

УДК 539.3:534.1

© 1998 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, С.В. НЕСТЕРОВ

ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ

Излагается эффективный численно-аналитический метод ускоренной сходимости для определения критической сжимающей силы, приводящей к потере устойчивости существенно неоднородного прямолинейного стержня с шарнирно закрепленными концами (задача Эйлера). Предлагаемый подход базируется на вариационном принципе Релея (методе Релея – Ритца), теории задач Штурма – Лиувилля и модифицированном методе касательных Ньютона. В основе вычислительного алгоритма лежит неизвестная ранее и установленная авторами дифференциальная связь между собственными числами и длиной интервала соответствующей краевой задачи. Наряду с вычислением собственных значений производится построение собственных функций (форм потери устойчивости). Методика иллюстрируется расчетом конкретных примеров.

1. Постановка задачи. Рассмотрим для определенности и простоты изложения плоскую задачу о потере устойчивости равновесия прямолинейного неоднородного стержня под действием продольной силы. Будем предполагать выполненными классические граничные условия шарнирного опирания (задача Эйлера). На основе принципа Даламбера выпишем условия равновесия любой точки x стержня под действием сосредоточенной на конце силы P в предположении слабого изгиба [1–3]:

$$\sigma(x)u'' + Pu = 0, \quad \sigma(x) \geq \sigma_0 > 0, \quad u(0) = u(l) = 0 \quad (1.1)$$

Здесь $u = u(x)$ – функция, описывающая изгиб стержня; x – аргумент, $0 \leq x \leq l$; l – длина стержня, $\sigma(x)$ – жесткость на изгиб, $\sigma(x) = EI(x)$, E – модуль Юнга материала, $I(x)$ – момент инерции поперечного сечения относительно оси, проходящей через нейтральную линию и ортогональной плоскости изгиба, $I(x) \geq I_0 > 0$.

Требуется определить минимальное значение P_* сжимающей нагрузки $P_* > 0$ такое, что $u(x) \neq 0$, т.е. значение, приводящее к потере устойчивости невозмущенного состояния $u(x) \equiv 0$. Механическая интерпретация явления потери устойчивости приведена в [1–3] и др.

Эта задача эквивалентна соответствующей задаче на собственные значения и функции для самосопряженного оператора с краевыми условиями типа Дирихле [4, 5]. Введем безразмерные переменные и параметры в (1.1) и приведем соответствующую задачу Штурма–Лиувилля к стандартному виду

$$u'' + \lambda r(x)u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $\lambda = Pl^2/\sigma_0$ – безразмерный параметр, подлежащий определению; σ_0 – характерное значение жесткости $\sigma(x)$, например максимальное; функция $r(x) = \sigma_0/\sigma(x)$ имеет смысл относительной упругой податливости стержня в точке x . В качестве единицы длины взята величина l ; переменные x, u обезразмерены на l .

Требуется найти минимальное значение $\lambda_1 > 0$ (первое собственное число), для

которого задача (1.2) допускает нетривиальное решение $u_1(x) = u(x, \lambda_1)$. Нижний индекс 1 далее опускается для сокращения записи. Критическая сила P_* определяется по значению λ в соответствии с формулой замены. На основе собственной функции $u(x, \lambda)$ определяется равновесная форма после потери устойчивости под действием сколь угодно малого воздействия (некоторого смещения [1–3]). Отметим, что к задаче на собственные значения и функции вида (1.2) приводятся многие задачи теоретической и математической физики, квантовой механики, теории упругости, гидродинамики, теории колебаний и др.

Для приближенного решения задачи (1.2) разработан ряд методов (принцип Релея, метод Релея – Ритца, метод Бубнова – Галеркина, метод "пристрелки", подходы Вайнштейна, Ароншайна, Фиккера и многие другие, см. [1–8]). Важное значение для теории и приложений имеет построение высокоточных оценок первого собственного числа λ , характеризующего основные свойства упругой системы. Эффективные методы построения оценок сверху базируются на вариационном подходе; их обоснование дано Н.М. Крыловым [6].

