МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1998

УДК 531.53

 А.П. МАРКЕЕВ, Т.Н. ЧЕХОВСКАЯ

О КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОГО МАЯТНИКА

Изучается плоское движение материальной точки, подвешенной на невесомой пружине в однородном поле тяжести. Решена задача об орбитальной устойчивости вертикальных периодических колебаний произвольной амплитуды.

Колебания упругого маятника впервые изучались Виттом и Гореликом [1] в связи с анализом механической модели ионных колебаний молекул. Некоторые вопросы динамики такого маятника рассматривались затем в ряде исследований (см., например, [2–4]).

1. Уравнения движения. Рассмотрим материальную точку M, прикрепленную к одному из концов невесомой пружины, другой конец которой закреплен в неподвижной точке O (фиг. 1). Движение происходит в фиксированной вертикальной плоскости Oxy в однородном поле тяжести.

Пусть l_0 – длина нерастянутой пружины, k – ее жесткость, m – масса точки, g – ускорение свободного падения. Положение точки задается ее декартовыми координатами x, y.

Для кинетической и потенциальной энергии имеем выражения $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$, $\Pi = \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2+y^2} - l_0)^2 - mgx$, где точкой обозначено дифференцирование по времени t.

Пусть l – длина пружины в равновесном состоянии маятника на вертикали. Тогда $l_0 = l(1-\mu^2)$, где $\mu^2 = mg/(kl)$ $(0 \leqslant \mu \leqslant 1)$. Отметим, что величина μ представляет собой отношение частот $\sqrt{g/l}$ и $\sqrt{k/m}$ малых колебаний точки M в окрестности ее положения равновесия на вертикали.

Если ввести безразмерные величины q_1, q_2, τ по формулам $x = lq_1$, $y = lq_2$, $\tau = \sqrt{k/m}t$, то уравнения движения маятника запишутся в виде

$$q_1'' + q_1 - (1-\mu^2)q_1(q_1^2+q_2^2)^{-1/2} - \mu^2 = 0 \tag{1.1}$$

$$q_2'' + q_2 - (1-\mu^2)q_2(q_1^2+q_2^2)^{-1/2} = 0$$

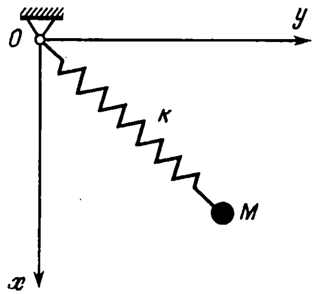
Этим уравнениям отвечает функция Лагранжа

$$L = \tfrac{1}{2}(q_1'^2 + q_2'^2) - \tfrac{1}{2}(q_1^2+q_2^2) + (1-\mu^2)\sqrt{q_1^2+q_2^2} + \mu^2 q_1 \tag{1.2}$$

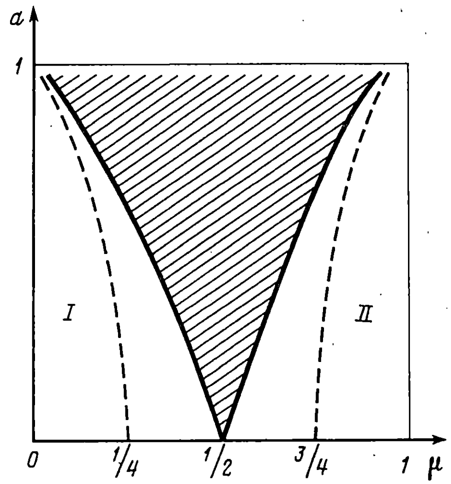
В (1.1) и (1.2) штрихами обозначается дифференцирование по τ.

2. Два случая интегрируемости. В двух предельных случаях, когда $\mu = 0$ или $\mu = 1$ общее решение уравнений движения (1.1) можно получить в аналитической форме.

2.1. Значение $\mu = 0$ соответствует случаю, когда вес mg точки M пренебрежимо мал по сравнению с величиной kl_0.



