

УДК 539.3:534.1

© 1998 г. Г.Г. ДЕНИСОВ

ДИССИПАЦИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Введение диссипации в систему обычно сопровождается затуханием ее колебаний относительно состояний равновесия. Однако иногда это приводит к противоположному эффекту, когда силы диссипации являются причиной неустойчивости. Первым примером, по-видимому, можно назвать потерю устойчивости ротора с гибким валом, вращающимся за критическим числом оборотов, обусловленную внутренним трением в материале вала [1–3]. В дальнейшем были указаны и другие примеры механических систем, в которых учет внутренней диссипации приводил не к упрочению устойчивости, а к ее нарушению. Сюда относятся как упругие системы, находящиеся под действием следящей нагрузки [4, 3, 5] или при движущихся краевых условиях [6], так и более сложная, чем гибкий вал, вращающаяся упругая система [7].

Исследование названных, к настоящему времени, многочисленных систем, приводит к заключению о том, что диссипация в материале объекта, его внутреннее трение является основной причиной неустойчивости. Изложенный ниже подход к исследованию устойчивости некоторого класса систем, подобных перечисленным, показывает, что это не совсем так.

В работе рассмотрены три примера совершенно различных систем, объединенных единым подходом к исследованию их устойчивости.

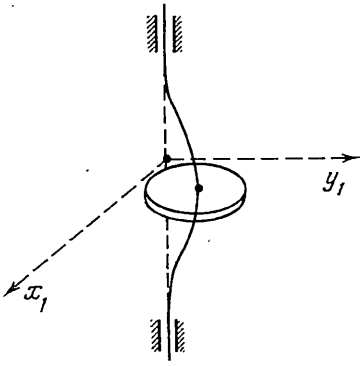
1. Пусть ротор (твердое тело в виде однородного диска) закреплен на гибком невесомом валу, концы которого находятся в соосных подшипниках (фиг. 1). Ось вала проходит через центр масс диска – точку P . Будем интересоваться плоскопараллельными движениями диска, при которых точка P движется в плоскости, ортогональной оси подшипников. Введем в этой плоскости две системы координат: неподвижную Ox_1y_1 и вращающуюся Oxy (фиг. 2). Угол между этими системами координат обозначим через φ . В дальнейшем положим, что вал равномерно вращается с угловой скоростью ω_0 , так, что $\varphi = \omega_0 t$. Будем считать, что сечение вала эллипсоидально, это отмечено на фиг. 2, в силу чего упругая сила, действующая на диск, может быть представлена пружиной с различными жесткостями K_x и K_y . В соответствии со сказанным, функция Лагранжа запишется

$$L = I \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) - \frac{k_x}{2} x^2 - \frac{k_y}{2} y^2$$

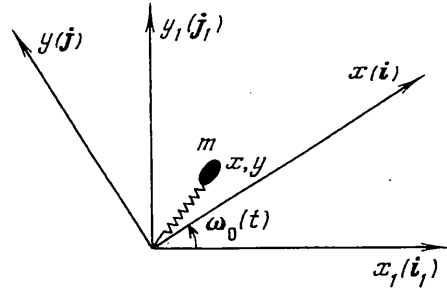
где I , m – момент инерции и масса диска. Учтем теперь силы внешнего трения F_e и силы внутреннего трения F_i , считая их линейно зависящими от скорости

$$F_e = -h'_e (\dot{x}_1 \mathbf{i}_1 + \dot{y}_1 \mathbf{j}_1), \quad F_i = -h'_i (\dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j})$$

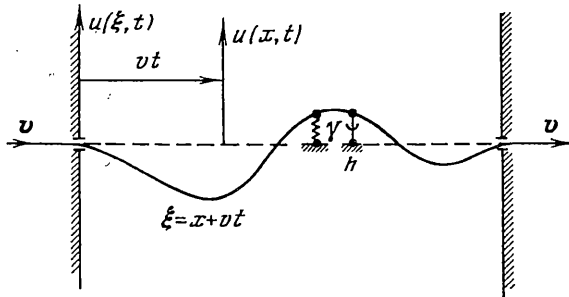
Поскольку внешнее трение возникает при движении вала относительно неподвижной системы координат (например, при движении вала в воздухе), а внутреннее при наличии скорости деформаций материала вала, они введены в разных системах координат. Запишем уравнения движения в вращающейся системе координат, поскольку