Приведем эквивалентную задаче (1.2) соответствующую вариационную формулировку. Она заключается в минимизации квадратического функционала J на классе дифференцируемых функций $\{u(x)\}$, удовлетворяющих условию нормировки $\Phi = 1$ с весом $r(x)$ и нулевым граничным условиям (1.2):

$$J[u] = \min \int_0^1 u'^2 dx = \lambda, \quad u(0) = u(1) = 0$$

$$\Phi[u] = \|u\|_r^2 = \int_0^1 u^2 r(x) dx = 1 \quad (1.3)$$

Из (1.2), (1.3) следует, что первая собственная функция $u(x)$ должна быть строго выпуклой (вверх или вниз).

Оценка сверху λ^* первого собственного числа λ эффективно строится на основе принципа Релея с помощью некоторой пробной функции $\psi(x)$, выбираемой из интуитивных представлений о первой форме изгиба стержня при потере устойчивости; имеем [9, 10]:

$$J[\psi] / \Phi[\psi] = \lambda^* \geq \lambda, \quad \psi(0) = \psi(1) = 0 \quad (1.4)$$

Функция $\psi(x)$, $0 \leq x \leq 1$ должна быть также выпуклой и непрерывно дифференцируемой; условие нормировки типа (1.3) не обязательно. Равенство в оценке (1.4) имеет место только при выполнении условия $\psi(x) \equiv c u(x)$, где $c = \text{const}$.

Оценка сверху λ^* (1.4) может быть уточнена с помощью метода Релея – Ритца [6]. Построение эффективной оценки снизу λ_* , $0 < \lambda_* \leq \lambda$ представляет значительные принципиальные и вычислительные трудности [7, 8]. Отметим, однако, что на основе удачной начальной оценки λ^0 , например $\lambda^0 = \lambda^*$, может быть построена рекуррентная численно-аналитическая процедура последовательного ее уточнения [9, 10]. Она оказывается весьма эффективной также в сложных случаях, когда функция $r(x)$ (и $\sigma(x)$) существенно изменяются (на много порядков), т.е. для сильно неоднородных стержней, для которых известные методики непродуктивны (см. п. 4).

2. Приближенное решение задачи Эйлера. Предлагается оригинальная численно-аналитическая процедура метода возмущений. Мерой близости λ^0 к λ , в частности λ^* к λ , возьмем величину ε , определяемую посредством алгоритма [9, 10]:

$$\varepsilon = 1 - \xi, \quad \xi = \min_x \arg v(x, \lambda^0) > 0$$

$$v'' + \lambda^0 r(x)v = 0, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1 \quad (2.1)$$

Здесь $v = v(x, \lambda^0)$ – известное решение задачи Коши, которое может быть построено численно или аналитически; ξ – ближайший к значению $x = 1$ корень уравнения $v(x, \lambda^0) = 0$. Отметим, что $\varepsilon = 0$ лишь при условии $\lambda^0 = \lambda$ и, кроме того, $\varepsilon > 0$ при $\lambda^0 = \lambda^*$ ($\lambda^* > \lambda$), что следует из второй осцилляционной теоремы (сравнения) Штурма [11, 12]. Можно также установить, что $\varepsilon = O(\delta)$, где $\delta = \lambda^0 - \lambda$. Предполагается, что удачным выбором пробной функции $\psi(x)$ или набора линейно независимых функций $\psi_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ величина ε может быть сделана достаточно малой. Значение ξ и величина параметра ε далее считаются известными; они могут быть найдены численно или аналитически согласно процедуре (2.1). Если найденное значение $\lambda^0 < \lambda$ (оценка снизу), то абсцисса $\xi > 1$ ($\varepsilon < 0$), и в (2.1) для определения решения $v(x, \lambda^0)$ функция $r(x)$ продолжается произвольным гладким образом на промежутке $1 < x \leq \xi$, $r(x) > 0$.

