

УДК 531.8

© 1998 г. И.А. КОПЫЛОВ, И.В. НОВОЖИЛОВ

## МОДЕЛЬ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ПОЕЗДА

Исследование динамики железнодорожного состава осложнено высокими порядками систем уравнений, описывающих движение отдельного вагона, и сильным разнесением собственных значений задачи [1]. В [2] движение поезда анализировалось на основе приближенной модели вагона, описывающей самые низкочастотные составляющие движения типа "кинематических влияний". Этой моделью не учитывались реборды колес, ограничивающие размах колебаний. В [3] получена приближенная математическая модель вагона с ребордами колес. Эта модель имеет переменную структуру, описываемую системами уравнений разной размерности в зависимости от набора колес, реборды которых находятся в контакте с рельсами. В [3] оговаривалось, что применение этой модели оправдано в случае "худших", резонансных частот возмущений.

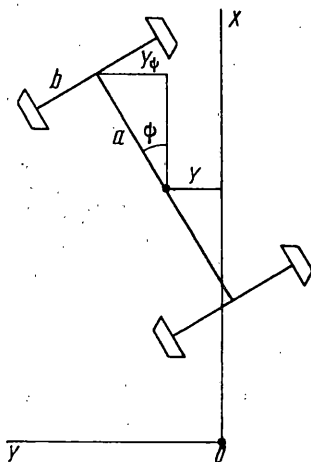
В данной работе модель из [3] уточняется для произвольных, не обязательно резонансных, возмущений. На основе предложенной модели вагона строится модель поперечных движений поезда, составленного из произвольного числа вагонов. Приводятся данные численного анализа этой модели.

1. Рассмотрим жесткий, двухосный вагон, движущийся с постоянной скоростью  $V$  по горизонтальному, прямолинейному рельсовому пути (фиг. 1). Положение вагона зададим [3] поперечным смещением  $Y$  средней точки вагона и смещением  $Y_\psi$  средней точки передней оси за счет угла поворота  $\psi$  продольной оси симметрии вагона. Для малых углов  $Y_\psi = a\psi$ , где  $a$  – половина расстояния между осями вагона. Обозначим через  $M$  массу вагона,  $\rho$  – его центральный радиус инерции,  $b$  – половину ширины колеи,  $r$  – средний радиус колеса,  $\gamma$  – его коничность. Движение вагона происходит под действием сил крипа, пропорциональных с коэффициентом  $k$  относительным проскальзываниям в точках контакта колес с рельсами [1, 3], и силам  $F_{1y}, F_{2y}$  взаимодействия с рельсами реборд передней и задней колесных пар. Зависимость сил  $F_{1y}, F_{2y}$  от боковых смещений  $\Delta Y_1, \Delta Y_2$  передней и задней колесных пар изображена на фиг. 2. Здесь  $2\Delta_0$  – полная величина свободного хода колесной пары,  $c$  – коэффициент жесткости сил взаимодействия в точке контакта реборды и рельса. Обозначим через  $F_x, M_x$  главный вектор и главный момент прочих сил, действующих на вагон. К вагону приложены "жесткие" силовые воздействия с "большими" коэффициентами  $k$  и  $c$ . Это определяет сильное разнесение собственных частот системы и дает возможность строить приближенные математические модели движения для всевозможных случаев взаимодействия реборд различных колес вагона с рельсами.

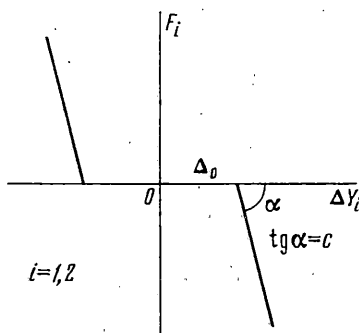
(а) *Модель движения без контакта реборд с рельсами.* От набора исходных фазовых переменных задачи  $Y, Y_\psi, V_y = dY/dT, V_\psi = dY_\psi/dT$  в уравнениях движения делается переход к переменным  $Y, Y_\psi, U_y, U_\psi$  [3]. Здесь  $T$  – время, а

$$U_y = V_y - \frac{V}{a} Y_\psi, \quad U_\psi = \frac{a^2 + b^2}{a^2} V_\psi + \frac{V_\gamma b}{r} Y$$

