

УДК 539.3.01

© 1998 г. В.М. АЛЕКСАНДРОВ, Д.А. ПОЖАРСКИЙ

**О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ
ДЛЯ УПРУГОГО КОНУСА С НЕИЗВЕСТНОЙ ОБЛАСТЬЮ КОНТАКТА**

Исследуется пространственная контактная задача о вдавливании без трения жесткого штампа в упругий конус. Ядро двумерного интегрального уравнения этой задачи кроме главного известного особого члена порядка $1/R$ содержит особенность порядка $\ln R$ (вне вершины конуса), причем точное выделение всех особенностей ядра представляется проблематичным. Это затрудняет применение для решения задачи известных аналитических методов [1, 2]. В данной работе используется численный метод нелинейных граничных уравнений типа Гаммерштейна [3, 4], позволяющий одновременно определить нормальные контактные давления и неизвестную область контакта, эффективный при достаточной удаленности области контакта от вершины конуса. Приводятся результаты численного анализа различных параметров задачи (сила, осадка, момент, размер и форма области контакта) в зависимости от степени близости штампа к вершине конуса и угла раствора конуса; дается сравнение с известным частным случаем, когда конус разворачивается в полупространство, а штамп является эллиптическим параблоидом [5].

1. Рассмотрим бесконечный упругий конус угла раствора 2α в сферической системе координат r, η, φ . Пусть к поверхности конуса $\eta = \alpha$ в точке $r = \rho, \varphi = \psi$ приложена нормальная сосредоточенная сила Q . Граничные условия задачи теории упругости запишем в виде

$$\eta = \alpha: \tau_{\eta r} = \tau_{\eta \varphi} = 0, \quad \sigma_{\eta} = -Q\delta(r - \rho)\delta(\varphi - \psi) \quad (1.1)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Решение задачи (1.1) основывается на разложении гармонической функции $\Phi(r, \eta, \varphi)$ в интеграл Меллина по координате r и ряд Фурье по координате φ ($0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$) [6]. В результате интегральное уравнение пространственной контактной задачи о вдавливании без трения жесткого штампа, поверхность которого пусть для определенности описывается функцией $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi - a)^2/(2R_1) + (r \sin \varphi)^2/(2R_2)$, получим в форме $(\theta = G/(1 - \nu), G$ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, $(r, \varphi) \in \Omega$):

$$\frac{\theta^{-1}}{2\pi} \iint_{\Omega} K(r, \varphi, \rho, \psi) q(\rho, \psi) \rho d\rho d\psi = \delta + \gamma(r \cos \varphi - a) - f(r, \varphi) \quad (1.2)$$

$$K(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{2}{\pi\sqrt{r\rho}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} L_k(s, \alpha) \cos\left(s \ln \frac{\rho}{r}\right) ds \cos[k(\varphi - \psi)]$$

$$L_k(s, \alpha) = \frac{f_0 + f_1 p + f_2 p^2 + f_3 p^3}{g_0 + g_1 p + g_2 p^2 + g_3 p^3}, \quad p = P_{is-0,5}^k(\cos \alpha) / P_{is-0,5}^{k-1}(\cos \alpha)$$

$$f_m = f_m(s, k, \alpha), \quad g_m = g_m(s, k, \alpha), \quad m = 0, 1, 2, 3, \quad p = p(s, k, \alpha) \quad (1.3)$$

$$f_0 = \cos^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha (s^2 + (k - 0,5)^2)^2$$

$$f_1 = (s^2 + (k - 0,5)^2) \left[-\cos^2 \alpha \left(\frac{s^2 + 0,25}{2} + 1 + 3k \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + \frac{k^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{4(1-\nu)} \right]$$

$$f_2 = 0,5 \sin 2\alpha [(s^2 + 0,25)(1,5 + k \operatorname{ctg}^2 \alpha) + 3k^2 - 2k] +$$

$$+ (2k - 2,5k^2) \operatorname{ctg} \alpha + 2k^2 \operatorname{ctg}^3 \alpha - \frac{k^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{4(1-\nu)} (1 + 2k \operatorname{ctg}^2 \alpha)$$

$$f_3 = -\frac{\sin^2 \alpha}{2} (s^2 + 0,25) - \frac{k^2}{2} (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - k \left(\frac{1}{2} + \cos^2 \alpha \right) - \frac{k^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{4(1-\nu)} \quad (1.4)$$