Совершим в (1.2) замену аргумента $y = x\xi$, параметра $\Lambda = \lambda\xi^{-2}$ и функции $U(y, \varepsilon) \equiv v(x)$, $0 \leq y \leq \xi$ и применим метод возмущений для приближенного решения задачи Штурма–Лиувилля согласно методике [9, 10]. В качестве нулевого приближения (с погрешностью $O(\varepsilon)$) имеем известные величины: $\Lambda^0 = \Lambda(0) = \lambda^0$, $U^0(y) = U(y, 0) = v(y, \lambda^0)$. Следующее приближение $\Lambda^{(1)}(\varepsilon)$, $U^{(1)}(y, \varepsilon)$ строится на основе известного порождающего решения. Из условия самосопряженности краевой задачи (альтернативы Фредгольма) следует искомое выражение для $\Lambda^{(1)}(\varepsilon) = \lambda^0 + \varepsilon\Lambda^1$, разрешая которое в соответствии с формулой замены, получим для $\lambda^{(1)}$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ представления

$$\lambda^{(1)} = \lambda^0 \xi^2 (1 + \varepsilon \Lambda^1 / \lambda^0) = \lambda^0 (1 + \varepsilon (\Lambda^1 / \lambda^0 - 2)) \quad (2.2)$$

$$\Lambda^1 = - \frac{\lambda^0}{\|v\|_r^2} \int_0^\xi y r'(y) v^2(y, \lambda^0) dy = \frac{\lambda^0}{\|v\|_r^2} \int_0^\xi r(y) (y v^2)' dy$$

$$\|v\|_r^2 = \int_0^\xi r(y) v^2(y, \lambda^0) dy, \quad |\lambda^{(1)} - \lambda| \leq C\varepsilon^2$$

Заметим, что без потери точности по степеням ε можно положить величину $\xi = 1$ в Λ^1 и $\|v\|_r^2$ (2.2), т.е. указанного выше продолжения функции $r(x)$ (при $\xi > 1$) не требуется. Функция $U^1(y, \lambda^0)$ – коэффициент разложения $U = v + \varepsilon U^1 + \varepsilon^2 \dots$ – может быть построена в виде квадратуры численно или аналитически на основе известной функции $v(y, \lambda^0)$ (2.1) и формулы Лиувилля [11]. Аналогично находятся последующие приближения $\Lambda^{(k)}$, $U^{(k)}$, которые сходятся к искомому решению задачи Штурма – Лиувилля со скоростью $(C\varepsilon)^k$ при $\varepsilon > 0$ достаточно малом; постоянная C не зависит от ε и определяется конструктивно через функцию $r(x)$ и постоянную λ^0 . Этот подход, однако, не представляет практического интереса, поскольку приводит к весьма громоздким вычислениям. Далее будет предложен другой способ уточнения искомых величин λ , $u(x, \lambda)$.

Обратимся вновь к формулам (2.2); из них, в частности, следует, что $\lambda^* \xi^2 = \lambda_* \leq \lambda$, если $\Lambda^1 > 0$, так как при $\lambda^0 = \lambda^*$ величина $\varepsilon > 0$. Грубое достаточное условие выполнения неравенства для Λ^1 , устанавливаемое без вычисления квадратуры, состоит в том, чтобы $r'(x) \leq 0$, так как сомножитель под знаком интеграла знак-определен. Заметим, что оценка снизу λ_* , как и оценка сверху λ^* , определяются с погрешностью $O(\varepsilon)$. При $\Lambda^1 < 0$ величина $\lambda^* \xi^2 = \lambda^{**}$ есть уточненная оценка сверху. В общем случае выражение (2.2) позволяет вычислить уточненное значение λ : $\lambda = \lambda^{(1)} + O(\varepsilon^2)$.

На основе формул (2.1), (2.2) можно построить эффективный численно-аналитический метод ускоренной сходимости (типа метода касательных Ньютона, см. [9, 10]) для высокоточного определения искомых значений λ и функций $u(x, \lambda)$. Как пока-

зывает вычислительная практика (см. расчет конкретных примеров в п. 4), он позволяет за несколько итераций (обычно 2–4) получить практически точное значение искомого величин, т.е. решение задачи Эйлера (1.1), (1.2) для различных, в том числе весьма сложных распределений жесткости $\sigma(x)$.

