta}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}=\delta^{+}_{\mu}\tilde{X}^{+}_{\lambda\beta}-\gamma^{+}_{\mu}Y^{+}_{1\lambda\beta},\quad G_{-}X^{-}_{1\lambda\beta}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}=$$

$$=\gamma^{-}_{\mu}Y^{-}_{1\lambda\beta}-\delta^{-}_{\mu}\tilde{X}^{-}_{\lambda\beta},\quad G_{+}\tilde{X}^{+}_{\lambda\beta}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}=(\lambda^2+\beta^2)\delta^{+}_{\mu}X^{+}_{1\lambda\beta}-\gamma^{+}_{\mu}\tilde{Y}^{+}_{\lambda\beta} \tag{2.15}$$

$$G_{-}\tilde{X}^{-}_{\lambda\beta}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}=\gamma^{-}_{\mu}\tilde{Y}^{-}_{\lambda\beta}-(\lambda^2+\beta^2)\delta^{-}_{\mu}X^{-}_{1\lambda\beta}$$

Рассматривая первые два уравнения как систему относительно $X^{+}_{1\lambda\beta}$ и $\tilde{X}^{+}_{\lambda\beta}$, а оставшиеся уравнения как систему относительно $X^{-}_{1\lambda\beta}$ и $\tilde{X}^{-}_{\lambda\beta}$, находим

$$X^{\pm}_{1\lambda\beta}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}=\mp\Gamma^{\pm}_{\mu}\left[G_{\pm}Y^{\pm}_{1\lambda\beta}\pm\delta^{\pm}_{\mu}\tilde{Y}^{\pm}_{\lambda\beta}(\lambda^2+\beta^2)^{-1/2}\right]$$

$$\tilde{X}^{\pm}_{\lambda\beta}=\mp\Gamma^{\pm}_{\mu}\left[\pm\delta^{\pm}_{\mu}Y^{\pm}_{1\lambda\beta}+G_{\pm}\tilde{Y}^{\pm}_{\lambda\beta}(\lambda^2+\beta^2)^{-1/2}\right],\quad \Gamma^{\pm}_{\mu}=\gamma^{\pm}_{\mu}[G^2_{\pm}-(\delta^{\pm}_{\mu})^2]^{-1} \tag{2.16}$$

С учетом условий сопряжения (2.13), (2.14), соотношения (2.16) в результате исключения $X^{+}_{1\lambda\beta}$ и $\tilde{X}^{+}_{\lambda\beta}$, приводится к уравнениям

$$\Gamma_{1\mu}Y^{+}_{1\lambda\beta}-\Gamma_{2\mu}\tilde{Y}^{+}_{\lambda\beta}(\lambda^2+\beta^2)^{-1/2}=A_{1\lambda\beta}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}-\Gamma^{-}_{\mu}[G_{-}B_{1\lambda\beta}-\delta^{-}_{\mu}\tilde{B}_{\lambda\beta}(\lambda^2+\beta^2)^{-1/2}]$$

$$\Gamma_{2\mu}Y_{1\lambda\beta}^{+}-\Gamma_{1\mu}\tilde{Y}_{\lambda\beta}^{+}(\lambda^2+\beta^2)^{-1/2}=-\tilde{A}_{\lambda\beta}+\Gamma_{\mu}^{-}[-\delta_{\mu}^{-}B_{1\lambda\beta}+G_{-}\tilde{B}_{\lambda\beta}(\lambda^2+\beta^2)^{-1/2}]$$

$$\Gamma_{1\mu}=\Gamma_{\mu}^{-}G_{-}+\Gamma_{\mu}^{+}G_{+},\quad \Gamma_{2\mu}=\Gamma_{\mu}^{-}\delta_{\mu}^{-}+\Gamma_{\mu}^{+}\delta_{\mu}^{-} \tag{2.17}$$

Решая полученную систему, находим

$$Y_{1\lambda\beta}^{+}\Delta_{\mu}=\Gamma_{1\mu}A_{1\lambda\beta}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}+\Gamma_{2\mu}\tilde{A}_{\lambda\beta}-\Gamma_{\mu}^{-}\Omega_{2\mu}^{-}B_{1\lambda\beta}+$$

$$+\Gamma_{\mu}^{-}\Omega_{1\mu}^{-}\tilde{B}_{\lambda\beta}(\lambda^2+\beta^2)^{-1/2},\quad \tilde{Y}_{\lambda\beta}^{+}\Delta_{\mu}=\sqrt{\lambda^2+\beta^2}\Big[\Gamma_{2\mu}A_{2\lambda\beta}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}+ \tag{2.18}$$

$$+\Gamma_{1\mu}\tilde{A}_{\lambda\beta}+\Gamma_{\mu}^{-}\Omega_{1\mu}^{-}B_{1\lambda\beta}-\Gamma_{\mu}^{-}\Omega_{2\mu}^{-}\tilde{B}_{\lambda\beta}(\lambda^2+\beta^2)^{-1/2}\Big]$$

$$\Delta_{\mu}=\Gamma_{1\mu}^{2}-\Gamma_{2\mu}^{2},\quad \Omega_{1\mu}^{\pm}=\Gamma_{1\mu}\delta_{\mu}^{\pm}\pm\Gamma_{2\mu}G_{\pm},\quad \Omega_{2\mu}^{\pm}=\Gamma_{1\mu}G_{\pm}\pm\Gamma_{2\mu}\delta_{\mu}^{\pm} \tag{2.19}$$

Подставляя (2.18) в (2.16), и учитывая обозначения

$$\Omega_{1\mu}=\Omega_{1\mu}^{-}\delta_{\mu}^{+}-\Omega_{2\mu}^{-}G_{+},\quad \Omega_{2\mu}=\Omega_{1\mu}^{-}G_{+}-\Omega_{2\mu}^{-}\delta_{\mu}^{+} \tag{2.20}$$

найдем

$$X_{1\lambda\beta}^{+}\Delta_{\mu}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}=-\Gamma_{\mu}^{+}\Big[\Omega_{2\mu}^{+}A_{1\lambda\beta}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}+\Omega_{1\mu}^{+}\tilde{A}_{\lambda\beta}+\Gamma_{\mu}^{-}(\Omega_{1\mu}B_{1\lambda\beta}+$$

$$+\Omega_{2\mu}\tilde{B}_{\lambda\beta}(\lambda^2+\beta^2)^{-1/2}\Big],\quad \tilde{X}_{\lambda\beta}^{+}\Delta_{\mu}=-\Gamma_{\mu}^{+}\Big[\Omega_{1\mu}^{+}A_{1\lambda\beta}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}+\Omega_{2\mu}^{+}\tilde{A}_{\lambda\beta}+ \tag{2.21}$$

$$+\Gamma_{\mu}^{-}(\Omega_{2\mu}B_{1\lambda\beta}+\Omega_{1\mu}\tilde{B}_{\lambda\beta}(\lambda^2+\beta^2)^{-1/2}\Big]$$

Итак, система уравнений (2.15), (2.13) решена. Чтобы решить исходную систему (2.9), примем во внимание, что в силу (2.18), (2.21) и (2.13), (2.14) неизвестные коэффициенты (2.10) переходят в разряд известных. Поэтому систему (2.9) запишем в виде

$$G_{+}X_{2\lambda\beta}^{+}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}+Y_{2\lambda\beta}^{+}=-i\beta\Omega_{\lambda\beta}^{+},\quad G_{+}X_{3\lambda\beta}^{+}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}+Y_{3\lambda\beta}^{+}=-i\lambda\Omega_{\lambda\beta}^{+}$$

$$G_{-}X_{2\lambda\beta}^{+}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}-Y_{2\lambda\beta}^{+}=B_{2\lambda\beta}-G_{-}A_{2\lambda\beta}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}-i\beta\Omega_{\lambda\beta}^{-} \tag{2.22}$$

$$G_{-}X_{3\lambda\beta}^{+}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}-Y_{3\lambda\beta}^{+}=B_{3\lambda\beta}-G_{-}A_{3\lambda\beta}\sqrt{\lambda^2+\beta^2}-i\lambda\Omega_{\lambda\beta}^{-}$$