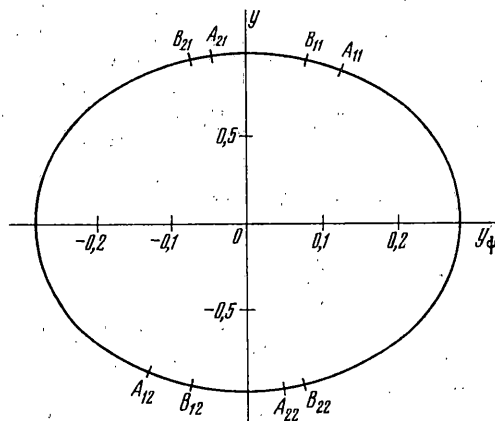
комбинации переменных, входящие в уравнения с "большим" коэффициентом  $k$ . Нор-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

мализация полученной системы для класса движений типа кинематических влияний приводит ее к виду [3]:

$$\begin{aligned} \mu u'_y &= -u_y + f_y - \mu(\tau_a^{-1} u_\psi - y) \\ \mu \lambda u'_\psi &= -u_\psi + m_z + \mu \lambda (\tau_a u_y + y_\psi) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$y' = u_y + \tau_a^{-1} \theta y_\psi$$

$$y'_\psi = \theta^{-1} (u_\psi - \tau_a y)$$

$$|y + y_\psi| < 1, \quad |y - y_\psi| < 1 \quad (1.2)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени  $t$ , строчными буквами – безразмерные, нормализованные аналоги соответствующих размерных величин, введены обозначения  $\mu = T_1/T_0$ , где  $T_1 = MV/(4k)$  – постоянная времени быстрых составляющих движения под воздействием сил крипа,  $T_0 = [r(a^2 + b^2)/(ybV^2)]^{0.5}$  – постоянная времени кинематических влияний,  $\lambda = \rho^2/(a^2 +$

$+ b^2)$ ,  $\theta = (a^2 + b^2)/a^2$ ,  $\tau_a = T_a \theta / T_0$ ,  $T_a = a/V$ . Для реальных значений параметров вагона в (1.1) будет  $\mu \sim 10^{-2} \ll 1$ ;  $\lambda$ ,  $\theta$ ,  $\tau_a \sim 1$ .

Система (1.1) – сингулярно возмущенная. Асимптотическое разложение ее решения по  $\mu$  отыскивается в виде [4, 5]:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (y^{(k)}(t) + y_{\tau}^{(k)}(\tau)), \quad u_y = \dots, \quad \dots \quad (1.3)$$

Здесь  $y^{(k)}(t)$ ,  $y_{\tau}^{(k)}(\tau)$ , ... – коэффициенты разложения,  $\tau = t/\mu$  – "быстрое" время, в котором развивается переходный процесс по быстрым переменным  $u_y$ ,  $u_{\psi}$  в малой "погранслошной" окрестности начальной точки. Подстановка (1.3) в (1.1) и приравнивание слагаемых при одинаковых степенях  $\mu$  порознь для  $t$  и  $\tau$  дает уравнения для коэффициентов разложения.

Ограничимся далее построением приближения вне погранслоя, т.е. для слагаемых, зависящих от "медленного" времени  $t$ . Подставив соответствующие слагаемые из (1.3) в (1.1), получим

$$\begin{aligned} \mu(u_y^{(0)} + \mu u_y^{(1)} + \dots)' &= -(u_y^{(0)} + \mu u_y^{(1)} + \dots) + f_y - \\ &- \mu(\tau_a^{-1}(u_{\psi}^{(0)} + \mu u_{\psi}^{(1)} + \dots) - (y^{(0)} + \mu y^{(1)} + \dots)) \\ \mu\lambda(u_{\psi}^{(0)} + \mu u_{\psi}^{(1)} + \dots)' &= -(u_{\psi}^{(0)} + \mu u_{\psi}^{(1)} + \dots) + m_z + \\ &+ \mu\lambda(\tau_a(u_y^{(0)} + \mu u_y^{(1)} + \dots) - (y_{\psi}^{(0)} + \mu y_{\psi}^{(1)} + \dots)) \\ (y^{(0)} + \mu y^{(1)} + \dots)' &= (u_y^{(0)} + \mu u_y^{(1)} + \dots) + \tau_a^{-1}\theta(y_{\psi}^{(0)} + \mu y_{\psi}^{(1)} + \dots) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$(y_{\psi}^{(0)} + \mu y_{\psi}^{(1)} + \dots)' = \theta^{-1}((u_{\psi}^{(0)} + \mu u_{\psi}^{(1)} + \dots) - \tau_a(y^{(0)} + \mu y^{(1)} + \dots))$$

