МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1998

УДК 539.3:534.1

© 1998 г. С.А. АГАФОНОВ

О СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ ПОСРЕДСТВОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ

Рассматривается линейная неконсервативная механическая система, на которую действует параметрическое возбуждение, имеющее достаточно общий вид. Исследуется возможность расширения в пространстве параметров области устойчивости за счет параметрического возбуждения. Подход основан на применении замены переменных, приводящей к автономной системе с последующим ее анализом. В качестве примера решается задача стабилизации равновесия маятника Циглера [1]. Параметрическое возбуждение реализуется с помощью вибрации основания маятника. Показано, что эффект стабилизации будет значительным, если в спектре возбуждения присутствует высокая частота. Отметим, что задаче стабилизации движения маятника Циглера и вязкоупругого стержня, подверженного действию следящей силы посредством параметрического возбуждения, посвящены работы [2, 3]. В отличие от [2] в настоящей работе рассматривается наиболее общий вид возбуждения.

1. Постановка задачи и уравнения движения. Уравнение движения линейной неконсервативной механической системы, на которую действует параметрическое возбуждение $\xi(t)$, запишем в виде

$$\ddot{y} + \varepsilon d B_0 \dot{y} + \varepsilon \Lambda y + \varepsilon \ddot{\xi} Q y = 0 \tag{1.1}$$

где $y = (y_1, \ldots, y_n)$, B_0, Λ, Q – квадратные матрицы с постоянными элементами, $d > 0$, $\varepsilon \ll 1$, $\xi(t)$ – ограниченная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, такая, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt = 0$$

и существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\xi}^2(t) dt$$

Матрица Λ характеризует позиционные неконсервативные силы, B_0 – силы вязкого трения. Неконсервативные механические системы обладают следующим свойством. Пусть $\xi(t) = 0$ и $d = 0$, а система, на которую действуют только позиционные силы, является устойчивой. При присоединении сколь угодно малых сил трения ($d \sim \varepsilon$) система становится, за исключением отдельных случаев, неустойчивой, причем область в пространстве параметров имеет конечную меру при $d \to 0$. Это явление носит название парадокса дестабилизации неконсервативной системы силами малого трения. Возникает задача стабилизации в этой области системы с помощью параметрического возбуждения. Эта задача и решается здесь.

2. Преобразование уравнения движения. Представим систему (1.1) в виде

$$\dot{\alpha} = (\varepsilon^{1/2} A + \varepsilon A_0)\alpha \tag{2.1}$$

$$A_0 = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & -dB_0 \end{array} \right\|, \quad A = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & E_n \\ \hline -\Lambda - \ddot{\xi} Q & 0 \end{array} \right\|$$

$$\alpha = (y, z), \quad z = \varepsilon^{-1/2} \dot{y}$$

где A_0, A – блочные матрицы, E_n – единичная матрица порядка n.

В системе (2.1) сделаем замену переменных $\alpha \to \beta$, $\beta = (u, v)$:

$$\alpha = (E_{2n} + \varepsilon^{1/2} B + \varepsilon C + \varepsilon^{3/2} D)\beta + O(\varepsilon^2) \tag{2.2}$$

чтобы преобразовать эту систему к виду

$$\dot{\beta} = (\varepsilon^{1/2} M_1 + \varepsilon M_2 + \varepsilon^{3/2} M_3)\beta + O(\varepsilon^2) \tag{2.3}$$

В (2.2) и (2.3) матрицы B, C, D, $M_1, M_2, M_3, \ldots$ подлежат определению, причем матрицы M_1, M_2, M_3 постоянные.

Подставив (2.2) в (2.1), после преобразований получим уравнение для β:

$$\dot{\beta} = \varepsilon^{1/2}(A - \dot{B})\beta + \varepsilon(A_0 + AB - BA + B\dot{B} - \dot{C})\beta + \tag{2.4}$$
$$+ \varepsilon^{3/2}[A_0 B - BA_0 + AC - BAB + B\dot{C} + (B^2 - C)(A - \dot{B}) - \dot{D}]\beta + O(\varepsilon^2)$$

Приравнивая матрицы при $\varepsilon^{1/2}$ в уравнениях (2.3) и (2.4), получим

$$\dot{B} = A - M_1 \tag{2.5}$$

Матрица M_1 выбирается из условия отсутствия секулярных членов в B и имеет вид

$$M_1 = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & E_n \\ \hline -\Lambda & 0 \end{array} \right\|$$

Тогда

$$B = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -\dot{\xi} Q & 0 \end{array} \right\|$$

Далее, приравнивая матрицы при ε в уравнениях (2.3) и (2.4), получим уравнение для определения матрицы C:

$$\dot{C} = A_0 + AB - BM_1 - M_2 \tag{2.6}$$

Условием отсутствия секулярных членов в C является выбор матрицы

$$M_2 = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & -dB_0 \end{array} \right\|$$

Тогда матрица

$$C = \left\| \begin{array}{c|c} -\xi Q & 0 \\ \hline 0 & \xi Q \end{array} \right\|$$

Равенство матриц при $\varepsilon^{3/2}$ в уравнениях (2.3) и (2.4) приводит к матричному уравнению

$$\dot{D} = A_0B - BA_0 + AC - CM_1 - M_3 \qquad (2.7)$$

В соответствии с описанным подходом матрица M_3 равна

$$M_3 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (A_0B - BA_0 + AC - CM_1)dt$$

Вычисления приводят к следующему выражению для M_3:

$$M_3 = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -gQ^2 & 0 \end{array} \right\|, \quad g = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \dot{\xi}^2(t)dt \qquad (2.8)$$

Этим приближением и ограничимся. Предел в (2.8) существует, например, всегда для класса почти периодических функций $\xi(t)$, с равномерно непрерывной производной $\dot{\xi}(t)$ [4].