3. Метод ускоренной сходимости. Соотношения (2.1), (2.2) можно использовать рекуррентным образом для уточнения искомого величин $\lambda, u(x, \lambda)$. Формула (2.2), требующая взятия квадратур, существенным образом упрощается посредством интегрирования по частям. В результате имеем выражение [9, 10]:

$$\lambda^{(1)} = \lambda^0 - \varepsilon \xi v'^2(\xi, \lambda^0) \|v\|_r^{-2}, \quad \xi = 1 - \varepsilon, \quad |\lambda^{(1)} - \lambda| \leq C\varepsilon^2 \quad (3.1)$$

Без уменьшения точности по степеням ε можно положить $\xi = 1$. Из (3.1) следует соотношение, имеющее ясный механический смысл

$$\left. \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda^{(1)} - \lambda^0}{\varepsilon} = - \frac{v'^2(1, \lambda)}{\|u\|_r^2} < 0 \quad (3.2)$$

Из неравенства (3.2) находим, что уменьшение длины ($\xi < 1$) стержня приводит к увеличению критической силы и, наоборот, увеличение – к уменьшению.

Отметим, что выражение (3.1) содержит квадрат нормы (с весом $r(x)$) функции $u(x, \lambda^0)$, вычисляемой посредством квадратуры (2.2). Оно может быть приведено к конечному виду

$$\|v\|_r^2 = v'(\xi, \lambda^0) w(\xi, \lambda^0), \quad v'^2 \|v\|_r^{-2} = v'(\partial v / \partial \lambda)^{-1} \Big|_{x=\xi, \lambda=\lambda^0}$$

$$w(x, \lambda^0) = \partial v / \partial \lambda, \quad w'' + \lambda^0 r(x) w = -r(x) v, \quad w(0) = w'(0) = 0 \quad (3.3)$$

Однако для определения функции $w(x, \lambda^0)$ требуется дополнительное интегрирование задачи Коши, см. (2.1), (3.3). Таким образом, взятие квадратуры (2.2) оказывается эквивалентным интегрированию неоднородного уравнения с нулевыми условиями на левом конце.

Итак, на основе начального приближения λ^0 , в частности $\lambda^0 = \lambda^*$ (1.4), и построения решения $v^0 = v(x, \lambda^0)$ задачи Коши (2.1) получено уточненное значение $\lambda^{(1)}$, отличающееся от точного на величину $O(\varepsilon^2)$. Используем теперь найденное значение $\lambda^{(1)}$ для построения уточненного решения задачи (2.1), т.е. для определения функции $v^{(1)} = v(x, \lambda^{(1)})$ и чисел $\xi^{(1)} = \min \arg_x v(x, \lambda^{(1)})$ и $\varepsilon^{(1)} = 1 - \xi^{(1)}$, где $|\varepsilon^{(1)}| \leq D\varepsilon^2$. Затем по формуле (2.2) или (3.1) найдем следующее приближение $\lambda^{(2)}$; для него получается оценка точности $|\lambda^{(2)} - \lambda| \leq C\varepsilon^{(1)2} \leq CD^2\varepsilon^4$ и так далее.

Процесс может быть неограниченно продолжен по рекуррентной схеме

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - \varepsilon^{(k)} \xi^{(k)} \frac{v'^2(\xi^{(k)}, \lambda^{(k)})}{\|v_k\|_r^2} = \lambda^{(k)} - \varepsilon^{(k)} \xi^{(k)} \frac{v'(\xi^{(k)}, \lambda^{(k)})}{w(\xi^{(k)}, \lambda^{(k)})}$$

$$\varepsilon^{(k+1)} = 1 - \xi^{(k+1)}, \quad \xi^{(k+1)} = \min_x \arg v(x, \lambda^{(k+1)}) > 0, \quad k \geq 0 \quad (3.4)$$

Вновь отметим, что без потери точности по степеням $\varepsilon^{(k)}$ можно положить величину $\xi^{(k)} = 1$ в выражениях для $\lambda^{(k+1)}$ (3.4). Значение $\lambda^{(k+1)}$ отличается от точного на величину $C\varepsilon^{(k)2} = CD^{-2}(D\varepsilon)^{\theta(k+1)}$, где $\theta(k) = 2^k, k = 0, 1, \dots$. Погрешность удовлетворения граничных условий и определения собственной функции u (а также производных u', u'' для гладкой функции $r(x)$) определяется величиной $\varepsilon^{(k+1)}$:

$$|\varepsilon^{(k+1)}| \leq D\varepsilon^{(k)2} \leq D^{-1}(D\varepsilon)^{\theta(k+1)} \rightarrow 0, \quad |D\varepsilon| < 1 \quad (3.5)$$