Слагаемые нулевого по  $\mu$  порядка из (1.4) дают систему

$$\begin{aligned} 0 &= -u_y^{(0)} + f_y, & 0 &= -u_{\psi}^{(0)} + m_z \\ y^{(0)'} &= u_y^{(0)} + \tau_a^{-1}\theta y_{\psi}^{(0)}, & y_{\psi}^{(0)'} &= \theta^{-1}(u_{\psi}^{(0)} - \tau_a y^{(0)}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Начальные условия по  $y^{(0)}$ ,  $y_{\psi}^{(0)}$  для (1.5) совпадают с начальными условиями для (1.1). Уравнения (1.5) представляют собой вырожденную по А.Н. Тихонову систему из [3], приближающую с погрешностью  $\mu$  решение исходной системы (1.1) вне погранслоя. Указанная точность гарантируется на конечном интервале времени  $t \sim 1$ . В отсутствие возмущений решением (1.5) являются незатухающие колебания – кинематические влияния. На резонансных возмущениях из [3] система (1.5) за конечное время  $t \sim 1$  выходит на реборду, что отвечает временным ограничениям теоремы А.Н. Тихонова. При возмущениях нерезонансной частоты, в частности, когда возмущений нет, вырожденная система совершает колебания внутри зоны свободного хода и не выходит на реборду во все время движения. Исходная система (1.1) за счет слагаемых порядка  $\mu$  слабо неустойчива по собственным колебаниям. Ее решение на временах, существенно больших 1, выходит за границу зоны свободного хода. Налицо качественное отличие решений исходной системы (1.1) и системы (1.5) нулевого приближения.

Построим приближение задачи, учитывающее члены первого по  $\mu$  порядка малости. Собрав в (1.4) слагаемые порядка  $\mu$ , получим

$$u_y^{(0)'} = -u_y^{(1)} - \tau_a^{-1}u_{\psi}^{(0)} + y^{(0)}$$

$$\lambda u_{\psi}^{(0)'} = -u_{\psi}^{(1)} + \lambda \tau_a u_{\psi}^{(0)} + y_{\psi}^{(0)} \quad (1.6)$$

$$y^{(1)'} = u_y^{(1)} + \tau_a^{-1} \theta y_{\psi}^{(1)}, \quad y_{\psi}^{(1)'} = \theta^{-1} (u_{\psi}^{(1)} - \tau_a y^{(1)})$$

Начальные условия системы по  $y^{(1)}$ ,  $y_{\psi}^{(1)}$  задаются способом, оговоренным в [4, 5].

Далее для простоты будем полагать их нулевыми, для чего надо потребовать, чтобы начальные условия по  $u_y$ ,  $u_{\psi}$  исходной системы (1.1) удовлетворяли квазистатическим соотношениям из (1.5).

Таким образом, последовательное, двухэтапное решение задач (1.5), (1.6) дает приближенное с погрешностью  $\mu^2$  решение системы (1.1) вне погранслоя

$$y_{(1)} = y^{(0)} + \mu y^{(1)}, \quad y_{\psi(1)} = y_{\psi}^{(0)} + \mu y_{\psi}^{(1)}, \quad \dots \quad (1.7)$$

Оказывается, приближение такой же точности можно получить проще, при помощи одной системы уравнений. Аналогичные уточнения модели движения проводились в [5] для самолета.

Отбросим в (1.4) величины порядка  $\mu^2$  в левых частях уравнений  $\mu^2 u_y^{(1)'}$ ,  $\mu^2 u_{\psi}^{(1)'}$  и все слагаемые такого же и более высоких порядков, обозначенные многоточиями. Уравнения нулевого и первого по  $\mu$  приближений, определяемые этой усеченной системой, совпадают с (1.5) и (1.6). Введем в усеченной системе обозначения, формально совпадающие с обозначениями в (1.1):

$$y = y^{(0)} + \mu y^{(1)}, \quad y_{\psi} = y_{\psi}^{(0)} + \mu y_{\psi}^{(1)}, \quad \dots \quad (1.8)$$