Фиг. 1



Фиг. 2

Если ввести полярные координаты φ, r по формулам $q_1 = r\cos\varphi$, $q_2 = r\sin\varphi$, то при $\mu = 0$ функция Лагранжа (1.2) примет вид

$$L = \tfrac{1}{2}(r'^2 + r^2\varphi'^2) - \tfrac{1}{2}r^2 + r$$

Координата φ – циклическая, поэтому есть интеграл

$$r^2\varphi' = c = \text{const} \tag{2.1}$$

А так как существует еще интеграл энергии

$$\tfrac{1}{2}(r'^2 + r^2\varphi'^2) + \tfrac{1}{2}r^2 - r = d = \text{const} \tag{2.2}$$

то интегрирование уравнений движения сводится к квадратурам.

Если $c = 0$, то движение точки M представляет собой гармонические колебания вдоль отрезка прямой $\varphi = \text{const}$. Если же $c \neq 0$, то возможны два типа движений. Для одного из них $r = r_0 = \text{const}$, $\varphi' = cr_0^{-2} = \text{const}$, где r_0 – положительный корень уравнения $r - 1 = c^2r^{-3}$. В этом движении пружина растянута на постоянную длину и вращается в вертикальной плоскости вокруг точки O с постоянной угловой скоростью. В движениях второго типа величина $r = r(\tau)$ периодически изменяется между своими минимальным и максимальным значениями, между которыми лежит величина r_0. Пределы изменения r и период колебаний зависят от постоянных c и d интегралов (2.1), (2.2). При этом величина φ' – периодическая функция того же периода, что и функция $r(\tau)$. Величина $|\varphi|$ монотонно возрастает с ростом времени.

2.2. Значение $\mu = 1$ соответствует случаю, который можно назвать противоположным случаю $\mu = 0$. При $\mu = 1$ величина kl_0 пренебрежимо мала по сравнению с силой тяжести mg.

При $\mu = 1$ уравнения движения (1.1) линейны и их общее решение имеет вид (см. также [4]):

$$q_1 = 1 + c_1\sin\tau + c_2\cos\tau, \quad q_2 = c_3\sin\tau + c_4\cos\tau$$

где c_i – произвольные постоянные.

Траектория точки M в плоскости x, y будет эллипсом или при некоторых исключительных значениях постоянных c_i отрезком прямой.

3. Периодическое движение точки вдоль вертикали. Гамильтониан возмущенного движения. При произвольных значениях параметра μ уравнения (1.1) допускают частное решение

$$q_1 = 1 + a \sin(\tau + b), \quad q_2 = 0 \tag{3.1}$$

где a и b – произвольные постоянные ($a > 0$). Это решение соответствует периодическому гармоническому колебанию точки M вдоль вертикали с частотой $\sqrt{k/m}$ и амплитудой a. Чтобы исключить соударения точки M с точкой O закрепления верхнего конца пружины, следует считать, что $a < 1$.

Основная цель данной работы состоит в решении задачи об орбитальной устойчивости периодического движения (3.1) для значений параметров μ, a из области их допустимых значений, задаваемой неравенствами $0 \leqslant \mu \leqslant 1,\ 0 < a < 1$.

При исследовании будем использовать методы теории устойчивости гамильтоновых систем [5–7]. Получим функцию Гамильтона возмущенного движения.

Отвечающая лагранжиану (1.2) функция Гамильтона имеет вид

$$H = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \tfrac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) - (1-\mu^2)\sqrt{q_1^2 + q_2^2} - \mu^2 q_1 \tag{3.2}$$

Если вместо переменных q_1, p_1 ввести канонически сопряженные переменные υ, J по формулам

$$q_1 = 1 + \sqrt{2J}\sin\upsilon, \quad p_1 = \sqrt{2J}\cos\upsilon \tag{3.3}$$

то невозмущенное периодическое движение (3.1) запишется в виде

$$J = J_0, \quad \upsilon = \tau + b, \quad q_2 = 0, \quad p_2 = 0 \quad (2J_0 = a^2) \tag{3.4}$$