$$g_0 = \operatorname{ctg}^2 \alpha (s^2 + (k - 0,5)^2)^2 [2(1-\nu)(k^2 - 1) - (s^2 + 0,25) \sin^2 \alpha]$$

$$g_1 = (s^2 + (k - 0,5)^2) \left\{ \frac{\sin 2\alpha}{4} (s^2 + 0,25)^2 - (s^2 + 0,25) \left[\frac{3k - 1}{2} \sin 2\alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - (1 - \nu + k^2 + 3k) \operatorname{ctg} \alpha \right] + \frac{k^2 (k^2 - 1)}{2} \operatorname{ctg} \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - 6(1 - \nu) k (k^2 - 1) \operatorname{ctg}^3 \alpha \right\}$$

$$g_2 = -0,5 (s^2 + 0,25)^2 [1 + (2k - 3) \cos^2 \alpha] + (s^2 + 0,25) [(3k - 2) k \cos^2 \alpha - k^2 - \\ - 2(k^2 + k)(k + 1 - \nu) \operatorname{ctg}^2 \alpha] - k^2 (k^2 - 1) [0,5 + (k + 0,5 + 2(1 - \nu)) \operatorname{ctg}^2 \alpha +$$

$$+ (k - 4(1 - \nu)) \operatorname{ctg}^4 \alpha]$$

$$g_3 = -0,25 \sin 2\alpha [(s^2 + 0,25)^2 + 2(s^2 + 0,25)(k^2 + (k + k^2) \operatorname{ctg}^2 \alpha)] +$$

$$+ 2k^2 (1 + k)(1 - \nu) \operatorname{ctg}^3 \alpha - 0,5k^2 (k^2 - 1) \operatorname{ctg} \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)$$

где $q(\rho, \psi)$ – неизвестные нормальные контактные напряжения, действующие в неизвестной области контакта Ω . Под действием силы P , приложенной на расстоянии H от вершины конуса штамп оседает на величину δ , величина γ характеризует перекося штамп относительно прямой, проходящей через точку первоначального касания $r = a$, $\varphi = 0$. Штрих у знака суммы в формуле (1.3) означает, что первое слагаемое (при $k = 0$) берется с коэффициентом $1/2$. Использование отношения присоединенных функций Лежандра вида $p(s, k, \alpha)$ в выражении (1.3) для символа ядра $L_k(s, \alpha)$ оправдано тем, что при $\alpha \in (0, \pi)$, $k \geq -1$, $k \in \mathbf{Z}$, $s \in \mathbf{R}$ сферическая функция $P_{is-0,5}^k(\cos \alpha) \neq 0$ [7].

Наиболее эффективным способом убедиться в правильности формул (1.4) является проверка тождеств $L_{-k}(s, \alpha) \equiv L_k(s, \alpha)$, $k = 1, 2, \dots$, используя известную взаимосвязь между функциями $P_{is-0,5}^{-k}(\cos \alpha)$ и $P_{is-0,5}^k(\cos \alpha)$ [8]. При $k = 0$ из формул (1.3), (1.4) получаем известный символ ядра интегрального уравнения осесимметричной контактной задачи для конуса [9]:

$$L_0(s, \alpha) = \frac{s_1(P)^2 - \operatorname{ctg} \alpha P P^1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha (P^1)^2}{s_1^2 \operatorname{ctg} \alpha (P)^2 + s_1 P P^1 - \operatorname{ctg} \alpha (s_1 + 2(1 - \nu) \sin^{-2} \alpha) (P^1)^2}$$

$$s_1 = s^2 + 0,25, \quad P = P_{is-0,5}(\cos \alpha), \quad P^1 = P_{is-0,5}^1(\cos \alpha)$$

При $\alpha = \pi/2$, когда конус разворачивается в полупространство, из (1.3), (1.4) с учетом соотношения между $P_{is-0,5}^k(0)$ и Γ -функцией [7] вытекает известная формула [1, 9]:

$$L_k\left(s, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\Gamma(is/2 + |k|/2 + 0,25)\Gamma(-is/2 + |k|/2 + 0,25)}{2\Gamma(is/2 + |k|/2 + 0,75)\Gamma(-is/2 + |k|/2 + 0,75)} \quad (1.5)$$