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

в ней существенно проще выражаются упругие силы разножесткого вала. Представив скорости \dot{x}_1, \dot{y}_1 через \dot{x} и \dot{y} в функции Лагранжа и в выражении для силы внешнего трения, запишем окончательно уравнения движения для центра диска при его равномерном вращении $\varphi = \omega_0 t$ во вращающейся системе координат

$$\ddot{x} + (\omega_x^2 - \omega_0^2)x - 2\omega_0\dot{y} + h'_x\dot{x} + h_e(\dot{x} - \omega_0 y) = 0$$

$$\ddot{y} + (\omega_y^2 - \omega_0^2)y + 2\omega_0\dot{x} + h'_y\dot{y} + h_e(\dot{y} + \omega_0 x) = 0$$

$$K_{x,y} = \omega_{x,y}^2 m, \quad h'_{i,e} = h_{ie} m \quad (1.1)$$

Более детальное обоснование этой математической модели содержится в [8], отличие состоит в том, что здесь учтена разножесткость вала. Заметим, что вторые члены в этих уравнениях – потенциальные силы, третьи – гироскопические, четвертые и пятые, пропорциональные скоростям – диссипативные и последние – циркулярные.

Условия устойчивости состояния равновесия $x = y = 0$ этой системы могут быть получены, например, с помощью критерия Гурвица. Здесь же, следуя [8], воспользуемся применением общих теорем теории устойчивости Лагранжа, Ляпунова и Кельвина. Будем считать, что $\omega_x < \omega_y$; ω_x и ω_y – это так называемые критические угловые скорости, при совпадении скорости ω_0 с которыми возникают резонансные явления в случае несбалансированного ротора. Здесь рассматривается сбалансированный ротор, резонансные явления отсутствуют, что, однако, не влияет на условия устойчивости. Разделим систему уравнений (1.1) на подсистему (A), содержащую первые 2 члена этих уравнений, подсистему (B) из трех и подсистему (C) из четырех членов. Последовательное рассмотрение этих подсистем позволит сделать заключение об устойчивости, опираясь только на общие теоремы.

Будем учитывать сначала только внутреннее трение. Рассмотрим случай $\omega_0^2 < \omega_x^2$. Подсистема (А), находящаяся под действием только потенциальных сил, устойчива в силу теоремы Лагранжа, т.к. потенциальная энергия имеет изолированный минимум. Добавление гироскопических сил (переход к подсистеме (В)) по теореме Кельвина не изменяет устойчивости, а добавление еще сил диссипации (подсистема (С)) упрочняет устойчивость до асимптотической.

Случай $\omega_x^2 < \omega_0^2 < \omega_y^2$. Подсистема (А) неустойчива (степень неустойчивости нечетная) добавление гироскопических сил оставляет систему неустойчивой, равно как и добавление сил диссипации.

Случай $\omega_y^2 < \omega_0^2$. Подсистема (А) неустойчива (четная степень неустойчивости), добавлением гироскопических сил возможно обеспечить устойчивость, однако добавление еще и сил диссипации разрушает устойчивость.

Таким образом, используя лишь общие теоремы теории устойчивости, получен важный результат о неустойчивости гибкого вала в закритической области, причиной которой является внутреннее трение.

Рассмотрим теперь круглый вал, когда $\omega_x^2 = \omega_y^2 = \omega_k^2$, система становится симметричной и возможен переход к одному уравнению с помощью введения комплексной переменной $z = x + iy$:

$$\ddot{z} + (\omega_k^2 - \omega_0^2)z + 2\omega_0 i \dot{z} + (h_i + h_e)\dot{z} + h_e i \omega_0 z = 0 \quad (1.2)$$

Здесь второй, третий, четвертый и пятый члены суть потенциальные, гироскопические, диссипативные и циркулярные силы соответственно. Отметим, что гироскопические и циркулярные силы содержат мнимый коэффициент.

В комплексном виде легко записывается переход от неподвижной системы $z_1 = x_1 + iy_1$ к вращающейся и обратно по формуле $z = z_1 e^{i\omega_0 t}$. Уравнения в неподвижной системе координат имеют вид

$$\ddot{z}_1 + \omega_k^2 z_1 + (h_i + h_e)\dot{z}_1 - h_e i \omega_0 z_1 = 0 \quad (1.3)$$

Если по уравнению (1.2) легко определить влияние на устойчивость сил только внутреннего трения $h_i \neq 0, h_e = 0$, повторив рассуждения, использующие теоремы теории устойчивости, то по уравнению (3) очень просто рассмотреть случай, когда имеется только внешнее трение $h_i = 0, h_e \neq 0$. Ответ очевиден – учет внешнего трения делает систему асимптотически устойчивой при любой скорости вращения ω_0 .