Решая совместно первое и третье уравнение, находим

$$X_{2\lambda\beta}^{+}=\frac{1}{G_{+}+G_{-}}\left[\frac{B_{2\lambda\beta}}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}-G_{-}A_{2\lambda\beta}+\frac{i\beta(\Omega_{\lambda\beta}^{-}-\Omega_{\lambda\beta}^{+})}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}\right]$$

$$\frac{Y_{2\lambda\beta}^{+}}{\sqrt{\beta^2+\lambda^2}}=\frac{1}{G_{+}+G_{-}}\left[G_{+}G_{-}A_{2\lambda\beta}-\frac{G_{+}B_{2\lambda\beta}}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}-\frac{i\beta(G_{-}\Omega_{\lambda\beta}^{-}-G_{+}\Omega_{\lambda\beta}^{+})}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}\right] \tag{2.23}$$

Из второго и четвертого уравнения системы (2.22) находим

$$X_{3\lambda\beta}^{+}=\frac{1}{G_{+}+G_{-}}\left[\frac{B_{3\lambda\beta}}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}-G_{-}A_{3\lambda\beta}+\frac{i\lambda(\Omega_{\lambda\beta}^{-}-\Omega_{\lambda\beta}^{+})}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}\right] \tag{2.24}$$

$$\frac{Y_{3\lambda\beta}^{+}}{\sqrt{\beta^2+\lambda^2}}=\frac{1}{G_{+}+G_{-}}\left[G_{+}G_{-}A_{3\lambda\beta}-\frac{G_{+}B_{3\lambda\beta}}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}-\frac{i\lambda(G_{-}\Omega_{\lambda\beta}^{+}-G_{+}\Omega_{\lambda\beta}^{-})}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}\right]$$

Подставив в (2.23) и (2.24) выражения для $\Omega^{\pm}_{\lambda\beta}$, полученные подстановкой (2.18) и (2.21) в (2.10) с учетом (2.14), найдем

$$X^{+}_{2\lambda\beta}=\frac{1}{G_{+}+G_{-}}\left[\frac{i\beta O_{1\mu}A_{1\lambda\beta}}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}-G_{-}A_{2\lambda\beta}+\frac{i\beta O_{0\mu}\tilde{A}_{\lambda\mu}}{\lambda^2+\beta^2}+\frac{i\beta\Theta_{0\mu}B_{1\lambda\mu}}{\lambda^2+\beta^2}+\frac{B_{2\lambda\beta}}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}+\right. \tag{2.25}$$

$$\left.+\frac{i\beta\Theta_{0\mu}\tilde{B}_{\lambda\mu}}{(\lambda^2+\beta^2)^{3/2}}\right],\quad X^{+}_{3\lambda\beta}=\frac{1}{G_{+}+G_{-}}\left[\frac{i\lambda O_{1\mu}A_{1\lambda\beta}}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}-G_{-}A_{3\lambda\beta}+\frac{i\lambda O_{0\mu}\tilde{A}_{\lambda\mu}}{\lambda^2+\beta^2}+\frac{i\lambda\Theta_{1\mu}B_{1\lambda\mu}}{\lambda^2+\beta^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{B_{3\lambda\beta}}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}+\frac{i\lambda\Theta_{0\mu}\tilde{B}_{\lambda\mu}}{(\lambda^2+\beta^2)^{3/2}}\right],\quad \frac{Y^{+}_{2\lambda\beta}}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}=\frac{1}{G_{+}+G_{-}}\left[G_{-}G_{+}A_{2\lambda\beta}-\frac{i\beta\tilde{O}_{1\mu}A_{1\lambda\beta}+G_{+}B_{2\lambda\beta}}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{i\beta(\tilde{O}_{0\mu}\tilde{A}_{\lambda\beta}+\tilde{\Theta}_{1\mu}B_{1\lambda\beta})}{\lambda^2+\beta^2}-\frac{i\beta\tilde{\Theta}_{0\mu}\tilde{B}_{\lambda\beta}}{(\lambda^2+\beta^2)^{3/2}}\right],\quad \frac{Y^{+}_{3\lambda\beta}}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}=\frac{1}{G_{+}+G_{-}}\left[G_{-}G_{+}A_{3\lambda\beta}-\right.$$

$$\left.-\frac{i\lambda\tilde{O}_{1\mu}A_{1\lambda\beta}+G_{+}B_{3\lambda\beta}}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}-\frac{i\lambda(\tilde{O}_{0\mu}\tilde{A}_{\lambda\beta}+\tilde{\Theta}_{1\mu}B_{1\lambda\beta})}{\lambda^2+\beta^2}-\frac{i\beta\tilde{\Theta}_{0\mu}\tilde{B}_{\lambda\beta}}{(\lambda^2+\beta^2)^{3/2}}\right]$$

$$O_{1\mu}=\delta^{-}_{\mu}+\Delta^{-1}_{\mu}(\Gamma_{2\mu}\Delta_{1\mu}-\Gamma^{+}_{\mu}\Omega^{+}_{2\mu}\Lambda_{1\mu}),\quad O_{0\mu}=\Delta^{-1}_{\mu}(\Gamma_{1\mu}\Delta_{1\mu}-\Gamma^{+}_{\mu}\Omega^{+}_{1\mu}\Lambda_{1\mu}) \tag{2.26}$$

$$\Theta_{1\mu}=\Gamma^{-}_{\mu}\Delta^{-1}_{\mu}(\Omega^{-}_{1\mu}\Delta_{1\mu}-\Gamma^{+}_{\mu}\Omega_{1\mu}\Lambda_{1\mu}),\quad \tilde{O}_{1\mu}=G_{+}\delta^{-}_{\mu}+\Delta^{-1}_{\mu}(\Gamma_{2\mu}\Delta_{2\mu}-\Gamma^{+}_{\mu}\Omega^{+}_{2\mu}\Lambda_{2\mu})$$

$$\Theta_{0\mu}=0,25(1-\mu_{-})^{-1}-\Gamma^{-}_{\mu}\Delta^{-1}_{\mu}(\Omega^{-}_{2\mu}\Delta_{1\mu}+\Gamma^{+}_{\mu}\Omega_{2\mu}\Lambda_{1\mu})$$

$$\tilde{O}_{0\mu}=\Delta^{-1}_{\mu}(\Gamma_{1\mu}\Delta_{2\mu}-\Gamma^{+}_{\mu}\Omega^{+}_{1\mu}\Lambda_{2\mu}),\quad \tilde{\Theta}_{1\mu}=\Gamma^{-}_{\mu}\Delta^{-1}_{\mu}(\Omega^{-}_{1\mu}\Delta_{2\mu}-\Gamma^{+}_{\mu}\Omega_{1\mu}\Lambda_{2\mu})$$

$$\tilde{\Theta}_{0\mu}=0,25G_{+}(1-\mu_{-})^{-1}-\Gamma^{-}_{\mu}\Delta^{-1}_{\mu}(\Omega^{-}_{2\mu}\Delta_{2\mu}+\Gamma^{+}_{\mu}\Omega_{2\mu}\Lambda_{2\mu})$$

Помимо ранее введенных комбинаций параметров (2.20), (2.21), (2.17), (2.7) следует принять во внимание и следующие

$$\begin{aligned}&\Delta_{1\mu}=(4(1-\mu_{-}))^{-1}-(4(1-\mu_{-}))^{-1},\quad \Lambda_{2\mu}=\delta^{-}_{\mu}G_{+}-\delta^{+}_{\mu}G_{-}\\&\Delta_{1\mu}=G_{+}(4(1-\mu_{-}))^{-1}+G_{-}(4(1-\mu_{-}))^{-1},\quad \Lambda_{2\mu}=\delta^{-}_{\mu}-\delta^{+}_{\mu}\end{aligned} \tag{2.27}$$

Таким образом, все введенные неизвестные величины, входящие в разрывные решения, найдены. Подставив их значения в (2.6), найдем трансформанты скачков гармонических функций, а по формулам (2.5) и трансформанты самих гармонических функций. Пользуясь формулами обращения для двукратного преобразования, найдем оригиналы этих функций. Подставив их в формулы

$$u^{\pm}=\Psi^{\pm}_{1}+x\Psi^{\pm}_{0},\quad v^{\pm}=\Psi^{\pm}_{2}+x\Psi^{\pm}_{0},\quad w^{\pm}=\Psi^{\pm}_{3}+x\Psi^{\pm}_{0}$$