Для определения связи между величинами P , H и δ , γ к уравнению (1.2) следует присоединить два интегральных уравнения равновесия

$$\iint_{\Omega} q(\rho, \psi) \rho d\rho d\psi = P, \quad \iint_{\Omega} q(\rho, \psi) (\rho \cos \psi - a) \rho d\rho d\psi = P(H - a) = M \quad (1.6)$$

2. Используя асимптотические разложения для функций Лежандра $P_{is-0,5}^k(\cos \alpha)$ при больших значениях степени или порядка [7, 8], можно доказать, что при фиксированном k и $s \rightarrow +\infty$:

$$L_k(s, \alpha) = \frac{c_1(k, \alpha)}{s} + \frac{c_2(k, \alpha)}{s^2} + \frac{c_3(k, \alpha)}{s^3} + O\left(\frac{1}{s^4}\right) \quad (2.1)$$

а при фиксированном s и $k \rightarrow +\infty$:

$$L_k(s, \alpha) = \frac{d_1(s, \alpha)}{k} + \frac{d_2(s, \alpha)}{k^2} + \frac{d_3(s, \alpha)}{k^3} + O\left(\frac{1}{k^4}\right) \quad (2.2)$$

причем $c_1(k, \alpha) \equiv 1$, $d_1(s, \alpha) \equiv \sin \alpha$, $c_2(k, \pi/2) \equiv d_2(s, \pi/2) \equiv 0$.

Также, учитывая формулу (1.5), нетрудно установить, что при $\sqrt{s^2 + k^2} \rightarrow \infty$:

$$L_k(s, \pi/2) = \frac{e_1(s, k)}{\sqrt{s^2 + k^2}} + \frac{e_2(s, k)}{(\sqrt{s^2 + k^2})^2} + \frac{e_3(s, k)}{(\sqrt{s^2 + k^2})^3} + O\left(\frac{1}{(\sqrt{s^2 + k^2})^4}\right) \quad (2.3)$$

$$e_1(s, k) \equiv 1, \quad e_2(s, k) \equiv 0, \quad e_3(s, k) = \frac{s^2 - k^2}{8(s^2 + k^2)}$$

Первый член в асимптотическом разложении (2.3) полностью определяет, как следует из значений соответствующих интеграла [10, с. 390] и ряда [11, с. 698], известную особенность вида $1/R$, $R = (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \psi))^{1/2}$, в ядре интегрального уравнения контактной задачи для полупространства. Поскольку при $\alpha \neq \pi/2$ в формулах (2.1), (2.2) $c_2(k, \alpha) \neq 0$, $d_2(k, \alpha) \neq 0$, то ясно, что в этом случае в разложении для функции $L_k(s, \alpha)$, аналогичном (2.3), $e_2(s, k) \neq 0$. Привлекая соотношение [10, с. 390, 740]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\cos(s \ln(r/\rho))}{s^2 + k^2} ds \cos[k(\varphi - \psi)] = \frac{\pi}{4} \left(\left| \ln \frac{r}{\rho} \right| - \ln \frac{R^2}{r\rho} \right)$$

получаем, что при $\alpha \neq \pi/2$ вне вершины конуса ($r, \rho > 0$) в ядре интегрального уравнения (1.2) возникают дополнительные особенности порядка $\ln R$. Точное выделение всех особенностей этого ядра при $\alpha \neq \pi/2$ проблематично, так как при этом $c_n(k, \alpha) \neq d_n(s, \alpha)$, $n = 1, 2$ и в силу сложности соответствующих выражений для $e_n(s, k)$, $n = 1, 2$ вычисление требуемых интегралов и рядов затруднительно довести до конца.

Для приближенного решения интегрального уравнения (1.2) применим метод нели-

нейных граничных уравнений типа Гаммерштейна, позволяющий одновременно определить функцию $q(r, \varphi)$ и область Ω . Произведем в формулах (1.2), (1.3) замену переменных вида

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \varphi = \arctg(y/x), \quad \psi = \arctg(\eta/\xi) \quad (2.4)$$

и предположим, что область Ω полностью содержится в прямоугольнике S на плоскости (x, y) с центром в точке $x = a, y = 0$ и полуосями b и c ($b \geq c$). Введем безразмерные обозначения по формулам

$$x - a = x'b, \quad \xi - a = \xi'b, \quad y = y'b, \quad \eta = \eta'b, \quad \delta = \delta'b, \quad \lambda = a/b$$

$$A = b/(2R_1), \quad B = b/(2R_2), \quad \varepsilon = c/b, \quad M = 2\pi\theta b^3 M' \quad (2.5)$$

$$q(x, y) = 2\pi\theta q'(x', y'), \quad P = 2\pi\theta b^2 P', \quad S' \rightarrow S, \quad \Omega' \rightarrow \Omega$$