Условия устойчивости при наличии как внутреннего, так и внешнего трения можно получить из уравнения (1.2) или (1.3), они хорошо известны и имеют вид

$$\omega_0 < (1 + h_e/h_i)\omega_k \quad (1.4)$$

Эта формула содержит, в частности, и результаты рассмотренных случаев, когда есть только внутреннее трение и вал устойчив лишь в докритической области $\omega_0 < \omega_k$ и когда есть только внешнее трение и вал устойчив всюду.

Отметим, что при переходе от невращающейся системы координат к вращающейся появляются гироскопические силы и центробежные, которые изменяют потенциальную энергию так, что при $\omega_0 < \omega_k$ она минимальна в состоянии равновесия $x = y = 0$, а при $\omega_k < \omega_0$ – максимальна. Отсюда, в силу теоремы Кельвина влияние диссипации зависит от того, в какой системе координат она введена. Так, внешнее трение вводится в неподвижной системе координат при минимуме потенциальной энергии и упрочняет устойчивость до асимптотической, а внутреннее – во вращающейся системе, делая систему асимптотически устойчивой при $\omega_0 < \omega_k$ и неустойчивой в закритической области, когда $\omega_k < \omega_0$.

Из сказанного следует, что причиной неустойчивости может быть не обязательно внутреннее трение, но и трение о внешнюю среду (например, о воздух), если эта среда находится в цилиндрической полости, окружающей гибкий вал, и вращающейся с угловой скоростью ω_0 . Тогда запись сил сопротивления вала об эту среду надо производить во вращающейся вместе с полостью системе координат, что эквивалентно введению внутреннего трения.

2. Пусть имеется некоторая упругая система в виде струны или балки, которая протягивается со скоростью v через два отверстия в стенах лаборатории (фиг. 3). Эта система подпружинена в каждой точке с погонной жесткостью γ и задемпфирована в лабораторной системе координат с погонным коэффициентом линейного трения h . Отклонение от равновесного состояния будем записывать в двух системах координат, в лабораторной $u(\xi, t)$ и связанной с балкой $u(x, t)$, так, что $\xi = x + vt$. Запишем уравнения движения этой упругой системы в координатах, связанных с ней

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + \gamma u + b^2 u_{xxxx} + \eta u_{xxxx} + hu_t(\xi, t) = 0 \quad (2.1)$$

Здесь a^2 характеризует натяжение упругой системы, b^2 – балочные свойства, η – внутреннее трение, пропорциональное скорости изменения упругих напряжений, последний член характеризует внешнее демпфирование относительно лабораторной системы. Для применения общих теорем запишем уравнения в лабораторной системе, осуществляя переход от $u(x, t)$ к $u(\xi, t)$:

$$\ddot{u} + 2v\dot{u}' + (v^2 - a^2)u'' + \gamma u + b^2 u^{IV} + \eta v u^V + hu = 0 \quad (2.2)$$

Здесь точкой обозначена производная по времени, а штрихом по координате ξ . Отметим, что вид производных по координатам остался прежним, а вид производных по времени изменился в соответствии с соотношением $\xi = x + vt$. Последний член уравнения не претерпел изменения, т.к. он и должен быть записан в лабораторной системе.

Далее сделаем предположение о том, что расстояние между стенами лаборатории существенно больше длины волны интересующих нас возмущений, это лишит нас необходимости решать краевую задачу. Будем искать решение в виде $u(\xi, t) = z(t)e^{ik\xi}$.