найдем разрывные решения, а формулы (2.1) дадут решение поставленной задачи. Если не интересоваться полным полем напряжений, а ограничится значениями напряжений и смещений на границе раздела материалов, то процедуру построения решения можно существенно упростить. Например, пусть необходимо найти только напряжение $\sigma_x(0, y, z)$. Его можно найти по формуле

$$\sigma_x(0,y,z)=\sigma^{+}_x(0,y,z)+\hat{\sigma}^{+}_x(0,y,z) \tag{2.28}$$

причем $\hat{\sigma}_x^+(0,y,z)$ по постановке задачи известно. Остается найти $\sigma_x^+(0, y, z)$. В начале найдем его трансформанту, которая согласно (2.2) совпадает с $Y_{1\lambda\beta}^+$, и таким образом

$$\sigma_x^+(0,y,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}Y_{1\lambda\beta}^+e^{-i(\lambda z+\beta y)}d\lambda d\beta \tag{2.29}$$

Аналогично, если нас интересует $u(0, y, z)$, т. е. нормальное смещение на границе раздела материалов, то его найдем по формуле

$$u(0,y,z)=(2G_+)^{-1}u^+(+0,y,z)+\hat{u}^+(0,y,z) \tag{2.30}$$

причем $\hat{u}^+(0,y,z)$ известно. Чтобы найти первое слагаемое, необходимо учесть, что для ее трансформанты справедлива формула $u_{\lambda\beta}(+0) = (2G_+)^{-1}u_{\lambda\beta}^+(+0) = X_{1\lambda\beta}^+$, и поэтому

$$u^+(+0,y,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}X_{1\lambda\beta}^+e^{-i(\lambda z+\beta y)}d\lambda d\beta \tag{2.31}$$

3. Частные случаи задачи о напряженном состоянии кусочно-однородного пространства. Пусть рассматриваемое кусочно-однородное пространство загружено единичной сосредоточенной силой в точке $x = l$, $y = b$, $z = 0$. Для решения поставленной задачи Кельвина для кусочно-однородной изотропной среды, следует учесть, что в этом случае согласно, например [4], имеем

$$\hat{u}^-=\hat{v}^-=\hat{w}^-=\hat{\sigma}_x^-=\hat{\tau}_{xy}^-=\hat{\tau}_{xz}^-=0,\quad \hat{u}^+=\frac{1}{16G_+(1-\mu_+)\pi r}\left[\chi_++\frac{(x-l)^2}{r^2}\right],\ldots \tag{3.1}$$

$$\hat{\tau}_{xz}^+=-\frac{z}{8G_+(1-\mu_+)\pi r^3}\left[3\left(\frac{x-l}{r}\right)^2+(1-2\mu_+)\right],\quad r=\sqrt{(x-l)^2+(y-b)^2+z^2}$$

Применяя к этим формулам двукратное преобразование Фурье по переменным x, y, используя при этом формулу ([5], стр. 79):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)}{e^{-i(\beta y+\lambda z)}}dydz=2\pi\int_0^\infty t\Phi(t)J_0\left(t\sqrt{\lambda^2+\beta^2}\right)dt \tag{3.2}$$

согласно (2.12) найдем

$$A_{1\lambda\beta}=\frac{e^{-l\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}}{8G_+(1-\mu_+)}\left[\frac{4(1-\mu_+)\gamma_\mu^+}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}+l\right],\quad A_{2\lambda\beta}=\frac{il\beta e^{-l\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}}{8G_+(1-\mu_+)\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}$$

$$A_{3\lambda\beta}=\frac{il\lambda e^{-l\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}}{8G_+(1-\mu_+)\sqrt{\lambda^2+\beta^2}},\quad \tilde{A}_{\lambda\beta}=\frac{-l\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}{8G_+(1-\mu_+)e^{l\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}}$$

$$B_{1\lambda\beta}=\frac{2\mu_++l\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}{-4(1-\mu_+)e^{l\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}},\quad B_{2\lambda\beta}=\frac{i\beta\left[l\sqrt{\lambda^2+\beta^2}+(1-2\mu_+)\right]}{4(1-\mu_+)\sqrt{\lambda^2+\beta^2}\,e^{l\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}} \tag{3.3}$$

$$B_{3\lambda\beta}=\frac{i\lambda\left[l\sqrt{\lambda^2+\beta^2}+(1-2\mu_+)\right]}{4(1-\mu_+)\sqrt{\lambda^2+\beta^2}\,e^{l\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}},\quad \tilde{B}_{\lambda\beta}=\frac{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}\left[l\sqrt{\lambda^2+\beta^2}+(1-2\mu_+)\right]}{-4(1-\mu_+)e^{l\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}}$$

Подставляя эти выражения в (2.18) и вычисляя интеграл (2.29) с использованием формулы (3.2), причем в ней предварительно нужно сделать замену $\beta \to y$, $\lambda \to z$, $-y \to \beta$, $-\lambda \to z$, найдем

$$\sigma_x^+(+0,y,z) = \frac{B_{11}(2l^2+r_*^2)}{(l^2+r_*^2)^{5/2}} + \frac{B_{12}}{(l^2+r_*^2)^{3/2}}, \quad B_{11} = \frac{\Gamma_{1\mu} - \Gamma_{2\mu} - 2G_+\Gamma_\mu^-(\Omega_{1\mu}^- - \Omega_{2\mu}^-)}{32\pi\Delta_\mu G_+(1-\mu_+)}$$

$$r_* = \sqrt{y^2+z^2}, \quad B_{12} = \frac{4\Gamma_{1\mu}\gamma_\mu^+(1-\mu_+) - 2G_+\Gamma_\mu^-[(1-2\mu_+)\Omega_{1\mu}^- - 2\Omega_{2\mu}^-\mu_+]}{32\pi\Delta_\mu G_+(1-\mu_+)} \tag{3.4}$$

Аналогичные операции над формулой (2.30) приводят к результату

$$u^+(+0,x,y) = \frac{A_{11}l^2}{(l^2+r_*^2)^{3/2}} + \frac{A_{12}}{(l^2+r_*^2)^{1/2}}, \quad A_{11} = \frac{\Gamma_\mu^+[\Omega_{2\mu}^+ - \Omega_{1\mu}^+ - 2G_+\Gamma_\mu^-(\Omega_{1\mu} + \Omega_{2\mu})]}{16\pi\Delta_\mu G_+(1-\mu_+)}$$

$$A_{12} = \frac{\Gamma_\mu^+[2\Omega_{2\mu}^+\gamma_\mu^+(1-\mu_+) - \Gamma_\mu^-[(1-2\mu_+)\Omega_{2\mu} - 2\Omega_{1\mu}\mu_+]}{8\pi\Delta_\mu G_+(1-\mu_+)} \tag{3.5}$$

Складывая полученные выражения (3.5), (3.4) соответственно с

$$\hat{u}^+(0,y,z) = (16G_+(1-\mu_+)\pi r_*)^{-1}(\chi_+ + l^2 r_*^{-2}) \tag{3.6}$$

$$\hat{\sigma}_x^+(0,y,z) = -(8G_+(1-\mu_+)\pi r_*^3)^{-1}(l^2 r_*^{-2} - (1-2\mu_+)) \tag{3.7}$$

получаем напряжение σ_x и смещения u в плоскости смены упругих свойств пространства. Аналогичные выражения получаются и для остальных компонент вектора смещений и тензора напряжений.