и заменим по (1.5) в ней  $u_y^{(0)} = f_y$ ,  $u_{\psi}^{(0)} = m_z$ . Получим

$$\mu f_y' = -u_y + f_y - \mu (\tau_a^{-1} u_{\psi} - y) \quad (1.9)$$

$$\mu \lambda m_z' = -u_{\psi} + m_z + \mu \lambda (\tau_a u_y + y_{\psi})$$

$$y' = u_y + \tau_a^{-1} \theta y_{\psi}, \quad y_{\psi}' = \theta^{-1} (u_{\psi} - \tau_a y)$$

Начальные условия в (1.9) по  $y$ ,  $y_{\psi}$  берем такими же, как в (1.1). Систему (1.9) можно было бы также получить, проделав выкладки в обратном порядке: умножив систему (1.6) на  $\mu$ , сложив почленно с (1.5), введя обозначения (1.8) после добавления необходимых слагаемых порядка  $\mu^2$ .

Решение системы (1.9) по  $y$ ,  $y_{\psi}$ , ... в силу сделанных преобразований отличается от частичных сумм (1.7) на величины порядка  $\mu^2$ . Характеристический полином системы (1.9) имеет два комплексно сопряженных корня с положительной вещественной частью. Эти корни с погрешностью  $\mu^2$  приближают два корня с положительной вещественной частью характеристического полинома исходной системы (1.1) в области отсутствия контакта реборд с рельсами. Таким образом, системой (1.9) описывается медленное возрастание амплитуды кинематических влияний, и она будет далее рассматриваться в качестве математической модели бесконтактного движения вагона. Для краткости будем ее обозначать моделью  $M_0$ .

(б) *Модели движения при контакте реборды с рельсом.*

Обоснование этих моделей приведено в [3]. Они определяются внепогранслойными уравнениями нулевого приближения по малым параметрам:  $\mu$ , введенным ранее,  $\varepsilon = \Delta^*/\Delta_0$  — относительной малости характерной деформации  $\Delta^*$  в точке касания реборды с рельсом и  $\varepsilon_1 = 1 - \theta$ . При малых протяженностях времени касания погрешность этих приближенных моделей порядка  $\mu$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1$  будем считать приемлемой.

Модель  $M_{11}$  для движения с контактом реборды одного левого переднего колеса задается уравнениями [3]:

$$\begin{aligned}
u_y &= f_y - \delta_1, & u_\psi &= m_z - \delta_1 \\
\delta_1 &= [f_y + m_z + (\tau_a + \tau_a^{-1})y_\psi - \tau_a]/2 \\
y'_\psi &= [-f_y + m_z + (\tau_a - \tau_a^{-1})y_\psi - \tau_a]/2 \\
y + y_\psi &= 1, & |y - y_\psi| &< 1, & \delta_1 > 0
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь  $\delta_1$  – нормализованное значение деформации в точке контакта. Первые три конечных уравнения в (1.10) определяют реакции связей. Начальное значение "медленной" переменной  $y_\psi$  при переходе от модели  $M_0$  к модели  $M_{11}$  выбирается из условия непрерывности этой переменной. "Быстрые" переменные  $u_y, u_\psi, \delta_1$  при смене модели, вообще говоря, терпят разрыв, который возникает из-за скачка сил при наложении связей. Модель  $M_{11}$  используется при выполнении условия  $\delta_1 > 0$ .

Аналогично записывается модель  $M_{12}$  при касании реборды переднего правого колеса

$$\begin{aligned}
u_y &= f_y - \delta_1, & u_\psi &= m_z - \delta_1 \\
\delta_1 &= [f_y + m_z + (\tau_a + \tau_a^{-1})y_\psi + \tau_a]/2 \\
y'_\psi &= [-f_y + m_z + (\tau_a - \tau_a^{-1})y_\psi + \tau_a]/2 \\
y + y_\psi &= -1, & |y - y_\psi| &< 1, & \delta_1 < 0
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Модель  $M_{21}$  при касании реборды заднего левого колеса

$$\begin{aligned}
u_y &= f_y - \delta_2, & u_\psi &= m_z + \delta_2 \\
\delta_2 &= [f_y - m_z + (\tau_a + \tau_a^{-1})y_\psi + \tau_a]/2 \\
y'_\psi &= [f_y + m_z - (\tau_a - \tau_a^{-1})y_\psi - \tau_a]/2 \\
|y + y_\psi| &< 1, & y - y_\psi &= 1, & \delta_2 > 0
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Модель  $M_{22}$  при касании реборды заднего правого колеса