Безразмерный параметр λ характеризует относительную удаленность штампа от вершины конуса. Распространяя уравнение (1.2) при учете (2.4), (2.5) на область S , его можно записать в форме уравнения и неравенства (штрихи далее опускаем):

$$\int_S K(M, N)q(N)d\Omega_N = g(M), \quad q(M) \geq 0, \quad M \in \Omega \quad (2.6)$$

$$\int_S K(M, N)q(N)d\Omega_N > g(M), \quad q(M) = 0, \quad M \in (S \setminus \Omega)$$

$$M = (x, y), \quad N = (\xi, \eta), \quad g(x, y) = \delta + \gamma x - Ax^2 - By^2$$

$$K(x, y, \xi, \eta) = 1/R + F(x, y, \xi, \eta), \quad R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \quad (2.7)$$

$$F(x, y, \xi, \eta) = \frac{2\pi^{-1}}{[(x + \lambda)^2 + y^2]^{1/4}[(\xi + \lambda)^2 + \eta^2]^{1/4}} \sum_{k=0}^{\infty} \cos \left[k \left(\arctg \frac{y}{x + \lambda} - \arctg \frac{\eta}{\xi + \lambda} \right) \right] \int_0^{\infty} \left\{ L_k(s, \alpha) - L_k \left(s, \frac{\pi}{2} \right) \right\} \cos \left[\frac{s}{2} \ln \frac{(x + \lambda)^2 + y^2}{(\xi + \lambda)^2 + \eta^2} \right] ds$$

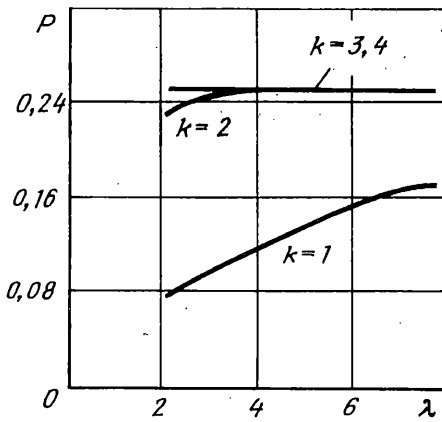
Также предполагается, что существует ограниченная область $S_0 = \{M : g(M) > 0\}$ такая, что $\Omega \subset \bar{S}_0 \subset S$. Введем нелинейные операторы [3, 4] $v^+(M) = \sup\{v(M), 0\}$, $v^-(M) = \inf\{v(M), 0\}$ и рассмотрим операторное уравнение

$$T_* v = 0 \quad (M \in \Omega), \quad T_* \equiv \mu v^- + K v^+ - g, \quad \mu = \text{const} \quad (2.8)$$

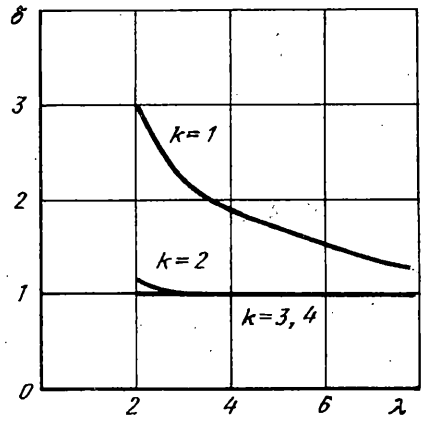
где $v^{\pm} = v^{\pm}(M)$, $g = g(M)$, K - интегральный оператор вида