Подстановка в уравнение (2.2) дает

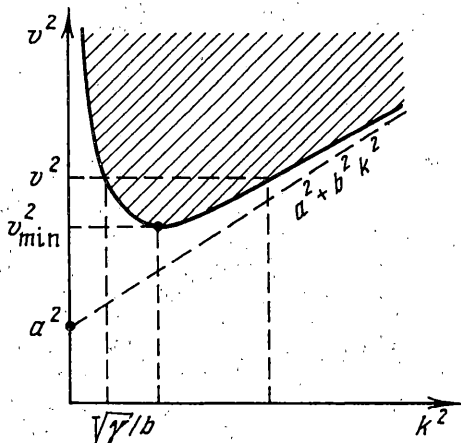
$$\ddot{z} + 2v ik \dot{z} + [(a^2 - v^2)k^2 + \gamma + b^2 k^4]z + (h + \eta k^4)\dot{z} + i\eta v k^5 z = 0 \quad (2.3)$$

Это уравнение во многом сходно с уравнением (2). В нем второй член аналог гироскопических сил, третий – потенциальных, четвертый – диссипативных, пятый – циркулярных. Здесь роль угловой скорости вращения ω_0 между системами координат в первом примере играет величина ik . Обратим внимание на то, что знак коэффициента при z в третьем члене зависит от величины скорости v . Приравняв к нулю этот коэффициент, получим зависимость

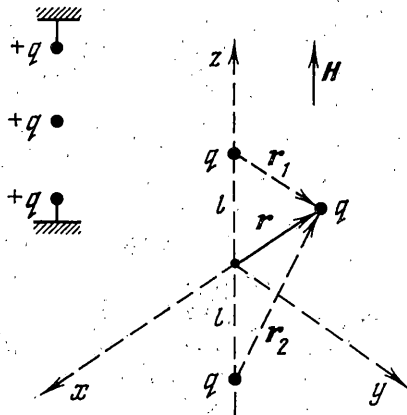
$$v^2 = a^2 + b^2 k^2 + \gamma k^{-2} \quad (2.4)$$

представленную на фиг. 4 сплошной кривой, имеющей минимум $v_{\min}^2 = a^2 + b(\gamma)^{1/2}$ при значении $k^2 = (\gamma b^{-1})^{1/2}$. Ниже этой кривой потенциальная энергия упругой системы при $z = 0$ минимальна, выше – максимальна. Отсюда сразу следует, что при $\eta = 0$, когда к гироскопическим и потенциальным силам добавляются силы диссипации ($h \neq 0$) система становится асимптотически устойчивой для возмущений с волновым числом k , если точка v^2, k^2 , характеризующая скорость протяжки и длину волны возмущения, лежит ниже кривой и неустойчивой, если эта точка находится выше кривой. Задав скорость $v^2 > v_{\min}^2$, по графику сразу можно определить интервал длин волн, которые могут возбудиться. Несложные расчеты приводят к условию устойчивости

$$v < (1 + \eta k^4 / h)(a^2 + b^2 k^2 + \gamma k^{-2})^{1/2} \quad (2.5)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Эта формула показывает, что неустойчивость возникает при достаточно большой скорости v , которая всегда больше, чем скорость распространения возмущений a вдоль струны, зависит от балочных свойств b^2 упругой системы и погонной жесткости γ .

Для устойчивости упругой системы при всех возможных возмущениях необходимо, чтобы неравенство (2.5) выполнялось при всех волновых числах k , т.е. чтобы скорость v была бы меньше минимума кривой (2.5), который растет вместе с увеличением отношения внутреннего трения k внешнему η/h . Так, например, при $\eta = 0$ $v_{\min} = a + b(\gamma)^{1/2}$, а при $\eta/h \rightarrow \infty$ $v_{\min}^2 \rightarrow \infty$. Вид зависимости условий устойчивости в рассматриваемом случае сходен с формулой (1.4) с тем существенным различием, что внешнее и внутреннее трение поменялись местами и во втором примере причиной неустойчивости является внешнее трение. Это значит, что демпфирование рассматриваемого упругого объекта за счет вязкой среды или каких-либо других устройств, создающих трение в лабораторной системе координат, возможно только в случае, если скорость протяжки не превосходит v_{\min} , в противном случае возникает неустойчивость. С другой стороны, внутреннее трение в материале упругой системы является стабилизирующим фактором.

Парадокс, возникающий при сопоставлении причин неустойчивости в первом и втором примерах, разрешается просто. В случае вала внутреннее трение проявляется (и вводится в математическую модель) во вращающейся системе координат и в закритическом состоянии становится причиной неустойчивости, когда за счет центробежных сил потенциальная энергия невозмущенного вала максимальна. Во втором примере внешнее трение проявляется в лабораторной системе координат, перемещающейся относительно упругого объекта со скоростью v , потенциальная энергия в этой системе при достаточно большой скорости теряет минимум и внешнее трение, становится причиной неустойчивости.