$$\begin{aligned}
u_y &= f_y - \delta_2, & u_\psi &= m_z + \delta_2 \\
\delta_1 &= [f_y - m_z + (\tau_a + \tau_a^{-1})y_\psi - \tau_a]/2 \\
y'_\psi &= [f_y + m_z - (\tau_a - \tau_a^{-1})y_\psi + \tau_a]/2 \\
|y + y_\psi| &< 1, & y - y_\psi &= -1, & \delta_2 < 0
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Модели, описывающие движение вагона при контакте двух реборд, приведены в [3]. Они также получаются предельным переходом тихоновского вида и описываются четырьмя конечными уравнениями, что отвечает наложению четырех связей. В случае отсутствия возмущений, который рассматривается далее, эти конечные уравнения образуют противоречивую систему уравнений. Следовательно, одновременное касание реборд двух колес с рельсами для невозмущаемой системы может реализоваться лишь на малых пограничных временах. Поэтому модели двухконтактного движения далее не рассматриваются.

В качестве математической модели отдельного вагона принимаем уравнения (1.9) – (1.13), набор условий переключения (1.2),  $\delta_1 < 0, \delta_1 > 0, \delta_2 < 0, \delta_2 > 0$  с одной

системы на другую и условия непрерывности системы по медленным переменным при этих переключениях.

2. Математическая модель движения вагона, построенная выше, получена при помощи асимптотических методов Тихонова – Васильевой, оценки точности которых справедливы, вообще говоря, при  $\mu, \varepsilon, \varepsilon_1 \rightarrow 0$ . Справедливость этих оценок точности и временных интервалов, на которых они выполняются, в конкретных задачах и при конечных значениях малых параметров обычно подтверждается тестовыми числовыми просчетами. Приведем результаты сравнения, полученные с помощью ЭВМ, решений исходной модели (1.1) и построенной модели переменной структуры (1.9) – (1.13). Числовые значения параметров вагона выбраны следующими [1]:  $M = 2 \cdot 10^4$  кг,  $a = 8$  м,  $r = 0,45$  м,  $b = 0,76$  м,  $\gamma = 0,05$ ,  $k = 1,5 \cdot 10^6$  Н,  $c = 4 \cdot 10^8$  Н/м,  $\Delta_0 = 0,03$  м,  $V = 10$  м/с.

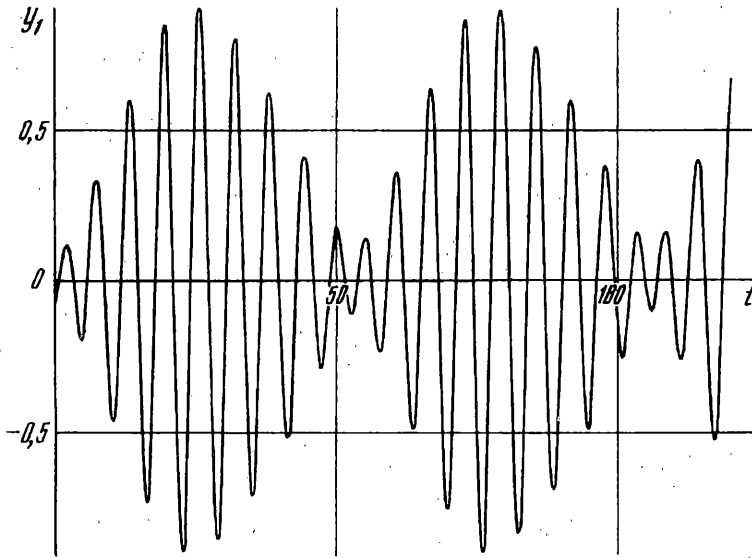
Предполагалось, что сила  $F_y$  и момент  $M_z$  отсутствуют. Величина малого параметра  $\mu$  при указанных числовых значениях равна 0,012. Шаг интегрирования исходной системы был выбран равным  $10^{-4}$ , для совокупности предельных моделей –  $5 \cdot 10^{-2}$ . Начальные значения по медленным переменным брались близкими к 0, по быстрым – равными 0. Через интервал времени, равный нескольким десяткам периодов кинематических влияний, решения обеих систем выходили на предельный цикл на плоскости переменных  $y, y_\psi$ . Предельные циклы для обеих рассматриваемых моделей практически совпадают (фиг. 3). На протяжении всего интервала установления предельного цикла отличия медленных переменных для двух моделей не превышали значений порядка  $\mu$ . На участке предельного цикла между точками  $A_{11}$  и  $B_{11}$  (фиг. 3) движение описывается соотношениями модели  $M_{11}$ , между  $A_{21}$  и  $B_{21}$  – модели  $M_{21}$ , между  $A_{12}$  и  $B_{12}$  – модели  $M_{12}$ , между  $A_{22}$  и  $B_{22}$  – модели  $M_{22}$ . Соответствующие участки траектории на плоскости переменных  $y, y_\psi$  лежат на прямых  $|y \pm y_\psi| = 1$ . На всех остальных участках предельного цикла движение вагона происходит без контакта реборд с рельсами (модель  $M_0$ ). Один цикл колебаний совершается за время, примерно равное  $2\pi$ , т.е. за нормализованный период кинематических влияний. Движение на отрезках  $A_{11}B_{11}$  и  $A_{12}B_{12}$  происходит за 0,16 единиц времени, на отрезках  $A_{21}B_{21}$  и  $A_{22}B_{22}$  – 0,08 единиц. Соответствующие продолжительности контактов реборд колес с рельсами, даваемые исходной моделью (1.1), отличаются от указанных значений для приближенной модели на величины, меньшие 0,01. Время вычисления на ЭВМ решения исходной системы уравнений (1.1) из-за малого шага интегрирования на десятичный порядок больше времени нахождения решений совокупности предельных моделей.