Положим $J = J_0 + r_1$ и при учете (3.3), (3.4) разложим функцию (3.2) в ряд по степеням r_1, q_2, p_2. Получим такое выражение для гамильтониана возмущенного движения

$$H = r_1 + h_2(q_2, p_2, \upsilon) + f(\upsilon) r_1 q_2^2 + g(\upsilon) q_2^4 + O_6 \tag{3.5}$$

$$h_2 = \tfrac{1}{2} p_2^2 + \tfrac{1}{2}\chi(\upsilon) q_2^2 \tag{3.6}$$

$$\chi = \frac{\mu^2 + a\sin\upsilon}{1 + a\sin\upsilon}, \quad f = \frac{(1-\mu^2)\sin\upsilon}{2a(1 + a\sin\upsilon)^2}, \quad g = \frac{1-\mu^2}{8(1 + a\sin\upsilon)^3} \tag{3.7}$$

Через O_6 в (3.5) обозначен ряд, начинающийся с членов не ниже шестой степени относительно $\sqrt{|r_1|}$, q_2, p_2, коэффициенты ряда 2π-периодичны по υ.

Орбитальная устойчивость периодического движения (3.1) эквивалентна устойчивости решения $r_1 = 0$, $q_2 = 0$, $p_2 = 0$ уравнений с гамильтонианом (3.5) по отношению к возмущениям переменных r_1, q_2, p_2.

4. Линейный анализ устойчивости. Дифференциальные уравнения первого приближения задаются функцией Гамильтона, представляющей собой сумму первых двух слагаемых в правой части формулы (3.5). Так как в этих уравнениях $\upsilon' = 1$, то задача об орбитальной устойчивости периодического движения (3.1) в первом приближении приводится к исследованию линейной относительно q_2, p_2 системы с 2π-периодическим по υ гамильтонианом h_2 из (3.6).

Пусть $\mathbf{X}(\upsilon)$ – матрица фундаментальных решений этой системы, удовлетворяющая начальным условиям $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица второго порядка. Элементы $x_{ij}(\upsilon)$ матрицы $\mathbf{X}(\upsilon)$ являются решениями уравнений

$$dx_{1k}/d\upsilon = x_{2k}, \quad dx_{2k}/d\upsilon = -\chi(\upsilon)x_{1k} \quad (k = 1, 2) \tag{4.1}$$

с начальными условиями

$$x_{11}(0)=1,\quad x_{21}(0)=0,\quad x_{12}(0)=0,\quad x_{22}(0)=1 \tag{4.2}$$

Характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$ записывается в виде

$$\rho^2-2A\rho+1=0 \tag{4.3}$$

$$A=\tfrac{1}{2}[x_{11}(2\pi)+x_{22}(2\pi)] \tag{4.4}$$

Если $|A|>1$, то уравнение (4.3) имеет корень с модулем, большим единицы. В этом случае [8] движение (3.1) орбитально неустойчиво. И не только в первом приближении, но и в строгой нелинейной постановке задачи об устойчивости.

Если же $|A|<1$, то корни уравнения (4.3) комплексно сопряженные с модулями, равными единице. В этом случае движение (3.1) орбитально устойчиво в первом приближении, а для строгого решения задачи об устойчивости необходимо учитывать нелинейные члены в уравнениях возмущенного движения.

Вообще говоря, даже линейный анализ требует привлечения численных расчетов на ЭВМ. В некоторых случаях, когда функция Гамильтона (3.6) содержит малый параметр, возможно аналитическое исследование.

4.1. Случай малых μ. Если $\mu=0$, то, как следует из п. 2.1, периодическое движение (3.1) орбитально неустойчиво. Возможна ли устойчивость, если μ малая, но отличная от нуля величина? Рассмотрим этот вопрос в линейной задаче об устойчивости. Для этого найдем величину A из (4.4) в виде ряда по μ.

Не останавливаясь на деталях вычислений, отметим только, что удобно предварительно перейти от переменных q_2, p_2 к новым канонически сопряженным переменным Q_2, P_2 по формулам

$$q_2=(1+a\sin\upsilon)Q_2,\quad p_2=a\cos\upsilon Q_2+(1+a\sin\upsilon)^{-1}P_2$$

а в качестве независимой переменной, помимо величины υ, использовать также величины ν и E, определяемые равенствами

$$\upsilon=\frac{\pi}{2}+\nu,\quad \operatorname{tg}\frac{E}{2}=\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}$$

Отметим, что переменные ν и E являются аналогами истинной и эксцентрической аномалии соответственно в теории кеплеровских движений в небесной механике [9].