Сходимость процесса (3.4) согласно (3.5) имеет ускоренный (квадратический) харак-

тер по степеням параметра $\mu = |D\varepsilon| < 1$. Она весьма высока; через несколько итераций, как показывают вычисления, исчерпываются точностные возможности современного математического обеспечения для персональных ЭВМ. Ниже в п. 4 приведены результаты расчетов некоторых модельных примеров с целью иллюстрации эффективности предложенного метода.

Отметим, что определенную трудность на начальном этапе в сложных ситуациях представляет выбор пробной функции $\psi(x)$ в оценке (1.4) или набора функций $\{\psi_i(x)\}$ для надежного вычисления начального приближения, удовлетворяющего условию $\mu = D|\varepsilon| < 1$. Изложим простейший вариант метода продолжения по параметру в сочетании с методом квадратической сходимости, позволяющий экономично и высокоточно определять искомые величины в случаях, когда функция $\sigma(x)$ может существенно изменяться.

Смысл процедуры продолжения по параметру заключается в замене сложной функции $r(x)$ некоторым дискретным семейством функций $R(\alpha_j, x)$, зависящим от параметра α_j , где $\alpha_j \in [0, 1]$, $j = 0, 1, \dots, N$, таким образом, что при $\alpha_j = 0$ получается "простое" выражение для $R(0, x)$, например $R(0, x) = \text{const}$, а при $j = N$, т.е. $\alpha_N = 1$ имеем исходную "сложную" функцию $R(1, x) \equiv r(x)$. В частности, может оказаться эффективным следующее выражение при достаточно большом N :

$$R(\alpha_j, x) = r_0 + \alpha_j(r(x) - r_0), \quad \alpha_j = j/N, \quad j = 0, \dots, N \quad (3.6)$$

Здесь r_0 — некоторое "среднее" значение функции $r(x)$, например $r_0 = 1/2[\max r(x) + \min r(x)]$. Отметим, что на каждом j -м шаге высокоточные вычисления проводить нецелесообразно; такие вычисления осуществляются на последнем N -м шаге для $R \equiv r$. Начальным приближением λ_{j+1}^0 на $(j+1)$ -м шаге по α_j служит конечное приближение $\lambda_j^{(n)}$, полученное на предыдущем j -м шаге. При $j = 0$ искомым приближением λ является величина $\lambda_0 = \pi^2/r_0$, а пробная функция $\psi(x) = u_0(x) = \sin \pi x$.

В ряде прикладных задач (см. пример 4.3) параметр α (скалярный или векторный) входит естественным образом в выражение $r(x, \alpha)$ и требуется построить семейство собственных чисел $\lambda = \lambda(\alpha)$ для всех $\alpha \in A$ из некоторого множества A . Если при определенном значении $\alpha = \alpha^* \in A$ решение известно, то далее может быть применен указанный выше метод продолжения по параметру α с использованием высокоточной процедуры ускоренной сходимости на каждом шаге изменения параметра α . Отметим, что величина шага $\Delta\alpha$ должна быть достаточно малой, чтобы обеспечивалось условие сходимости процедуры, см. выше.

4. Расчет критической силы для конкретных распределений жесткости. Проиллюстрируем эффективность разработанного подхода решением ряда модельных примеров.