Проведенный тестовый просчет подтверждает работоспособность предложенной математической модели движения вагона и его значительную экономичность по затратам компьютерного времени по сравнению с исходной моделью. Используем построенную модель для исследования движения поезда.

3. Рассмотрим поперечные колебания поезда, состоящего из  $N$  одинаковых двухосных вагонов. Предположим, что соседние вагоны шарнирно сцеплены невесомым стержнем длины  $d$ . Вагоны пронумеруем последовательно, начиная с головного. Переменные, относящиеся к вагону с номером  $n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ), будем отмечать нижним индексом  $n$ . Считаем, что на каждый вагон поезда действует постоянная сила сопротивления  $F$ , направленная по продольной оси вагона и пропорциональная с коэффициентом  $\alpha$  его весу. К первому вагону вдоль его продольной оси приложена сила тяги  $F_1$ . Из статических соотношений в продольном направлении получаем связь между силами  $F, F_1$  и продольной силой  $F_n$ , приложенной к  $n$ -му вагону со стороны переднего для него вагона.

$$F_1 = NF, \quad F_n = (N - n + 1)F \quad (n = 2, \dots, N)$$

Запишем выражения для главного вектора  $F_{yn}$  и главного момента  $M_{zn}$  сил,



Фиг. 4

действующих на  $n$ -й вагон [2], для малых углов поворотов вагонов и сцепок.

$$F_{y1} = (N-1) F [Y_{\psi1} / a - (Y_1 - Y_{\psi1} - Y_2 - Y_{\psi2}) / d]$$

$$M_{z1} = -F_{y1} a$$

$$F_{yn} = (N-n+1) F (Y_{n-1} - Y_{\psi n-1} - Y_n - Y_{\psi n}) / d -$$

$$- (N-n) F (Y_n - Y_{\psi n} - Y_{n+1} - Y_{\psi n+1}) / d - F Y_{\psi n} / a$$

$$M_{zn} = (N-n+1) F [a(Y_{n-1} - Y_{\psi n-1} - Y_n - Y_{\psi n}) / d - Y_{\psi n}] +$$