Уравнение (2.3) после исключения переменной v, с учетом найденных выражений для матриц M_1, M_2, M_3 преобразуется к виду

$$\ddot{u} + \varepsilon dB_0\dot{u} + \varepsilon\Lambda u + \varepsilon^2 gQ^2 u = 0 \qquad (2.9)$$

В (2.9) члены порядка ε^3 отброшены. Присутствие в уравнении (2.9) последнего слагаемого может расширить область устойчивости исходной системы (1.1) в отсутствие возбуждения $\xi(t) = 0$. Реализация такой возможности означает стабилизирующее действие параметрического возбуждения $\xi(t)$.

3. Стабилизация равновесия маятника Циглера. В качестве приложения полученных результатов рассмотрим маятник Циглера [1], представляющий собой два невесомых стержня длины l, соединенных шарниром. Один из концов шарнирно соединен с основанием, а на другой, свободный конец, действует следящая сила P. На свободном конце и в шарнире, соединяющем стержни, сосредоточены одинаковые массы m, а сами шарниры обладают вязкоупругими свойствами. Система имеет две степени свободы, за обобщенные координаты выбираются углы отклонения φ_1, φ_2 стержней от прямой, перпендикулярной основанию. Равенство углов нулю $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ соответствует положению стержней, при котором они располагаются на указанной прямой. Основание совершает вдоль этой прямой колебание по закону $e\xi_0(t)$. Уравнения малых колебаний стержней в окрестности равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ можно привести к виду

$$\ddot{\varphi}_1 + 3d\varepsilon\dot{\varphi}_1 - 2d\varepsilon\dot{\varphi}_2 + \varepsilon(3-p)\varphi_1 + \varepsilon(p-2)\varphi_2 - 2\varepsilon\ddot{\xi}\varphi_1 + \varepsilon\ddot{\xi}\varphi_2 = 0 \qquad (3.1)$$

$$\ddot{\varphi}_2 - 4d\varepsilon\dot{\varphi}_1 + 3d\varepsilon\dot{\varphi}_2 + \varepsilon(p-4)\varphi_1 + \varepsilon(3-p)\varphi_2 + 2\varepsilon\ddot{\xi}\varphi_1 - 2\varepsilon\ddot{\xi}\varphi_2 = 0$$

Здесь точка обозначает производную по безразмерному времени

$$\tau = \left(\frac{a}{mel}\right)^{1/2} t, \quad \xi_0\left[\left(\frac{mel}{a}\right)^{1/2}\tau\right] \equiv \xi(\tau), \quad p = Pla^{-1}, \quad d = \frac{b}{(mael)^{1/2}}$$

где a, b – параметры, характеризующие упругие и вязкие свойства шарниров, $\varepsilon = el^{-1} \ll 1$.

Система уравнений (3.1) имеет вид системы (1.1), где $y = (\varphi_1, \varphi_2)$, а матрицы B_0, Λ и Q таковы

$$B_0 = \left\| \begin{matrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{matrix} \right\|, \quad \Lambda = \left\| \begin{matrix} 3-p & p-2 \\ p-4 & 3-p \end{matrix} \right\|, \quad Q = \left\| \begin{matrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{matrix} \right\|$$

В отсутствие возбуждения $\xi(\tau) = 0$ и вязких свойств шарниров $d = 0$ равновесие $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ маятника устойчиво в первом приближении при выполнении неравенства $p < 2$. Если возбуждение по-прежнему отсутствует, но в шарнирах присутствует вязкое трение, то равновесие асимптотически устойчиво, если $p < 4/3 + 1/2 d^2\varepsilon$. Из сопоставления этих двух условий устойчивости очевидно падение критического значения безразмерной величины следящей силы p. Пусть теперь основание маятника совершает вибрации, характеризуемые функцией $\xi(\tau)$. Применяя к системе уравнений (3.1) изложенный выше подход, приведем последние к системе уравнений (2.9). Условием асимптотической устойчивости этой системы является неравенство

$$p < \frac{4}{3} + \frac{1}{2}d^2\varepsilon + \frac{8}{3}\varepsilon g, \quad g = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \dot{\xi}^2(\tau)d\tau \tag{3.2}$$

Из неравенства (3.2) следует, что параметрическое возбуждение приводит к расширению области устойчивости маятника, однако эффект стабилизации мал, так как член $8/3\,\varepsilon g$ имеет порядок ε при конечном значении g. Поэтому усиление эффекта возможно, если параметр g является достаточно большим, а именно $g \sim \varepsilon^{-1}$. При этом значение следящей силы p может превосходить значение $p = 2$ без нарушения выполнимости неравенства (3.2).

Рассмотрим конкретный вид функции $\xi(\tau)$. Пусть $\xi(\tau) = \Sigma a_i \cos\omega_i\tau$, ($i = 1, 2, \ldots m$), $a_i = \mathrm{const}$, $\omega_i \neq \omega_j$, если $i \neq j$. Параметр

$$g = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \dot{\xi}^2(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m a_i^2\omega_i^2$$

Отсюда следует, что величина g будет достаточно большой ($g \sim \varepsilon^{-1}$), если существует хотя бы одна частота ω_k, имеющая порядок $\varepsilon^{-1/2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing. Arch. 1952. Bd. 20. H. 1. S. 49–56.
2. *Anderson G.L., Tadjbakhsh I.G.* Stabilization of Ziegler's pendulum by means of the vibrational control // J. Math. Anal. and Appl. 1989. V. 143. No. 1. P. 198–223.
3. *Агафонов С.А.* Стабилизация параметрическим возбуждением упруговязкого стержня, находящегося под действием следящей силы // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 3. С. 137–141.
4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.X.1996