Если в полученном решении устремить G_- к нулю, то получим решение задачи Миндлина [4]. Этот предельный переход удобнее делать непосредственно в выражении для $X_{1\lambda\beta}^+$ из (2.21). Для этого следует учесть, что

$$\Gamma_\mu^\pm G_\pm^2 = 1-\mu_\pm, \;\; \Gamma_{1\mu} = (1-\mu_-)G_-^{-1} + (1-\mu_+)G_+^{-1}, \;\; 2\Gamma_{2\mu} = (1-2\mu_-)G_-^{-1} - (1-2\mu_+)G_+^{-1} \tag{3.8}$$

Откуда следует, что $\lim\limits_{G_-\to 0} \Gamma_\mu^-\Delta_\mu^{-1} = (\gamma_\mu^-)^{-1}$, $\lim\limits_{G_-\to 0} \Delta_\mu = \infty$, $\lim\limits_{G_-\to 0} \|\Omega_{1\mu}, \Omega_{2\mu}\| = -\gamma_\mu^-\|G_+, \delta_\mu^+\|$ и поэтому $X_{1\lambda\beta}^+ = (1-\mu_+)(\lambda^2+\beta^2)^{-1}G_+^{-2}(G_+B_{1\lambda\beta} + \delta_\mu^+\tilde{B}_{\lambda\beta})$; или с учетом (3.3):

$$X_{1\lambda\beta}^+ = -e^{-l\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}(8(1-\mu_+))^{-1}[(\lambda^2+\beta^2)^{-1} + \chi_+ l]$$

Подставив это выражение в (2.31) найдем

$$u^+(+0,y,z) = -(l^2+r_*^2)^{-1/2}(16\pi(1-\mu_+)G_+)^{-1}[1+\chi_+ l^2(l^2+r_*^2)^{-1}]$$

Складывая это выражение с (3.6) получаем нормальные смещения границы полупространства ($x > 0, -\infty < y, z < \infty$) при действии на него единичной сосредоточенной силы, действующей нормально к границе и удаленный от нее во внутрь на расстояние, равное l:

$$u(0,y,z) = -(1-2\mu_+)(8\pi(1-\mu_+)G_+ r_*)^{-1}[1 - l^2(l^2+r_*^2)^{-1}] \tag{3.9}$$

Рассмотрим еще случай, когда $G_- = \infty$. В этом случае на основании (3.8), (2.19) имеем ($j = 1, 2$):

$$\lim_{G_- \to \infty} \Gamma_\mu^- \Omega_{j\mu}^- \Delta_\mu^{-1} = 0, \quad \Delta_\mu = 0{,}25\chi_+ G_+^{-2}, \quad \Gamma_{j\mu} G_+ = (-1)^{j-1}(1/j - \mu_+)$$

и потому формулы (2.18) дают $Y_{1\lambda\beta}^+ \chi_+ = 4G_+[(1-\mu_+)A_{1\lambda\beta}\sqrt{\lambda^2+\beta^2} - 0{,}5(1-2\mu_+)\tilde{A}_{\lambda\beta}]$ или с учетом (3.3) $Y_{1\lambda\beta}^+ = e^{-l\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}(8(1-\mu_+))^{-1}[4(1-\mu_+) + 2l\sqrt{\lambda^2+\beta^2}]$.

Подставив это выражение в (2.29), найдем

$$\sigma_x^+(+0,\ y,\ z) = l(8\pi(1-\mu_+))^{-1}(l^2 + r_*^2)^{-3/2}[3 - 2\mu_+ - 3l^2(l^2 + r_*^2)^{-1}]$$

Сложив последнее выражение с (3.7), найдем граничные значения напряжения σ_x в полупространстве $x > 0$ с закрепленной границей $x = 0$.

4. Задача о концентрации напряжений возле кругового дефекта, расположенного в плоскости смены упругих свойств материалов. Рассматривается неограниченная упругая среда $-\infty < x, y, z < +\infty$, составленная из двух сцепленных полупространств $x < 0$ и $x > 0$, также как и в п. 1. В плоскости сцепления полупространств $x = 0$ находится круговой дефект радиуса a. Область, занятую дефектом, обозначим через Ω. Дефект полагаем общей природы, т.е. при переходе через него терпят разрыв непрерывности и напряжения и смещения. Для шести скачков поля смещений и напряжений введем обозначения ($j = \overline{1,\ 3}$):

$$\| \langle u \rangle,\ \langle v \rangle,\ \langle w \rangle \| = \| \chi_j(y,\ z) \|_1^3, \quad \chi_j(y,\ z) = 0, \quad y,\ z \notin \Omega \tag{4.1}$$

$$\| \langle \sigma_x \rangle,\ \langle \tau_{xy} \rangle,\ \langle \tau_{xz} \rangle \| = \| \upsilon_j(y,\ z) \|_1^3, \quad \upsilon_j(y,\ z) = 0, \quad y,\ z \notin \Omega \tag{4.2}$$

Такая ситуация имеет место, например, если в качестве дефекта взять тонкое включение, один берег которого $x = -0$ отслоился полностью от упругой среды, а другой берег полностью сцеплен с упругой средой. Будем считать, что к отслоившемуся берегу приложена нормальная $q_1(y, z)$ и касательные нагрузки $q_2(y, z)$, $q_3(y, z)$. Тогда на берегах описанного дефекта должны выполняться условия

$$\| \sigma_x,\ \tau_{xy},\ \tau_{xz} \|_{x=-0} = \| q_j(y,\ z) \|_1^3, \quad \| u,\ v,\ w \|_{x=+0} = \| f_j(y,\ z) \|_1^3 \tag{4.3}$$

где $f_j(y, z)$ функции, определяющие перемещения включения как жесткого тела [1]. Кроме того полагаем, что к включению приложена произвольная нагрузка с главным вектором $\mathbf{P}(P_1, P_2, P_3)$ и главным моментом $\mathbf{M}(M_1, M_2, M_3)$. Задачей является определение поля напряжений и смещений в упругой среде в том числе и на берегах дефекта и в частности контактные напряжения на не отслоившемся берегу $p_j(y, z)$, $j = \overline{1,\ 3}$. Эти напряжения связаны со скачками (4.2) соотношениями

$$\upsilon_j(y,\ z) = q_j(y,\ z) + p_j(y,\ z) \quad (j = \overline{1,\ 3}) \tag{4.4}$$

Для решения поставленной задачи примем во внимание следующее. Учитывая формулы (2.13) и считая, что к упругой среде приложены только указанные выше нагрузки, величины $A_{j\lambda\beta}$ и $B_{j\lambda\beta}$ можно рассматривать как трансформанты скачков (4.1), т.е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \| A_{j\lambda\beta} \|_1^3 e^{-j(\beta y+\lambda z)} d\beta d\lambda = \| \chi_j \|_1^3, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \| A_{j\lambda\beta} \|_1^3 e^{-j(\beta y+\lambda z)} d\beta d\lambda = \| \chi_j \|_1^3 \tag{4.5}$$

Иными словами в п. 2 построены разрывные решения для кусочно-однородного пространства с заданными скачками (4.1) на дефекте Ω.

Поэтому применяя к уравнениям (2.18), (2.21), (2.23)–(2.25) обратное преобразование Фурье по λ и β с учетом (4.3) аналогично [1] приходим к следующей системе уравнений, заданной в области Ω:

$$\begin{gathered}
b_{11}\upsilon_1 + b_{12}\sum_{j=2}^{3}\partial_j K_1[\upsilon_j] + a_{11}\Delta K_1[\chi_1] + a_{12}\sum_{j=2}^{3}\partial_j\chi_j = q_1 \\
b_{21}\partial_k K_1[\upsilon_1] + b_{22}\upsilon_k + b_{23}\sum_{j=2}^{3}\partial^2_{k,j}K_2[\upsilon_j] + a_{21}\partial_j\chi_1 + \\
+a_{22}\Delta K_1[\chi_k] + a_{23}\sum_{j=2}^{3}\partial^2_{k,j}K_1[\chi_j] = q_k \quad (k=2,\ 3) \\
b_{31}K_1[\upsilon_1] + b_{32}\sum_{j=2}^{3}\partial_j K_2[\upsilon_j] + a_{31}\chi_1 + a_{32}\sum_{j=2}^{3}\partial_j K_1[\chi_j] = f_1 \\
b_{41}\partial_k K_2[\upsilon_1] + b_{42}K_1[\upsilon_k] + b_{43}\sum_{j=2}^{3}\partial^2_{k,j}K_3[\upsilon_j] + \\
+a_{41}\partial_k K_1[\chi_1] + a_{42}\chi_k + a_{43}\sum_{j=2}^{3}\partial^2_{k,j}K_2[\chi_j] = f_k \quad (k=2,\ 3)
\end{gathered} \tag{4.6}$$