Представляет интерес запись уравнения (2.3) в системе координат x, t , связанных с упругим объектом, в которой вязкая среда представляет собой "ветер", движущийся со скоростью v . Воспользуемся соотношением $u(x, t) = z(t)e^{ikx + ikvt} = z_1(t)e^{ikx}$. После несложных преобразований получим

$$\ddot{z}_1 + (a^2 k^2 + b^2 k^4 + \gamma)z_1 + \eta k^4 \dot{z}_1 + h(\dot{z}_1 - ikv z_1) = 0 \quad (2.6)$$

откуда непосредственно следует, что при $h = 0, \eta \neq 0$ упругая система асимптотически устойчива при любых k и величине скорости v . Подставляя в полученное уравнение

при $\eta = 0$, $h = 0$ решение $e^{i\omega t}$, получим так называемое дисперсионное соотношение, связывающее частоту колебаний ω и волновое число k , которому можно придать вид

$$v_{\Phi}^2 = \omega^2 / k^2 = a^2 + b^2 k^2 + \gamma k^{-2} \quad (2.7)$$

этим соотношением квадрат фазовой скорости v_{Φ}^2 выражается через параметры a , b , γ упругой системы и волновое число k . Замечая, что $v_{\Phi \min}^2 = a^2 + b(\gamma)^{1/2}$ можно условия устойчивости упругой системы при $\eta = 0$, $h \neq 0$ (8) трактовать так: система асимптотически устойчива, если скорость среды v меньше минимально возможной фазовой скорости и неустойчива из-за наличия только внешнего трения при $v^2 > v_{\Phi \min}^2$.

Подводя итог исследованиям первой и второй задачи заключаем, что введение диссипации упрочняет устойчивость или нарушает ее в зависимости от того, имеет минимум потенциальная энергия в системе координат, в которой вводится диссипация, или не имеет.

3. Пусть имеется система из трех одноименных зарядов q , два из которых закреплены, а третий может свободно перемещаться¹ (фиг. 5). Состояние, при котором свободный заряд находится посередине закрепленных, – равновесное, очевидно, что оно неустойчиво. Введем в рассмотрение однородное магнитное поле напряженности \mathbf{H} , направленное вдоль оси закрепленных зарядов, и исследуем устойчивость состояния равновесия. Рассмотрение это примера предпринято с целью ответа на вопрос, возможно ли обеспечение устойчивости неконтактного вывешивания тела в постоянном нерегулируемом поле. Уравнения движения свободного заряда массы m запишем в виде

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -q \text{grad } \varphi + q / c \mathbf{v} \times \mathbf{H} - h' \dot{\mathbf{r}} \quad (3.1)$$

Здесь первый член в правой части уравнения – сила, действующая на заряд со стороны электрического поля, а второй – сила Лоренца, возникающая при движении заряда со скоростью \mathbf{v} в магнитном поле, последний – сила сопротивления среды, c – скорость света.

Потенциал φ электрического поля и его разложение при малом отклонении x , y , z от состояния равновесия имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= q / r_1 + q / r_2 = q[x^2 + y^2 + (l-z)^2]^{-1/2} + \\ &+ q[x^2 + y^2 + (l+z)^2]^{-1/2} \approx q \left(\frac{2}{l} + \frac{-x^2 - y^2 + 2z^2}{l^3} \right) \end{aligned}$$

В соответствии с законами электростатики

$$\Delta \varphi = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{q}{l^3} (-2 - 2 + 4) = 0 \right)$$

Здесь конкретное выражение лапласиана приведено для того, чтобы подчеркнуть, что он является суммой жесткостей сил, действующих на единичный заряд, которая всегда равна нулю, и, тем самым, доказывается теорема Ирншоу о невозможности неконтактного устойчивого состояния равновесия системы тел, взаимодействующих между собой с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. В частности, невозможна левитация в постоянном нерегулируемом электрическом поле. Однако учет в этом случае и магнитного поля кардинально меняет ситуацию.

¹ Об этом примере и возможности обеспечения консервативной устойчивости за счет магнитного поля автор узнал из работы Ю.Г. Мартыненко "О проблемах левитации в силовых полях" // Сорес. образ. ж. 1996. № 3. С. 82–86.