4.1. Рассмотрим сперва распределение жесткости $\sigma(x)$, для которого можно построить точное аналитическое решение задачи (1.2). Возьмем стержень кругового сечения радиуса $\rho(x) = (1 + x^2/l^2)^{1/2}$, монотонно возрастающего при изменении x от значения $x = 0$ до $x = l$ и увеличивающегося в $\sqrt{2}$ раз. Тогда для функции жесткости $\sigma(x)$ имеем выражение $\sigma = \sigma_0(1 + x^2/l^2)^2$ (она при этом возрастает в 4 раза), а податливость $r(x)$ в безразмерных переменных равна $r = (1 + x^2)^{-2}$ и убывает в 4 раза. Решение задачи (1.2) может быть найдено в явном аналитическом виде

$$\lambda = 15, \quad u(x) = 2x(1 - x^2)(1 + x^2)^{-3/2} \quad (4.1)$$

Применим теперь для решения этой задачи приближенную процедуру п. 2. Возьмем простейшую пробную функцию $\psi(x) = \sin \pi x$ (симметричную относительно середины отрезка) и согласно (1.3), (1.4) получим оценку сверху первого собственного числа λ ; имеем $\lambda^* = 15,33728$ (с пятью значащими цифрами после запятой). Интегрируя задачу

Коши согласно (2.1) и определяя абсциссу ξ численно, находим $\xi = 0,98350$. Таким образом, значение параметра $\varepsilon = 1 - \xi$ оказывается равным $\varepsilon = 1,65 \cdot 10^{-2}$. В соответствии с выражениями (2.2) величина $\lambda^* \xi^2$ будет оценкой снизу: $\lambda \geq \lambda_* = \lambda^* \xi^2 = 14,83533$. На первом шаге итерации согласно (2.2) или (3.1), (3.4) получается уточненное значение в первом приближении по ε (с погрешностью $O(\varepsilon^2)$): $\lambda^{(1)} = 15,00847$. Сравнивая с точным значением (4.1), получим величину относительной погрешности $|\lambda^{(1)} - \lambda| \lambda^{-1} = 5,7 \cdot 10^{-4} = O(\varepsilon^2)$. Отметим, что пробная функция $\psi(x)$ выбрана грубо, поскольку она не учитывает несимметрию (уменьшение $r(x)$ или возрастание $\sigma(x)$). Применение метода возмущений согласно процедуре п. 2, 3 позволило эффективно с высокой точностью определить первое собственное число λ (критическую силу), а также форму потери устойчивости.

Возьмем теперь для сравнения стержень постоянного сечения $\rho(x) = \rho_0 = 2/\sqrt{3}$, объем которого равен объему рассмотренного выше стержня переменного сечения. Элементарно находим $\lambda_0 = \pi^2 \rho_0^4 = 16\pi^2/9 \approx 17,6$. Таким образом, стержень постоянного сечения оказывается более "жестким", так как $P_{0*} > P_*$.

4.2. Рассмотрим весьма кратко аналогичную поучительную задачу для случая $\rho(x) = (1+x)^{1/2}$ (в безразмерных переменных). В результате приходим к интегрированию уравнения типа Эйлера [11]; для решения задачи (1.2) получим искомые точные выражения

$$\lambda = \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{\ln^2 2} \approx 20,79229, \quad u(x) = (1+x^2)^{1/2} \sin\left(\frac{\pi}{\ln 2} \ln(1+x)\right) \quad (4.2)$$

Пробная функция $\psi(x) = \sin \pi x$ оказывается еще более грубой: значение $\lambda^* = 22,22421$ нельзя считать хорошим приближением (относительная погрешность порядка 7%). В соответствии с формулами (2.1) определим абсциссу $\xi = 0,95459$, что приводит к значению параметра $\varepsilon = 4,5 \cdot 10^{-2}$. При помощи выражений (2.2) находим оценку снизу $\lambda \geq \lambda_* = \lambda^* \xi^2 = 20,25164$. Уточненное значение в первом приближении равно $\lambda^{(1)} = 20,80330$, относительная погрешность которого $|\lambda^{(1)} - \lambda| \lambda^{-1} = 5 \cdot 10^{-4} = O(\varepsilon^2)$. В итоге получено значительное улучшение оценки критической силы.