$$b_{1k} = 2-k+(-1)^k\frac{\Gamma^-_\mu\Omega^-_{(3-k)\mu}}{\Delta_\mu},\quad a_{1k}=\frac{\Gamma_{k\mu}}{\Delta_\mu}(k=1,\ 2),\quad b_{21}=\frac{\tilde\Theta_{1\mu}}{\Delta_0},\quad b_{22}=1-\frac{G_+}{\Delta_0},\quad b_{23}=\frac{\tilde\Theta_{0\mu}}{\Delta_0}$$

$$a_{21}=\frac{\tilde\Theta_{1\mu}}{\Delta_0},\quad a_{22}=\frac{G_+G_-}{\Delta_0},\quad a_{23}=-\frac{\tilde\Theta_{0\mu}}{\Delta_0},\quad b_{3k}=(-1)^{k-1}\frac{\Gamma^+_\mu\Gamma^-_\mu\Omega_{k\mu}}{\Delta_\mu},\quad a_{3k}=(-1)^k\frac{\Gamma^+_\mu\Omega^+_{(3-k)\mu}}{\Delta_\mu}$$

$$(k=1,\ 2),\quad b_{41}=-\frac{\Theta_{1\mu}}{\Delta_0},\quad b_{42}=\frac{1}{\Delta_0},\quad b_{43}=-\frac{\Theta_{0\mu}}{\Delta_0},\quad a_{41}=-\frac{O_{1\mu}}{\Delta_0},\quad a_{42}=-\frac{G_-}{\Delta_0}$$

$$a_{43}=\frac{O_{0\mu}}{\Delta_0},\quad \Delta_0=G_++G_-,\quad \|\partial_k\|_1^3=\|\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z\|,\quad \partial^2_{jk}=\partial_j\partial_k$$

Операторы K_j ($j = 1, 2, 3$) определяются следующим образом

$$K_j[f]=\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega f(t,\ s)R^{(j)}(y-t,\ z-s)dtds \tag{4.7}$$

$$R^{(j)}(t,\ s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(\beta t-\lambda s)}\sqrt{(\beta^2+\lambda^2)^{-j}}\,d\beta d\lambda \tag{4.8}$$

Для функции $R^{(1)}(t, s)$, используя известную формулу ([5], стр. 79), получаем выражение $R^{(1)}(t,\ s)=(t^2+s^2)^{-1/2}$. При j = 2, 3 интеграл (4.8) расходящийся, но он становится сходящимся если рассматривать не саму функцию $R^{(j)}(t, s)$, а ее производные (при j = 3 вторые). В системе (4.6) присутствуют именно производные от операторов K_2 и K_3.

Если включение неотслоившееся и имеет место полное сцепление со средой, то реализовав второе условие из (4.2), с учетом непрерывности перемещений при переходе через дефект, т.е. $\chi_j(y, z) = 0$, получим относительно искомых скачков напряжений $\upsilon_j(y, z)$ в области Ω систему трех следующих уравнений

$$\begin{gathered}
b_{31}K_1[\upsilon_1] + b_{32}\sum_{j=2}^{3}\partial_j K_2[\upsilon_j] = f_1 \quad (k=2,\ 3) \\
b_{41}\partial_k K_2[\upsilon_1] + b_{42}K_1[\upsilon_k] + b_{43}\sum_{j=2}^{3}\partial^2_{k,j}K_3[\upsilon_j] = f_k
\end{gathered} \tag{4.9}$$

Если неотслоившееся включение находится с упругой средой в гладком контакте, то равными нулю будут скачки касательных напряжений и нормальных смещений, т.е. $v_j(y, z) = 0, j = 2, 3, \chi_j(y, z) = 0$. Следовательно, реализовав последние два условия ($j = 2, 3$) в первом соотношении из (4.3) и первое ($j = 1$) из (4.3), получим относительно искомых скачков нормального напряжения $v_1(y, z)$ и касательных смещений $\chi_k(y, z)$ ($k = 2, 3$), также систему из трех уравнений

$$b_{21}\partial_k K_1[v_1] + a_{22}\Delta K_1[\chi_k] + a_{23}\sum_{j=2}^{3}\partial_{k,j}^2 K_1[\chi_j] = 0$$

$$b_{31}K_1[v_1] + a_{32}\sum_{j=2}^{3}\partial_j K_1[\chi_j] = f_1 \quad (k = 2,\ 3) \tag{4.10}$$

Если дефектом является круговая трещина и на ее берегах заданы напряжения, то реализуя первое условие из (4.3) с учетом того, что $v_j(y, z) = 0,\ j = \overline{1,\ 3}$, относительно искомых скачков смещений $\chi_j(y, z)$ $(j = \overline{1,\ 3})$ получим систему из трех первых уравнений (4.6), которые можно записать в виде

$$a_{11}\Delta K_1[\chi_1] + a_{12}\sum_{j=2}^{3}\partial_j\chi_j = q_1 \quad (k = 2,\ 3)$$

$$a_{21}\partial_j\chi_1 + a_{22}\Delta K_1[\chi_k] + a_{23}\sum_{j=2}^{3}\partial_{k,j}^2 K_1[\chi_j] = q_k \tag{4.11}$$

Здесь q_k ($k = 1, 2, 3$) заданные функции, которые либо совпадают с функциями из (4.3), либо отличаются от последних присутствием линейной комбинации известных скачков напряжений (в случае если на противоположных берегах трещины заданы различные напряжения).

Полученная система (4.6) является обобщением системы (7.2.4) из [1], формализующей задачу об отслоившемся включении в однородной неограниченной среде. Сравнивая эти системы, с учетом того, что $K_1 = -2K, K_3 = 2K$, нетрудно заметить, что учет неоднородности пространства приводит, наряду с усложнением коэффициентов, к появлению новых слагаемых, содержащих оператор K_2, а также слагаемых, содержащих производные скачка нормальных смещений во втором и третьем уравнениях.

Обобщим методику решения задачи для однородного пространства, предложенную в [1], на рассматриваемый случай. Для этого необходимо к системе (4.6) применить преобразования, описанные в п. 7.2.2 [1]. При этом, для преобразования оператора K_2, необходимо использовать теорему о свертке и соотношения

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-i\varphi n}d\varphi}{r - \rho e^{\pm i\varphi}} \equiv J_{\pm n}(r,\ \rho) = \begin{cases} 0, & r < \rho \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{\pm n}, & r > \rho \end{cases},$$

$$J_{\pm n}(r,\ \rho) = W_{n\pm 1,\ n} = \int_0^{\infty} J_{n\pm 1}(rt)J_n(\rho t)dt$$

полученные путем контурного интегрирования с последующим использованием интеграла 6.575 из [6]. Нетрудно также установить следующие формулы:

$$F_n\{(\partial_r + \partial_\varphi)^2 K_2[\tau^* e^{-i\varphi}]\} = -(\partial_r - n)W_{n,n-1}^0[\tau_{-n}^*],$$

$$F_n\{e^{i\varphi}(\partial_r - \partial_\varphi)K_2[v_1 e^{-i\varphi}]\} = -W_{n+1,n}^0[\sigma_n]$$

$$F_n\{e^{-i\varphi}(\partial_r^2+\partial_\varphi^2)K_2[\tau^* e^{i\varphi}]\} = -(\partial_r+n+2)W^0_{n+2,n+1}[\tau^*_{-n}] \tag{4.12}$$

$$F_n\{(\partial_r+\partial_\varphi)K_2[\bar u^* e^{-i\varphi}]\} = -W^0_{n,n-1}[\bar u^*_{-n}], \quad F_n\{(\partial_r-\partial_\varphi)K_2[\bar\tau^* e^{i\varphi}]\} = W^0_{n,n+1}[\bar\tau^*_{-n}]$$

$$\|\tau^*,\ u^*\| = \|\upsilon_2^*+i\upsilon_3^*,\ \chi_2^*+i\chi_3^*\|, \quad F_n[f]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi, \quad \partial_r \equiv r\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\|\sigma_n,\ u_n^*,\ \tau_n^*\| = F_n[\|\upsilon_1,\ u^*,\ r^*\|], \quad \bar\tau^*_{-n}=F_n[\bar\tau^*], \quad \bar u^*_{-n}=F_n[\bar u^*], \quad \partial_\varphi \equiv \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\upsilon_k^*(r,\ \varphi)=\upsilon_k(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi), \quad \chi_k^*(r,\ \varphi)=\chi_k(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$$