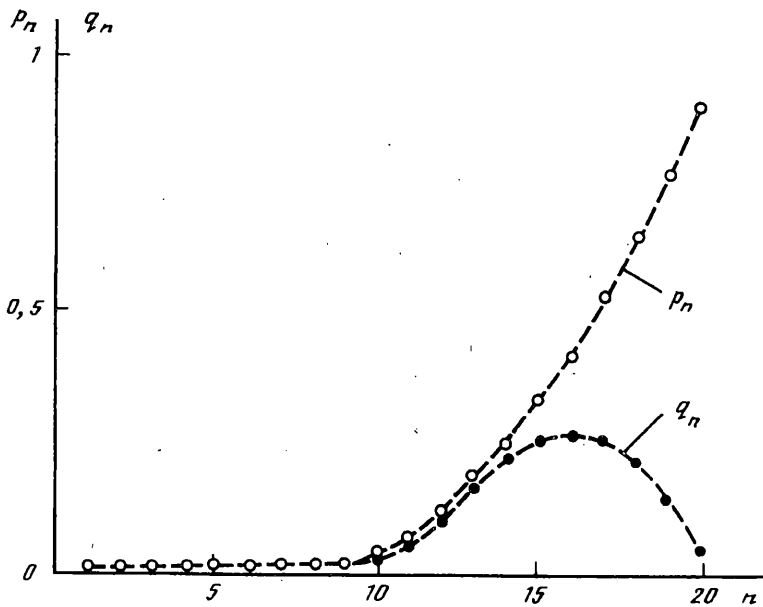
$$+ (N-n) F [a(Y_n - Y_{\psi n} - Y_{n+1} - Y_{\psi n+1}) / d - Y_{\psi n}] \quad (n=2, \dots, N)$$

В выражении сил и моментов для последнего вагона полагается  $Y_{N+1} \equiv 0$  и  $Y_{\psi N+1} \equiv 0$ . Следуя разделу 1, для каждого вагона составим модель поперечных движений переменной структуры. Решение построенной таким образом системы уравнений находилось с помощью ЭВМ. Дополнительно к ранее указанным числовым значениям параметров было выбрано  $\alpha = 0,05$ .

Изложим ряд полученных результатов для поездов с различным числом вагонов. После завершения переходных процессов устанавливаются поперечные колебания каждого вагона, напоминающие по своему характеру биения. На фиг. 4 показана зависимость от времени переменной  $y_1$  для поезда из 5 вагонов ( $N=5$ ). Аналогичные зависимости наблюдаются и для переменных  $y_{\psi1}$ ,  $y_n$ ,  $y_{\psi n}$  ( $n=2, 3, \dots, N$ ). Графики вида, представленного на фиг. 4, допускают описание

$$y_n(t) = [p_n + q_n \sin(\omega_a t + \xi_n)] \sin(\omega_0 t + \phi_n)$$

Здесь  $\omega_0$  – высшая частота биений, близкая по результатам счета к единице, т.е. частоте кинематических влияний отдельного вагона,  $p_n$  – постоянная составляющая амплитуды этих колебаний,  $q_n$  и  $\omega_n$  – глубина и частота модуляции амплитуды. Час-



Фиг. 5

тоты  $\omega_0, \omega_n$  – одинаковы для всех вагонов поезда. Их зависимость от числа вагонов поезда дается ниже

$N$	1	5	10	15	20
$\omega_0$	1,00	1,07	1,16	1,18	1,20
$\omega_n$	–	0,12	0,08	0,06	0,05

С увеличением  $N$  частота кинематических влияний увеличивается, а частота модуляции амплитуды уменьшается. На фиг. 5 представлены зависимости  $p_n, q_n$  для поезда из 20 вагонов. Постоянная составляющая  $p_n$  амплитуды кинематических влияний монотонно увеличивается с ростом номера вагона  $n$ . Счет показал, что взаимодействие реборд с рельсами происходит не для всех вагонов. Для поезда из 5 вагонов ( $N = 5$ ) выходят на реборду вагоны с номерами  $n = 3 - 5$ , для  $N = 10$  – вагоны с номерами  $n = 4 - 10$ , для  $N = 15$  – с номерами  $n = 11 - 15$ , а для  $N = 20$  – с номерами  $n = 17 - 20$ . Заметим, что на установившемся режиме взаимодействуют с рельсами только реборды передних осей вагонов для всех  $N = 5, 10, 15, 20$ .

Полученные результаты подтверждают общепринятое мнение о меньшей комфортабельности концевых вагонов поезда.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-00219а).



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лазарян В.А., Длугач Л.А., Коротенко М.Л.* Устойчивость движения рельсовых экипажей. Киев: Наук. думка, 1972. 197 с.
2. *Копылов И.А., Новожилов И.В.* Поперечные колебания железнодорожного поезда // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 66–70.
3. *Копылов И.А., Новожилов И.В.* Модель переменной структуры для поперечного движения железнодорожного вагона // Изв. АН СССР. МТТ. 1996. № 6. С. 27–36.
4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973, 272 с.
5. *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1995. 188 с.

Москва

Поступила в редакцию  
5.VII.1996