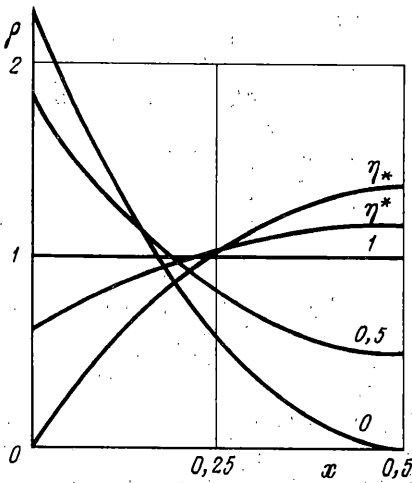
Проведем сравнение результатов со случаем стержня постоянного радиуса $\rho_0 = (3/2)^{1/2}$; объемы такого стержня и рассмотренного выше совпадают. Сравнивая критические силы, имеем неравенство $\lambda_0 > \lambda$, поскольку $\lambda_0 = 9\pi^2/4 \approx 22,3$. Это свидетельствует о большей жесткости стержня постоянного сечения. Поэтому представляет интерес применение разработанного выше метода ускоренной сходимости для эффективного решения задачи о выборе оптимального распределения $\rho(x)$ с целью предельного увеличения критической сжимающей силы P при фиксированном объеме стержня (см. пример 4.3) [13].

4.3. Определим теперь значения критической сжимающей силы для однопараметрического семейства стержней кругового сечения. Предположим, что соответствующая задача Штурма – Лиувилля (1.2) описывается функцией, симметричной относительно середины $x = 1/2$, вида

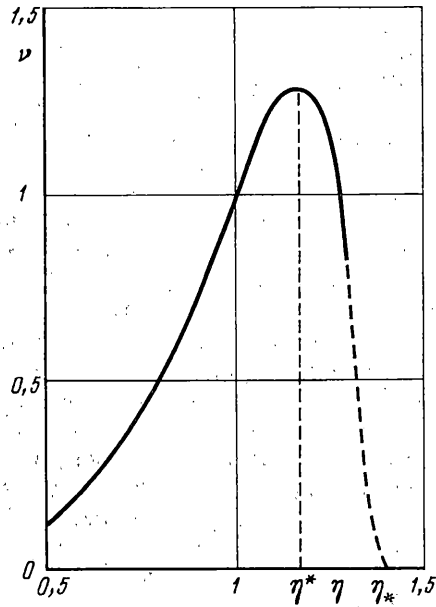
$$r(x, \eta) = [\eta + \gamma(\eta)(x - 1/2)^2]^{-4}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.3)$$

$$\gamma = \gamma(\eta) = (20/3)[- \eta + (9 - 4\eta^2)^{1/2} / \sqrt{5}], \quad 0 < \eta \leq 3/2$$

Нетрудно установить, что объем стержня с нормированным радиусом $\rho(x, \eta) = |\eta + \gamma(\eta)(x - 1/2)^2|$, где $0 < \eta \leq 3/2$ (4.3), постоянен и равен π . При $\eta > 3/2$ таких стержней не существует. Далее, если $0 < \eta < \eta_* = (15/8)^{1/2} = 1,369 < 3/2$, то функция $\rho(x, \eta)$ в нуль не обращается; для значений $\eta_* \leq \eta \leq 3/2$ существуют две симмет-



Фиг. 1



Фиг. 2

ричные относительно $x = 1/2$ точки $x_{1,2}(\eta)$, для которых радиус $\rho(x_{1,2}, \eta) = 0$, т.е. жесткость $\sigma(x_{1,2}, \eta) = 0$, а податливость $r(x_{1,2}, \eta) = \infty$. Из (4.3) также следует, что $\gamma(1) = 0$, $\rho(x, 1) \equiv 1$, т.е. постоянен радиус стержня, относительно которого производятся симметричные вариации в "классе парабол". Если положить $\eta = 0$, то при $x = 1/2$ толщина стержня равна нулю, податливость $r(1/2, 0) = \infty$. На фиг. 1 с целью геометрической наглядности представлены функции $\rho(x, \eta)$, $0 \leq x \leq 1/2$ для различных значений η , $0 \leq \eta \leq 3/2$.