Интегральный оператор W^0_{nm} определен в (2.2.24) [1]. В результате двухмерная система (4.6) сводится к следующей

$$W^0_{n+1,n}[\tfrac12 a_{12}(\upsilon_n+\bar\upsilon_{-n})+b_{11}\sigma_n]+W^0_{n+1,n+1}[a_{11}w_n+\tfrac12 b_{12}\tau_n^*]-\tfrac12 b_{12}W^0_{n+1,n-1}[\bar\tau^*_{-n}]=g_n^{(1)}$$

$$W^0_{nn}[\tfrac12 a_{23}(\upsilon_n+\upsilon_{-n})-b_{21}\sigma_n-a_{22}(\delta_{2k}\upsilon_n+\delta_{3k}\bar\upsilon_{-n})]+W^0_{n,n+1}[a_{21}w_n+ \tag{4.13}$$

$$(\delta_{2k}b_{22}-\tfrac12 b_{23})\tau_n^*]+(\tfrac12 b_{12}-b_{22}\delta_{3k})W^0_{n,n-1}[\bar\tau^*_{-n}]=g_n^{(k)} \quad (k=2,\ 3)$$

$$W^0_{nn}[\tfrac12 a_{32}(\upsilon_n+\bar\upsilon_{-n})+b_{31}\sigma_n]-W^0_{n,n+1}[a_{31}w_n-\tfrac12 b_{32}\tau_n^*]-\tfrac12 b_{32}W^0_{n,n-1}[\bar\tau^*_{-n}]=g_n^{(4)}$$

$$\zeta W^0_{n+\zeta,n}[a_{42}(\delta_{2k}\upsilon_n+\delta_{3k}\bar\upsilon_{-n})-\tfrac12 a_{43}(\upsilon_n+\bar\upsilon_{-n})-b_{41}\sigma_n]+W^0_{n+\zeta,n+1}[\zeta a_{41}w_n+$$

$$+(\delta_{2k}b_{42}=\tfrac12 b_{43})\tau_n^*]-(\tfrac12 b_{42}-b_{42}\delta_{3k})W^0_{n,n-1}[\bar\tau^*_{-n}]=g_n^{(k)}, \quad k=2,\ 3,\ \zeta=(-1)^k$$

$$w_n(r)-r^n[r^{-n}\chi_n(r)]', \quad \upsilon_n(r)=r^{-n-1}[r^{n+1}u_n^*(r)]', \quad \chi_n=F_n[\chi_1]$$

$$g_n^{(1)}=-r^{-n-1}J[r^{n+1}q_n^{(1)}], \quad J[f]=\int_0^r f(s)ds, \quad q_n^{(j)}=F_n[q_j]$$

$$g_n^{(2)}=-r^nC_n+r^nJ_a[r^{-n-1}(q_{n+1}^{(2)}+iq_{n+1}^{(3)})], \quad g_n^{(5)}=F_n[e^{-i\varphi}(f_2+if_3)]$$

$$g_n^{(3)}=-r^{-n}(\bar C_0\delta_{n0}+J[r^n(q_{1-n}^{(2)}-iq_{1-n}^{(3)})]), \quad g_n^{(4)}=F_n[f], \quad g_n^{(6)}=\bar g_{-n}^{(5)}$$

где δ_{kj} – символ Кронекера. При этом имеет место

$$\|r^{-n}\chi_n,\ r^{n+1}u_n^*\| = -J_a[\|r^{-n-1}w_n,\ r^n\upsilon_n\|] \quad (n=\overline{0,\infty}), \quad \int_0^a r^n\upsilon_n(r)dr=0 \quad (n=\overline{0,\infty}) \tag{4.14}$$

Последнее равенство дает условия для фиксации постоянных интегрирования C_n.

В случае не отслоившегося, полностью сцепленного включения, применяя аналогичные преобразования к системе (4.9), вместо (4.13) получим

$$b_{31}W^0_{nn}[\sigma_n]-\tfrac12 b_{32}(W^0_{n,n+1}[\tau_n^*]-W^0_{n,n-1}[\bar\tau^*_{-n}])=g_n^{(4)}, \quad b_{41}\zeta W^0_{n+\zeta,n}[\sigma_n]+$$

$$+(\tfrac12 b_{42}-b_{42}\delta_{3k})(W^0_{n+\zeta,n+1}[\tau_n^*]+W^0_{n+\zeta,n-1}[\bar\tau^*_{-n}])=-g_n^{(k)} \quad (k=2,\ 3), \quad \zeta=(-1)^k \tag{4.15}$$

Система (4.10) после тех же преобразований примет вид

$$W^0_{nn}[\tfrac12 a_{23}(\upsilon_n+\bar\upsilon_{-n})-b_{21}\sigma_n+a_{22}(\delta_{2k}\upsilon_n+\delta_{3k}\bar\upsilon_{-n})]-g_n^{(k)}$$

$$W^0_{nn}[\tfrac12 a_{32}(\upsilon_n+\bar\upsilon_{-n})+b_{31}\sigma_n]-g_n^{(4)} \quad (k=2,\ 3) \tag{4.16}$$

Аналогично, в случае трещины система (4.11) приводится к виду

$$
\begin{aligned}
&W^0_{n+1,n}[\tfrac{1}{2}a_{12}(v_n+\bar{v}_{-n})]+W^0_{n+1,n+1}[a_{11}w_n]=g_n^{(1)} \\
&W^0_{nn}[\tfrac{1}{2}a_{23}(v_n+\bar{v}_{-n})-a_{22}(\delta_{2k}v_n+\delta_{3k}\bar{v}_{-n})]+W^0_{n,n+1}[a_{21}w_n]=g_n^{(k)} \quad (k=2,\ 3)
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Также как и в случае однородного пространства, система (4.13) при $n = 0$ расчленяется на две независимо решаемые системы. Действительно, вводя новые неизвестные

$$
\| w_0,\ \tau_+,\ \psi_+,\ \sigma_0 \| = \| \chi_j^0 \|_1^4, \quad 2\tau_\pm = \tau_0^* \pm \bar{\tau}_0^*, \quad 2\psi_\pm = v_0 \pm \bar{v}_0
$$

и выполняя сложения второго с третьим и пятого с шестым уравнением из (4.13), получим

$$
\begin{Vmatrix} A_{01}W_{01}^0 & A_{00}W_{00}^0 \\ A_{11}W_{11}^0 & A_{10}W_{10}^0 \end{Vmatrix} \boldsymbol{\chi}^0 = \mathbf{h}^0 \tag{4.18}
$$

$$
\boldsymbol{\chi}^0 = \| \chi_j^0 \|_1^4, \quad \mathbf{h}^0 = \| g_0^{(4)},\ \tfrac{1}{2}(g_0^{(2)}+g_0^{(3)}),\ \tfrac{1}{2}(g_0^{(5)}+g_0^{(6)}),\ g_0^{(1)} \|, \quad A_{11} = \begin{Vmatrix} a_{41} & b_{42} \\ a_{11} & b_{12} \end{Vmatrix}
$$

$$
A_{01} = \begin{Vmatrix} -a_{31} & b_{32} \\ a_{21} & b_{22}-b_{23} \end{Vmatrix}, \quad A_{00} = \begin{Vmatrix} a_{32} & b_{31} \\ a_{23}-a_{22} & -b_{23} \end{Vmatrix}, \quad A_{10} = \begin{Vmatrix} a_{43}-a_{42} & b_{32} \\ -a_{12} & -b_{11} \end{Vmatrix}
$$

Другую независимо решаемую систему

$$
\begin{aligned}
&(b_{42}-b_{43})W_{11}^0[\tau_-]+a_{42}W_{10}^0[\psi_-]=f_0^*, \quad b_{22}W_{01}^0[\tau_-]-a_{22}W_{00}^0[\psi_-]=f_1^* \\
&\| f_0^*,\ f_1^* \| = \tfrac{1}{2} \| g_0^{(5)}-g_0^{(6)},\ g_0^{(2)}-g_0^{(3)} \|
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

получим, выполнив операцию вычитания третьего уравнения со вторым и пятого из шестого из (4.13).