Для величины A получается следующее выражение:

$$A=1-\mu^2\frac{2\pi^2}{(1-a^2)^{3/2}}+O(\mu^4)$$

При достаточно малых μ величина A меньше единицы и, следовательно, периодическое движение (3.1) орбитально устойчиво в первом приближении.

Были рассмотрены также значения параметра μ, близкие к единице. При $\mu=1$, согласно п. 2.2, периодическое движение (3.1) орбитально устойчиво. Коэффициент A уравнения (4.3) равен единице. Попытка же нахождения поправки к этой величине при малых значениях параметра $\varepsilon=1-\mu^2$ оказалась неудачной. В первом приближении по ε поправка отсутствует, а высшие приближения чрезвычайно громоздки.

4.2. Колебания малой амплитуды. Пусть $0\leqslant a\ll 1$. При $a=0$ имеет место устойчивость в первом приближении, так как функция (3.6) в этом случае представляет собой гамильтониан линейного осциллятора. Частота ω осциллятора равна μ.

При отличных от нуля значениях параметра a в плоскости μ, a из точек оси μ, в которых величина 2ω равняется целому числу, могут рождаться области неустойчивости (области параметрического резонанса) [10]. Так как в изучаемой задаче $\mu<1$, то такая область единственная, она появляется в окрестности точки ($^1/_2$, 0).

Следовательно, если $0 < \mu < {}^1/_2$ или ${}^1/_2 < \mu < 1$, то при достаточно малых амплитудах периодическое движение точки M вдоль вертикали орбитально устойчиво в линейном приближении.

Найдем область параметрического резонанса, рождающуюся из точки (${}^1/_2$, 0). Для этого разложим функцию Гамильтона (3.6) в ряд по степеням a и при помощи 4π-периодической по v линейной канонической замены переменных $q_2, p_2 \to \xi, \eta$, задаваемой рядами по степеням a, исключим из нее независимую переменную v. Анализируя характеристическое уравнение приведенной системы, легко затем найти область неустойчивости.

При вычислениях целесообразно сначала сделать замену переменных $q_2, p_2 \to x, X$ по формулам $q_2 = \sqrt{2x/\mu}\sin x$, $p_2 = \sqrt{2\mu X}\cos x$, а затем применить алгоритм метода Депри–Хори [7, 11] для построения рядов замены $x, X \to y, Y$, которая исключает переменные y, v из разложения новой функции Гамильтона $K(y, Y, v)$ в ряд, кроме тех его членов, которые содержат эти переменные в виде комбинации $(2y - v)$. После этого делается уже окончательная замена $y, Y \to \xi, \eta$, которая представляет собой переход к вращающейся декартовой системе координат: $\xi = \sqrt{2Y}\sin(y - v/2)$, $\eta = \sqrt{2Y}\cos(y - v/2)$.

Описанная процедура была реализована до членов третьей степени относительно a включительно. Если положить $\mu = {}^1/_2 + \delta$, то функция Гамильтона приведенной системы может быть записана в виде

$$K = {}^1/_2(\delta + a^2 f_2)(\xi^2 + \eta^2) + (af_1 + a^3 f_3)\xi\eta + O(a^4) \tag{4.5}$$

$$f_1 = \frac{1-\mu^2}{4\mu}, \quad f_2 = -\frac{(1-\mu^2)(7\mu^2 + 4\mu + 1)}{16\mu^2(2\mu+1)}$$

$$f_3 = \frac{(1-\mu^2)(16\mu^6 - 4\mu^5 + 57\mu^4 + 80\mu^3 + 66\mu^2 + 32\mu + 5)}{192\mu^3(2\mu+1)^2}$$

При выполнении неравенства

$$|\delta + a^2 f_2| < |af_1 + a^3 f_3| + O(a^4) \tag{4.6}$$

характеристическое уравнение приведенной системы имеет положительный корень и, следовательно, имеет место неустойчивость.