$$K v^+ = \int_S K(M, N) v^+(N) dS_N$$

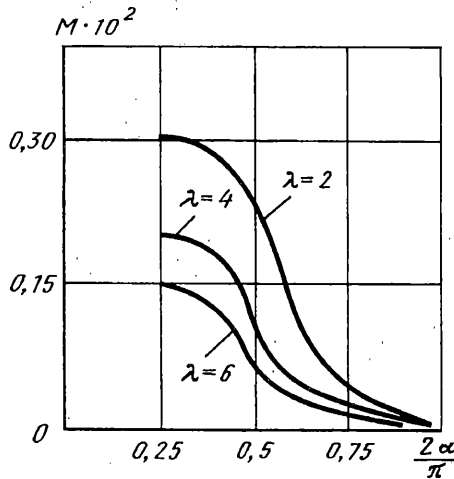
Вопросы об эквивалентности уравнений (2.8) и (2.6), а также о существовании и единственности решения уравнения (2.8) решаются аналогично [3, 4]. При численном решении уравнения (2.8) используем метод последовательных приближений по формулам (1.8) из [4]. В силу симметрии задачи по y достаточно рассматривать лишь верхнюю половину прямоугольника S , которую покроем сеткой из m узлов с шагом h_1 по оси x и h_2 по оси y (в расчетах $m = 81$). При вычислении значений функции $K(M, N)$ вида (2.7) в этих узлах ее особенности сглаживаются путем замены R на $R_* =$



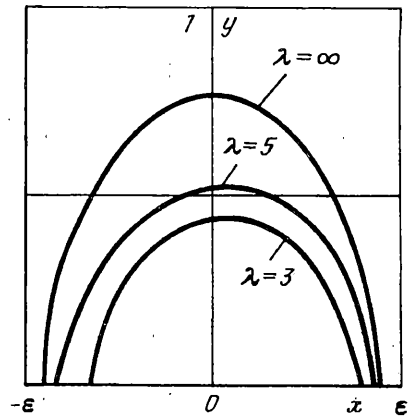
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$= [(x-y)^2 + (\xi-\eta)^2 + \delta_*]^{1/2}$, а также при помощи добавления слагаемого $\sqrt{\delta_*}$ к аргументу \ln в последней формуле (2.7). Можно показать, что регуляризующий параметр δ_* должен быть связан с шагами сетки h_1 и h_2 (в расчетах $\delta_* = h_1 h_2 / 16$). Вычисление значений функции $F(M, N)$ вида (2.7) с высокой степенью точности и при небольших затратах машинного времени на РС типа IBM-486 может быть проведено при не слишком малых значениях $\lambda - \epsilon$ (при $(\lambda - \epsilon) \sim 1$), ограничивающих область эффективного применения метода [3, 4]. Отношение функций Лежандра $p(s, k, \alpha)$ вида (1.3) вычислялось по формуле [8]:

$$p(s, k, \alpha) = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \frac{(k-0,5)^2 + s^2}{k} \frac{F(0,5-is, 0,5+is; 1+k; \sin^2(\alpha/2))}{F(0,5-is, 0,5+is; k; \sin^2(\alpha/2))}$$

где $F(a, b; c; x)$ – гипергеометрическая функция.

Для отладки компьютерной программы использовалось точное решение задачи о вдавливании эллиптического параболоида в полупространство [5] при $\alpha = \pi/2$, $\epsilon = 0,5$,

$\delta = 1, \gamma = 0, A = 2, B = 1$ (λ – любое), определяемое формулами (отличие не превосходит 3%):

$$q(x, y) = 0,348\sqrt{1 - (x/0,469)^2 - (y/0,744)^2}, \quad P = 0,254, \quad M = 0$$

На фиг. 1 и 2 приведены соответственно зависимости силы P от λ при постоянной осадке $\delta = 1$ и осадки δ от λ при постоянной силе $P = 0,254$ при разных углах $\alpha = \pi k/8$ и $\epsilon = 0,5, \gamma = 0, A = 2, B = 1$. На фиг. 3 и 4 даются соответственно зависимости момента M от α при разных λ и границы верхней половины области контакта Ω от λ при $\alpha = \pi/8$ ($\epsilon = 0,5; \delta = 0,5; \gamma = 0; A = 2; B = 1$). Видно, что при приближении штампа к вершине конуса острого угла раствора площадь области контакта уменьшается, а осадка при постоянной вдавливающей силе увеличивается.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00133а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
2. Александров В.М. Асимптотические методы в задачах механики сплошной среды со смешанными граничными условиями // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 102–108.
3. Галанов Б.А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 827–835.
4. Пожарский Д.А. О пространственной контактной задаче для упругого клина с неизвестной областью контакта // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 812–818.
5. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
6. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наук. думка, 1985. 280 с.
7. Журина М.И., Кармазина Л.Н. Таблицы и формулы для сферических функций $P_{-\frac{1}{2}+ir}^m(z)$. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1962. 57 с.
8. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
9. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.
10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.

Москва, Ростов н/Д

Поступила в редакцию
15.VIII.1996