Системы (4.18) и (4.19) методом преобразующих операторов Сонина (п. 2.2.7 из [1], в котором новые неизвестные функции $\tilde{\chi}_j$ $(j=\overline{1,\ 4})$, φ_j $(j=1,\ 2)$:

$$
\| \chi_1^0,\ \chi_2^0,\ r\chi_3^0,\ r\chi_4^0 \| = -J^{-1}S_a^0 \| r^{-1}\tilde{\chi}_1,\ r^{-1}\tilde{\chi}_2,\ \tilde{\chi}_3,\ \tilde{\chi}_4 \|, \quad J^{-1}\varphi = \varphi'(r)
$$

$$
\| \tau_-,\ r\psi_- \| = -J^{-1}S_a^{(0)} \| r^{-1}\varphi_1,\ \varphi_2 \|, \quad S_a^{(0)}\varphi = \int_r^a \frac{\sqrt{2}s\varphi(s)ds}{\Gamma(\tfrac{1}{2})\sqrt{s^2-r^2}}
$$

содержатся под операторами

$$
L_0[f] = -\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} \ln|r-s| f(s)ds, \quad L_1[f] = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} \operatorname{sgn}(r-s)f(s)ds
$$

Система (4.18) при этом примет вид

$$
\begin{aligned}
&A_0L_0\boldsymbol{\chi} + A_1L_1\boldsymbol{\chi} = \mathbf{h}, \quad \boldsymbol{\chi} = \| \tilde{\chi}_j \|_1^4, \quad \mathbf{h} = \| h_j \|_1^4 \\
&h_j = S^{(0)}[rh_j^0] \quad (j=1,\ 2), \quad h_j = c^{(j)} - J^{-1}S^{(0)}[rJh_j] \quad (j=3,\ 4)
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

$$
A_0 = \begin{Vmatrix} A_{01} & 0 \\ 0 & A_{10} \end{Vmatrix}, \quad A_1 = \begin{Vmatrix} 0 & A_{00} \\ A_{11} & 0 \end{Vmatrix}
$$

Решение полученной системы должно обладать свойством (ср. [3]): $\|\chi_1(r), \chi_2(r)\| = -\|\chi_1(-r), \chi_2(-r)\|$, $\|\chi_3(r), \chi_4(r)\| = \|\chi_3(-r), \chi_4(-r)\|$, а правые части должны быть продолжены на отрицательные значения аргумента, причем $h_j(r)$ ($j = 1, 2$) – нечетным образом, а $h_j(r)$ ($j = 3, 4$) – четным образом ($c^{(3)}$, $c^{(4)}$ – неизвестные постоянные).

Умножив обе части равенства (4.20) на A_0^{-1}, получим

$$L_0\chi + CA_1L_1\chi = \mathbf{h}^*; \quad C = A_0^{-1}A_1; \quad \mathbf{h}^* = A_0^{-1}\mathbf{h} \tag{4.21}$$

Отметим, что выполненная операция законна, так как $\det A_0 = \det A_{01} \det A_{10} \neq 0$ при любых реальных сочетаниях упругих постоянных.

Матричное уравнение (4.21) представляет собой частный случай системы (2.2.48) из [1] при $n = 4$ и, следовательно, описанной в [1] методикой, сводится к четырем независимо решаемым уравнениям (2.2.94), где λ_j ($j = \overline{1,\ 4}$) являются корнями характеристического многочлена $\det(\lambda^2 I - A_{10}^{-1}A_{11}A_{01}^{-1}A_{00}) = 0$.

Система (4.19) также методом преобразующих операторов Сонина приводится к системе (2.2.56) из [1]. Система (4.13) допускает точное решение и в общем случае $n > 0$. Действительно, если ввести новые неизвестные $\| t_n,\ w_n^* \| = I_{n+1}^{(a)} \| \tau_n^*,\ w_n \|$, $I_n^{(a)}\varphi = r^{1-n} J^{-1}\{r^{2n-2} J_a[r^{-n}\varphi]\}$, $I_1^{(a)}\varphi = \varphi$ и учесть соотношения

$$W_{m,n+1}^0 \begin{Vmatrix} \tau_n^* \\ w_n \end{Vmatrix} = -W_{m,n+1}^0 \begin{Vmatrix} t_n \\ w_n^* \end{Vmatrix}, \quad \int_0^a \begin{Vmatrix} t_n \\ w_n^* \end{Vmatrix} \frac{dr}{r^{-n}} = 0, \quad n > 0$$

то, аналогично системе (7.2.41) из [1], получим

$$W_{21}^0[\tfrac{1}{2} a_{12}(\tilde{v}_n + \tilde{v}_n^*) + b_{11}\tilde{\sigma}_n] - W_{20}^0[a_{11}\tilde{w}_n^* + \tfrac{1}{2} b_{12}(\tilde{t}_n + \tilde{t}_n^*)] = r^2 G_n^{(1)}$$

$$W_{11}^0[(\tfrac{1}{2} a_{23} - a_{22})\tilde{v}_n + \tfrac{1}{2} a_{23}\tilde{v}_n^* - b_{21}\tilde{\sigma}_n] - W_{10}^0[a_{21}\tilde{w}_n^* + b_{22}\tilde{t}_n - \tfrac{1}{2} b_{23}(\tilde{t}_n + \tilde{t}_n^*)] = rG_n^{(2)}$$

$$W_{11}^0[(\tfrac{1}{2} a_{23} - a_{22})\tilde{v}_n^* + \tfrac{1}{2} a_{23}\tilde{v}_n - b_{21}\tilde{\sigma}_n] - W_{10}^0[a_{21}\tilde{w}_n^* + b_{22}\tilde{t}_n^* - \tfrac{1}{2} b_{23}(\tilde{t}_n + \tilde{t}_n^*)] = rG_n^{(3)}$$

$$W_{11}^0[\tfrac{1}{2} a_{32}(\tilde{v}_n + \tilde{v}_n^*) + b_{31}\tilde{\sigma}_n] + W_{10}^0[a_{31}\tilde{w}_n^* - \tfrac{1}{2} b_{32}(\tilde{t}_n + \tilde{t}_n^*)] = rG_n^{(4)}$$

$$W_{21}^0[(a_{42} - \tfrac{1}{2} a_{43})\tilde{v}_n - \tfrac{1}{2} a_{43}\tilde{v}_n^* - b_{41}\sigma_n] - W_{20}^0[a_{41}\tilde{w}_n^* + (b_{42} - \tfrac{1}{2} b_{43})\tilde{t}_n + \tfrac{1}{2}\tilde{t}_n^*] = r^2 G_n^{(5)}$$

$$-W_{01}^0[(a_{42} - \tfrac{1}{2} a_{43})\tilde{v}_n^* - \tfrac{1}{2} a_{43}\tilde{v}_n - b_{41}\sigma_n] - W_{00}^0[a_{41}\tilde{w}_n^* + (b_{42} - \tfrac{1}{2} b_{43})\tilde{t}_n^* + \tfrac{1}{2}\tilde{t}_n] = -G_n^{(6)}$$

Здесь введены новые неизвестные по формулам (7.2.42) из [1]. Правые части определены равенствами (7.2.43) [1], где $g_n^{j+3} = \varphi_j$ ($j = \overline{1,\ 3}$).

Расщепление полученной системы на две независимые и последующее их сведение к независимо решаемым уравнениям, осуществляется по той же схеме, что и для системы (4.13) при $n = 0$, если предварительно применить ко второму и пятому уравнению последней системы оператор I^-, определенный в (3.2.38) [1] и ввести новые неизвестные $2\tau_0^\pm = \tilde{t}_n \pm \tilde{t}_n^*$, $2v_n^\pm = \tilde{v}_n \pm \tilde{v}_n^*$.