Из (4.6) с учетом обозначений для функции $f_i(\mu)$ из (4.5) находим область параметрического резонанса, исходящую из точки (${}^1/_2$, 0):

$$\frac{1}{2} - a\frac{3}{8} - a^2\frac{3}{128} - a^3\frac{81}{2048} + \ldots < \mu < \frac{1}{2} + a\frac{3}{8} - a^2\frac{3}{128} + a^3\frac{81}{2048} + \ldots$$

Другим путем, с точностью до членов второй степени относительно a, эта область получена в [3].

Отметим, что значение $\mu = {}^1/_2$, отвечающее параметрическому резонансу в изучаемой задаче об орбитальной устойчивости вертикальных периодических движений точки M, соответствует внутреннему резонансу 1 : 2 рассмотренной в [1] задачи о малых нелинейных колебаниях точки M в окрестности ее положения равновесия на вертикали.

4.3. Результаты численного исследования. При произвольных значениях параметров μ, a из квадрата $0 < \mu < 1$, $0 < a < 1$ устойчивость исследовалась с привлечением численных расчетов на ЭВМ. Для этого при заданных значениях параметров μ, a интегрировалась система уравнений (4.1) с начальными условиями (4.2). В результате интегрирования вычислялась величина A из (4.4). Таким путем внутри квадрата $0 < \mu < 1$, $0 < a < 1$ были выделены области неустойчивости и области устойчивости в первом приближении. Так как при значениях параметра a, близких к единице, вычисления затруднены из-за появления малых знаменателей в правых частях уравнений (4.1), то расчеты были ограничены значениями a, не превосходящими 0.97.

Результаты расчетов представлены на фиг. 2, где область неустойчивости заштрихована. В незаштрихованных на фиг. 2 областях I и II имеет место устойчивость в первом приближении. Здесь для строгого решения задачи об орбитальной устойчивости движения (3.1) необходим нелинейный анализ.

5. Алгоритм нелинейного анализа. Пусть для значений параметров μ, a из областей I и II фиг. 2 характеристические показатели линейной системы (4.1) равны $\pm i\lambda$. Тогда корни уравнения (4.3) имеют вид $\rho = \exp(\pm i2\pi\lambda)$, причем $\cos 2\pi\lambda = A$. Достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости движения (3.1) могут быть выражены через коэффициенты нормальной формы функции Гамильтона возмущенного движения (3.5) [5–7].

5.1. Нормализация квадратичной части гамильтониана возмущенного движения. Для получения нормальной формы гамильтониана (3.5) сначала надо (ср. с. [12, 13]) найти каноническую замену $r_1, v, q_2, p_2 \to R_1, V, q, p$ такую, чтобы квадратичная по q_2, p_2 часть гамильтониана первого приближения $r_1 + h_2(q_2, p_2, v)$ приняла форму функции Гамильтона линейного осциллятора частоты $|\lambda|$. С этой целью сделаем, согласно алгоритму из [7], линейную вещественную 2π-периодическую по v унивалентную каноническую замену переменных $q_2, p_2 \to q, p$ по формулам

$$q_2 = n_{11}(v)q + n_{12}(v)p, \quad p_2 = n_{21}(v)q + n_{22}(v)p \tag{5.1}$$

где n_{ij} – элементы матрицы $\mathbf{N}$, определяемой равенством

$$\mathbf{N} = \begin{Vmatrix} x_{11}(v) & x_{12}(v) \\ x_{21}(v) & x_{22}(v) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & -\psi x_{12}(2\pi) \\ \psi \sin 2\pi\lambda & \psi(x_{11}(2\pi) - \cos 2\pi\lambda) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \cos\lambda v & -\sin\lambda v \\ \sin\lambda v & \cos\lambda v \end{Vmatrix} \tag{5.2}$$

Здесь $x_{ij}(v)$ – элементы матрицы $\mathbf{X}(v)$ фундаментальных решений системы (4.1), $\psi = \varkappa^{-1/2}$, $\varkappa = x_{12}(2\pi)\sin 2\pi\lambda > 0$, а величина λ вычисляется по формуле

$$\lambda = \begin{cases} (2\pi)^{-1} \arccos A & \text{в области I} \\ -(2\pi)^{-1} \arccos A + 1 & \text{в области II} \end{cases} \tag{5.3}$$

При получении формулы (5.3) и при доказательстве положительности величины $\varkappa$ использована непрерывность элементов матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$ по параметру a и то, что при $a = 0$ величина λ равняется μ, а $x_{12}(2\pi) = \mu^{-1}\sin 2\pi\mu$. Кроме того принято во внимание, что внутри областей I и II устойчивости в первом приближении произведение $x_{12}(2\pi)x_{21}(2\pi)$ не может обратиться в нуль. В противном случае из того, что $\det \mathbf{X}(2\pi) = 1$, следовало бы, что величина A в характеристическом уравнении (4.3) равна 1 или –1.