Система уравнений после линеаризации и учета сил сопротивления с коэффициентом h может быть записана в виде

$$\ddot{x} - kx + a\dot{y} + h\dot{x} = 0 \quad (3.2)$$

$$y - ky - ax + hy = 0, \quad \ddot{z} + 2kz + h\dot{z} = 0$$

$$k = 2q^2 m^{-1} l^{-2}, \quad a = qHc^{-1} m^{-1}, \quad h = h' m^{-1}$$

В линейном приближении исходная система разбивается на две, одна из них соответствует движениям по координате z асимптотически устойчива, а другая может быть записана в комплексном виде

$$\ddot{u} - ku - ia\dot{u} + h\dot{u} = 0, \quad u = x + iy \quad (3.3)$$

В этой системе имеются потенциальные силы, гироскопические и диссипативные. При четной степени неустойчивости при наличии только потенциальных сил (два первых члена уравнения) добавление гироскопических сил доставляет системе устойчивость, если $a^2 > 4k$. Т.е. в случае достаточно большой напряженности магнитного поля корни характеристического уравнения чисто мнимы и равны

$$p_{1,2} = \frac{1}{2}i(a \pm (a^2 - 4k)^{1/2}) = i\omega_{1,2}$$

Однако, добавление сколь угодно малых сил диссипации разрушает устойчивость состояния равновесия, что исключает практическое применение постоянных электромагнитных полей в рассматриваемой схеме с целью левитации.

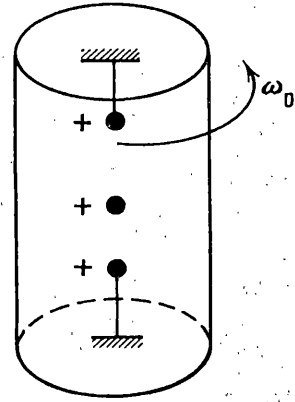
Вместе с тем, основываясь на результатах первого и второго примеров, можно указать способ достижения асимптотической устойчивости в данной системе. Запишем для этого уравнения (3.3) во вращающейся системе координат, полагая $U = We^{i\omega_0 t}$ ($h = 0$):

$$\ddot{W} + i(2\omega_0 - a)\dot{W} + (-\omega_0^2 + a\omega_0 - k)W = 0$$

Благодаря вращению, изменилась величина гироскопических сил и, что существенно важнее, потенциальные силы. Более того, в случае $\omega_2 < \omega_0 < \omega_1$ коэффициент при z становится положительным, т.е. потенциальная энергия в состоянии равновесия минимальна. Значит, введение диссипации в этой вращающейся системе координат доставляет объекту асимптотическую устойчивость. Практически это можно осуществить, поместив систему зарядов в закрытый вращающийся цилиндрический кожух, увлекающий вязкую среду (фиг. 6). Угловая скорость вращения должна удовлетворять неравенству $\omega_2 < \omega_0 < \omega_1$, причем этот интервал частот достаточно широк и вполне достижим.

Таким образом, применение общих теорем теории устойчивости позволило без конкретных расчетов сделать заключение об устойчивости динамических систем (п. 1 и 2), предложить оригинальную схему обеспечения асимптотической устойчивости неконтактного состояния равновесия тела в электромагнитном постоянном нерегулируемом поле (п. 3) и позволяет указать другие примеры неординарного влияния диссипации на устойчивость механических систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00927).



Фиг. 6

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kimball A.L.* Internal friction theory of shaft whirling // *Gen. Electr. Rev.* 1924. Т. 27. № 4. P. 244–251.
2. *Диментберг Ф.М.* Изгибные колебания вращающихся валов. Изд-во АН СССР, М.: 1959. 247 с.
3. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
4. *Beck M.* Die Knicklast des einseitig eingespannten tangential gedruckten Stabes // *ZAMP.* 1952. Bd 3. № 3. P. 225–228.
5. *Денисов Г.Г., Новиков В.В.* Об устойчивости упругих систем с малым внутренним трением // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1978. № 3. С. 41–47.
6. *Денисов Г.Г., Новиков В.В.* Об устойчивости бесконечной балки, вдоль которой перемещаются два ограничителя // *Динамика систем: Оптимизация и адаптация.* Горький: ГГУ, 1982. С. 182–195.
7. *Денисов Г.Г., Сидяков Д.Ф.* Исследование поперечных колебаний вращающегося упругого диска с закрепленным в его середине твердым телом // *Машиноведение.* 1970. № 1. С. 39–45.
8. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.

Н.-Новгород

Поступила в редакцию
13.VI.1996