Представляет практический интерес исследование критической силы P_* , т.е. собственного числа λ , в зависимости от параметра семейства η в тех пределах, для которых $r < \infty$, т.е. при $0 < \eta < \eta_*$. С помощью вышеизложенного подхода (см. п. 2, 3) и схемы продолжения по параметру, аналогичной (3.6), получены высокоточные оценки (с относительной погрешностью 10^{-4} – 10^{-5}) сверху и снизу для собственного числа $\lambda = \lambda(\eta)$ (нормированной критической силы P , $P_* = \lambda \sigma_0 / l^2$) при различных значениях параметра η , $0,5 \leq \eta \leq 1,3$.

Представляет теоретический и прикладной интерес определение оптимального значения η^* , приводящего к максимальному значению $\lambda(\eta^*)$. Эта проблема в более общей постановке была предметом многочисленных исследований (см. монографию [13] и библиографию к ней). Для рассматриваемой постановки задачи оптимизации на выбранном согласно (4.3) классе распределений решение приведено на фиг. 2. На графике представлено относительное значение первого собственного числа $\nu(\eta) = \lambda(\eta)/\lambda(1)$. Из вида кривой следует, что при $\eta = \eta^* \approx 1,175$ критическая сила имеет резко выраженный максимум, который приблизительно на 30% больше значения, отвечающего случаю однородного стержня ($\eta = 1$); такая форма представлена на фиг. 1.

5. Выводы. Разработанный в п. 2, 3 высокоточный метод построения оценок собственных значений и функций на основе алгоритма ускоренной сходимости и процедуры продолжения по параметру позволяет эффективно решать задачи о продольном изгибе неоднородных стержней, в том числе задачи оптимизации параметров. При этом могут быть рассмотрены другие условия крепления и учтены распределенные продольные нагрузки. Метод позволяет определять последующие собственные значения

ния и функции в задачах об устойчивости и колебаниях неоднородных стержней. Следует отметить, что высокоточное определение собственных значений и функций (частот и форм) представляет интерес для решения задач точной механики, возникающих в приборостроении, микроэлектронике и других областях современной прецизионной техники.

Имеющийся опыт применения метода в вычислительной практике свидетельствует о его высокой экономичности, быстродействии, устойчивости и точности и в тех сложных случаях, когда жесткостные и инерционные параметры изменяются существенно (на много порядков). Так, в рассмотренной выше модельной задаче п. 4.3 происходит уменьшение коэффициента податливости от концов стержня к его середине приблизительно в 10^3 раз при $\eta = 1,3$. Заметим, что удовлетворительные результаты могут быть получены при помощи элементарных ЭВМ.

Было проведено тестирование метода также сравнением с классическими результатами Кирхгофа в задаче о собственных колебаниях конического стержня, радиус которого $\rho = 0$ на одном из концов [14]. Путем высокоточных расчетов на основе разработанного метода [15] для модели усеченного конуса, радиус ρ которого уменьшается от начала к концу в 10^3 раз (жесткость в 10^{12} , а линейная плотность в 10^6 раз), установлена близость первых собственных значений.

Далее представляется перспективным и полезным развитие и распространение подхода, основанном на методе ускоренной сходимости, для решения задач устойчивости и колебаний более сложных, в том числе многомерных, динамических систем с распределенными параметрами и переменными характеристиками, допускающих вариационную трактовку и описываемых самосопряженными краевыми задачами.

Авторы благодарят А.А. Чайковского за помощь в графическом оформлении вычислительных результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 96-01-00221, 96-01-00265).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 567 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
4. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики // М.: Наука, 1966. 724 с.
6. Крылов Н.М. Методы приближенного решения задач математической физики. Избр. труды. Т. 2. Киев: Изд-во АН УССР, 1961. 150–204.
7. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. М.: Мир, 1970. 328 с.
8. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
9. Нестеров С.В., Акуленко Л.Д. Эффективное решение задачи Штурма–Лиувилля // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 1. С. 44–46.
10. Akulenko L.D., Nesterov S.V. Accelerated convergence method in the Sturm–Liouville problem // Rus. J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 4. P. 517–521.
11. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1953. 468 с.
12. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
13. Троицкий В.А., Петухов Л.В. Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1982. 432 с.
14. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
15. Акуленко Л.Д., Костин Г.В., Нестеров С.В. Численно-аналитический метод исследования свободных колебаний неоднородных стержней // Изв. АН. МТТ. 1995. № 5. С. 180–192.