В переменных q, p квадратичная по q_2, p_2 часть гамильтониана $r_1 + h_2$ принимает нормальную форму

$$h_2 = {}^1/_2\lambda(q^2 + p^2) \tag{5.4}$$

Преобразование (5.1) можно задать при помощи производящей функции $S_1(q_2, p, v)$. Из теории канонических преобразований следует, что исходный гамильтониан (3.6), преобразованный гамильтониан (5.4) и производящая функция связаны тождеством

$$\tfrac{1}{2}\lambda(q^2 + p^2) = \tfrac{1}{2}(n_{21}q + n_{22}p)^2 + \tfrac{1}{2}\chi q_2^2 + \partial S_1 / \partial v \tag{5.5}$$

где частная производная функции S_1 вычисляется по явно входящей в нее переменной υ, а величина q_2 должна быть выражена через q, p, υ в соответствии с первым из равенств (5.1).

При замене переменных $q_2, p_2 \to q, p$ по формулам (5.1) пара канонически сопряженных переменных r_1, υ не подвергалась преобразованию, а υ была принята в качестве независимой переменной. Для получения соответствующего (5.1) канонического преобразования $r_1, \upsilon, q_2, p_2 \to R_1, V, q, p$ по всем четырем переменным возьмем производящую функцию $S(q_2, \upsilon, p, R_1)$ в виде $S = R_1\upsilon + S_1(q_2, p, \upsilon)$.

Каноническое преобразование задается неявно при помощи равенств

$$q = \frac{\partial S}{\partial p} = \frac{\partial S_1}{\partial p}, \quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2} = \frac{\partial S_1}{\partial q_2} \tag{5.6}$$

$$V = \frac{\partial S}{\partial R_1} = \upsilon, \quad r_1 = \frac{\partial S}{\partial \upsilon} = R_1 + \frac{\partial S_1}{\partial \upsilon} \tag{5.7}$$

Из (5.6) получаются выражения (5.1), а из (5.7) и (5.5) имеем

$$\upsilon = V, \quad r_1 = R_1 + \alpha q^2 + \beta qp + \gamma p^2 \tag{5.8}$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(\lambda - n_{21}^2 - \chi n_{11}^2), \quad \beta = -(n_{21}n_{22} + \chi n_{11}n_{12}), \quad \gamma = \tfrac{1}{2}(\lambda - n_{22}^2 - \chi n_{12}^2) \tag{5.9}$$

Подставив q_2, p_2 из (5.1) и r_1 из (5.8), (5.9) в разложение (3.5), получим функцию Гамильтона возмущенного движения в виде

$$H = R_1 + \tfrac{1}{2}\lambda(q^2 + p^2) + (h_{20}q^2 + h_{11}qp + h_{02}p^2)R_1 + h_{40}q^4 + h_{31}q^3p +$$
$$+ h_{22}q^2p^2 + h_{13}qp^3 + h_{04}p^4 + O_6 \tag{5.10}$$

$$h_{20} = fn_{11}^2, \quad h_{11} = 2fn_{11}n_{12}, \quad h_{02} = fn_{12}^2 \tag{5.11}$$

$$h_{40} = f\alpha n_{11}^2 + gn_{11}^4, \quad h_{31} = f(2\alpha n_{11}n_{12} + \beta n_{11}^2) + 4gn_{11}^3n_{12}$$
$$h_{22} = f(\alpha n_{12}^2 + 2\beta n_{11}n_{12} + \gamma n_{11}^2) + 6gn_{11}^2n_{12}^2 \tag{5.12}$$
$$h_{13} = f(\beta n_{12}^2 + 2\gamma n_{11}n_{12}) + 4gn_{11}n_{12}^3, \quad h_{04} = f\gamma n_{12}^2 + gn_{12}^4$$

Здесь $n_{ij}, \chi, f, g, \alpha, \beta, \gamma$ – функции υ, определенные равенствами (5.2), (3.7), (5.9).