Аналогично, методом преобразующих операторов Сонина строятся решения систем (4.15)–(4.17).

Рассмотрим, например, задачу о тонком жестком включении, полностью сцепленном с составной упругой средой, которая загружена единичной, сосредоточенной в точке $x = l$, $y = b$, $z = 0$ силой. Неизвестные скачки контактных напряжений в этом случае могут быть найдены из системы (4.9), если ее правые части f_j ($j = \overline{1,\ 3}$), заменить разностями $f_j - f_j^0$, где f_j^0 – смещения точек плоскости смены материалов в решении задачи Кельвина для составной среды, полученные в п. 3; а для функций f_j справедливы представления $f_1(y,\ z)=\delta_1+\phi_z y$, $f_2(y,\ z)=\delta_2$, $f_3(y,\ z)=0$, где δ_k $(k=1,2)$ – смещения включения соответственно вдоль осей OX, OY; ϕ_z – угол поворота включения вокруг оси OZ. Для определения величин $\delta_1, \delta_2, \phi_z$ служат условия равновесия включения

$$\iint\limits_{\Omega} v_j(y,\ z)dydz=0 \quad (j=1,\ 2), \quad \iint\limits_{\Omega} yv_1(y,\ z)dydz=0 \tag{4.22}$$

Как было показано выше, для определения трансформант искомых функций служит система (4.15), решение которой строится с помощью описанной выше методики. В результате, используя формулы обращения, найдем искомые скачки контактных напряжений

$$\begin{gathered}v_1(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)=v_1^*(r,\ \varphi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sigma_n(r)e^{in\varphi},\ \ \tau^*(r,\ \varphi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\tau_n^*(r)e^{in\varphi}\\ \tau^*(r,\ \varphi)=[v_2(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)+iv_2(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)]e^{-i\varphi}\end{gathered} \tag{4.23}$$

Переходя в соотношениях (4.22) к полярной системе координат и подставляя туда (4.23), получим следующие уравнения для определения $\delta_1, \delta_2, \phi_z$:

$$\int_0^a r^2[\sigma_1(r)+\sigma_{-1}(r)]dr\equiv \operatorname{Re}\int_0^a r^2\sigma_1(r)dr=0,\quad \int_0^a r\sigma_0(r)dr=0,\quad \operatorname{Re}\int_0^a r\tau_1^*(r)dr=0 \tag{4.24}$$

Для функций $\sigma_1(r)$, $\sigma_0(r)$, $\tau_1^*(r)$ получены следующие выражения

$$\sigma_1(r)=\frac{-1}{2(1-\mu^2)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dr}\int_r^a\left\{\operatorname{Im}\tilde{\Phi}'(s)-\frac{\mu_0}{\pi}\int_{-a}^a\operatorname{Re}\frac{S(s)\tilde{\Phi}'(\rho)}{S(\rho)}\frac{d\rho}{\rho-1}+\right.$$

$$\left.+(C_0+\delta_2-is(1-2a\beta_1)\phi_z)\frac{\mu_0\mu_1}{\operatorname{sh}\pi\beta_1}\operatorname{Im}S(s)\right\}\frac{ds}{\sqrt{s^2-r^2}}$$

$$\sigma_0(r)=\frac{1}{2(1-\mu_0^2)r}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dr}\int_r^a\left\{\operatorname{Re}\Phi'+\frac{\mu_0}{\pi}\int_{-a}^a\operatorname{Im}\frac{S(s)\Phi'(\rho)}{S(\rho)}\frac{d\rho}{\rho-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\mu_0\mu_1\delta_1}{\operatorname{sh}\pi\beta_1}\operatorname{Re}S(s)\right\}\frac{ds}{\sqrt{s^2-r^2}}$$

$$\tau_1^*(r)=\frac{-1}{(1-\mu_0^2)r}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dr}\int_r^a\left\{\operatorname{Re}\tilde{\Phi}'+\frac{\mu_0}{\pi}\int_{-a}^a\operatorname{Im}\frac{S(s)\tilde{\Phi}'(\rho)}{S(\rho)}\frac{d\rho}{\rho-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu_0\mu_1}{\operatorname{sh}\pi\beta_1}[(C_0+\beta_2+2a\beta_1\phi_z)\operatorname{Re}S(s)+s\phi_z\operatorname{Im}S(s)]\right\}\frac{ds}{\sqrt{s^2-r^2}}-\tau_1^-(r)$$

$$\tau_1^-(r)=\frac{G^-}{\pi(\gamma+1)^{-1}}\left[\frac{C_0-\delta_2}{\sqrt{a^2-r^2}}-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_r^a\frac{sds}{\sqrt{s^2-r^2}}\frac{d}{ds}\int_0^s\frac{\rho g(\rho)d\rho}{\sqrt{s^2-\rho^2}}\right] \tag{4.25}$$

$$\Phi(r)=\varphi_1(r)+i\varphi_2(r),\quad \tilde{\Phi}(r)=\tilde{\varphi}_1(r)+i\tilde{\varphi}_2(r),\quad \varphi_1(r)=-2b_{32}^{-1}S^{(0)}r[q_{1,0}]$$

$$q_{1,n}=F_n[f_1^0(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)],\quad \varphi_2(r)=b_{31}^{-1}J^{-1}S^{(0)}rJ[Q_0+\overline{Q}_0],\quad Q_n=F_n[Q(r,\ \varphi)e^{-i\varphi}]$$

$$Q(r,\ \varphi)=f_2^0(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)+if_3^0(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi),\quad \tilde{\varphi}_1(r)=-b_{32}^{-1}S^{(0)}r[\tilde{g}^+]$$

$$\tilde{\varphi}_2(r)=2b_{31}^{-1}J^{-1}S^{(0)}rJ[q_{1,1}],\quad \tilde{g}^{\pm}=I^{-}Q_1\mp\overline{Q}_{-1},\quad \mu_0=\frac{b_{32}}{b_{31}},\quad \mu_1=\frac{1}{b_{31}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\operatorname{ch}\pi\beta_1=\frac{1}{\sqrt{1-\mu_0^2}},\quad C_0=\frac{b_4-b_2}{2a},\quad b_4=\frac{\alpha_1[a(1-8\beta_1^2)b_1-9b_3]}{(1+\beta_1^2)},\quad \alpha_1=\frac{\mu_0(2\pi a\beta)^{-1}}{\mu_1(1-\mu_0^2)}$$

$$b_2=\int_0^a\frac{r\tilde{g}^{-}(r)dr}{\sqrt{a^2-r^2}},\quad b_1=2\int_0^a\left\{\operatorname{Re}\tilde{\Phi}'(r)+\frac{\mu_0}{\pi}\int_0^a\operatorname{Im}\frac{S(r)\tilde{\Phi}'(\rho)}{S(\rho)}\frac{dr}{\rho-r}\right\}dr$$

$$b_3=2\int_0^a\left\{-r\operatorname{Im}\tilde{\Phi}'(r)+\frac{\mu_0}{\pi}\int_0^a\operatorname{Re}\frac{S(r)\tilde{\Phi}'(\rho)}{S(\rho)}\frac{dr}{\rho-r}\right\}dr$$

Реализовав с помощью соотношений (4.25) условия (4.24), получим следующие выражения для неизвестных смещений δ_1, δ_2 и угла поворота ϕ_z включения

$$\delta_1=\frac{b_4+b_2}{2a},\quad \delta_2=b_4a^{-1}-C_0,\quad \phi_z=\frac{3\alpha_1(ab_1+b_3)}{a^2(1+\beta_1^2)}$$

Аналогичным образом строятся решения систем (4.16), (4.17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
2. *Моссаковский В.И., Беркович П.Е., Рыбка В.М.* Смешанная осесимметричная задача теории упругости для кусочно-однородного пространства с круговой щелью в плоскости соединения. // Докл. АН УССР. Сер. А. 1978. № 9. С. 812–816.
3. *Треффтц Е.* Математическая теория упругости. Л.; М.: Гостехиздат, 1934. 172 с.
4. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
5. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. М.: Изд-во Иностр. лит., 1955. 668 с.
6. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

Караганда, Одесса

Поступила в редакцию
1.IX.1996