5.2. Дальнейшая нормализация. Условия устойчивости и неустойчивости. Для нормализации членов четвертой степени относительно $\sqrt{|R_1|}$, q, p из (5.10) удобно вместо q, p предварительно ввести переменные w, R_2 по формулам $q = \sqrt{2R_2}\sin w$, $p = \sqrt{2R_2}\cos w$. Члены второй степени из (5.10) примут тогда вид $R_1 + \lambda R_2$. Затем при помощи классической теории возмущений [11] можно сделать близкую к тождественной замену переменных $\upsilon, w, R_1, R_2 \to \upsilon_1, \upsilon_2, \rho_1, \rho_2$, нормализующую члены четвертой степени в гамильтониане возмущенного движения.

Если в системе нет резонанса $4\lambda = n$ (n – целое число), то нормализованный гамильтониан имеет вид

$$H = \rho_1 + \lambda\rho_2 + c_{11}\rho_1\rho_2 + c_{02}\rho_2^2 + O_6 \tag{5.13}$$

$$c_{11} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(h_{20} + h_{02})d\upsilon, \quad c_{02} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(3h_{40} + h_{22} + 3h_{04})d\upsilon$$

При выполнении неравенства

$$\Delta \equiv c_{02} - \lambda c_{11} \neq 0 \tag{5.14}$$

имеет место орбитальная устойчивость невозмущенного движения [5, 6].

В каждой из областей I и II фиг. 2 устойчивости в первом приближении существует по одной кривой, на которой выполняется резонансное соотношение $4\lambda = n$: в области I – кривая $4\lambda = 1$, а в области II – кривая $4\lambda = 3$. На фиг. 2 эти кривые изображены штриховыми линиями. Они исходят из точек оси μ, в которых $\mu = {}^1/_4$ и ${}^3/_4$ соответственно.

При резонансе $4\lambda = n$ нормализованный гамильтониан будет таким:

$$H = \rho_1 + \lambda\rho_2 + c_{11}\rho_1\rho_2 + c_{02}\rho_2^2 + [a_n \sin(nv_1 - 4v_2) + b_n \cos(nv_1 - 4v_2)]\rho_2^2 + O_6 \qquad (5.15)$$

$$a_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} [(h_{40} - h_{22} + h_{04})\sin nv - (h_{13} - h_{31})\cos nv\,]dv$$

$$b_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} [(h_{40} - h_{22} + h_{04})\cos nv + (h_{13} - h_{31})\sin nv\,]dv$$

Если выполняется неравенство

$$\Delta > \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad (5.16)$$

то невозмущенное движение орбитально устойчиво. При обратном знаке в неравенстве (5.16) имеет место неустойчивость [7].

При произвольных значениях параметров задачи μ, a описанный алгоритм нелинейного анализа орбитальной устойчивости требует расчетов на ЭВМ.

6. Об устойчивости колебаний малой амплитуды. Если величина a мала, то возможно аналитическое исследование без привлечения численных расчетов на ЭВМ.

Расчеты при помощи метода Депри – Хори показали, что с погрешностью порядка a^2 величины n_{ij} в замене переменных (5.1) могут быть вычислены по следующим формулам:

$$n_{11} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(1 - a\frac{1-\mu^2}{4\mu^2 - 1}\sin v\right), \quad n_{12} = -a\frac{2\sqrt{\mu}(1-\mu^2)}{4\mu^2 - 1}\cos v$$

$$n_{21} = -a\frac{(1-\mu^2)(1-2\mu^2)}{\sqrt{\mu}(4\mu^2 - 1)}\cos v, \quad n_{22} = \sqrt{\mu}\left(1 + a\frac{1-\mu^2}{4\mu^2 - 1}\sin v\right)$$

а для величины λ имеем такое выражение

$$\lambda = \mu - a^2\frac{3\mu(1-\mu^2)}{4(4\mu^2 - 1)} + O(a^3) \qquad (6.1)$$

Из формулы (6.1) следует, что кривые резонансов $4\lambda = 1$ и $4\lambda = 3$ в областях I и II фиг. 2 задаются соответственно уравнениями

$$\mu = \frac{1}{4} - a^2\frac{15}{64} + O(a^3) \quad \text{и} \quad \mu = \frac{3}{4} + a^2\frac{63}{320} + O(a^3) \qquad (6.2)$$

Для коэффициентов c_{ij} нормализованного гамильтониана (5.13) находим такие выражения:

$$c_{11} = -\frac{3\mu(1-\mu^2)}{2(4\mu^2 - 1)} + O(a), \quad c_{02} = \frac{(1-\mu^2)(8\mu^2 + 1)}{16(4\mu^2 - 1)} + O(a)$$

Поэтому величина Δ из (5.14) представима в виде

$$\Delta = \frac{(1-\mu^2)(32\mu^2 + 1)}{16(4\mu^2 - 1)} + O(a) \qquad (6.3)$$

Далее можно получить, что на кривых (6.2) резонансов $4\lambda = n$ имеем $a_n = O(a)$, $b_n = O(a)$. Отсюда и из равенства (6.3) следует, что при малых a условия (5.14) и (5.16) выполнены и, следовательно, если $\mu \neq {}^1/_2$, то периодическое движение (3.1) орбитально устойчиво, если только величина a достаточно мала.

7. Результаты численных расчетов. Численные расчеты, проведенные на ЭВМ по алгоритму п. 5, показали, что для значений параметров μ, a, не принадлежащих резонансным кривым $4\lambda = 1$ и $4\lambda = 3$ неравенство (5.14) выполнено как в области I, так и в области II фиг. 2, а на резонансных кривых выполнено неравенство (5.16).

Следовательно, для всех значений параметров μ, a, лежащих внутри областей I и II орбитальной устойчивости в первом приближении, изучаемое периодическое движение точки M вдоль вертикали действительно является орбитально устойчивым.

Отметим, что только при значении $\mu = {}^1/_2$, рассмотренном в [1] в связи с анализом малых нелинейных колебаний, периодические вертикальные колебания орбитально неустойчивы при любых амплитудах этих колебаний. Если же $\mu \neq {}^1/_2$, то колебания орбитально неустойчивы, когда безразмерная амплитуда превосходит некоторое критическое значение $a_* = a_*(\mu)$, соответствующее криволинейным границам областей I и II на фиг. 2; при $a < a_*$ имеет место орбитальная устойчивость.

При фиксированной амплитуде вертикальных колебаний последние орбитально устойчивы, если $0 < \mu < \mu_1$ или $\mu_2 < \mu \leqslant 1$, где μ_1, μ_2 – функции от a; при $\mu_1 < \mu < \mu_2$ колебания неустойчивы.

В частном случае, когда амплитуда колебаний в точности равна удлинению пружины при равновесии маятника на вертикали ($a = \mu^2$) при $0 < \mu < 0{,}43$ при $0{,}66 < \mu \leqslant 1$ имеет место орбитальная устойчивость, а при $0{,}43 < \mu < 0{,}66$ – неустойчивость.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00220).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Витт А., Горелик Г.* Колебания упругого маятника как пример колебаний двух параметрически связанных линейных систем // Ж. техн. физики. 1933. Т. 3. Вып. 2–3. С. 294–307.
2. *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
3. *Старжинский В.М.* Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. 255 с.
4. *Богаевский В.Н., Повзнер А.Я.* Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. М.: Наука, 1987. 255 с.
5. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. Вып. 6. С. 91–192.
6. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
7. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
8. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
9. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Физматгиз, 1963. 586 с.
10. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 264 с.
11. *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.
12. *Брюно А.Д.* Неустойчивость в системе Гамильтона и распределение астероидов // Мат. сб. 1970. Т. 83. № 2. С. 273–312.
13. *Маркеев А.П.* Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите // Космич. исследования. 1975. Т. 13. Вып. 3. С. 322–336.

Москва

Поступила в редакцию
11.IV.1996